Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2016–2017

MACS 2 – Probabilités

Devoir maison n° 2

À rendre le 16 décembre.

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération. Notamment, toute réponse doit être rédigée et justifiée.

Exercice 1 – *Théorème d'arrêt.* On revoit ici quelques formes du théorème d'arrêt. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une sur-martingale. On rappelle que $X^T=(X_{n\wedge T})_n$ est une sur-martingale. On n'utilisera que cette propriété.
1. Rappeler pourquoi, pour tous temps $s<t$ (fixés), $\mathbb{E}[X_s]\geq\mathbb{E}[X_t]$.
2. Soit T un temps d'arrêt borné : il existe N tel que $T\leq N$ p.s.. On veut montrer que $\mathbb{E}[X_0]\geq\mathbb{E}[X_T]\geq\mathbb{E}[X_N]$.
2.a) Justifier que $\mathbb{E}[X_0]\geq\mathbb{E}[X_T]$ *(Appliquer la question 1 à X^T et des temps bien choisis).*
2.b) Décomposer $\mathbb{E}[X_T]=\displaystyle\sum_{k=0}^{N}\mathbb{E}[X_T\mathbf{1}_{\{T=k\}}]$ et justifier que, pour $0\leq k\leq N$, $\mathbb{E}[X_T\mathbf{1}_{\{T=k\}}]\geq\mathbb{E}[X_N\mathbf{1}_{\{T=k\}}]$ pour conclure que $\mathbb{E}[X_T]\geq\mathbb{E}[X_N]$.
3. Soit S,T deux temps d'arrêt bornés. Justifier que $\mathbb{E}[X_{S\wedge T}]\geq\mathbb{E}[X_T]$ *(Appliquer la question 2 à X^T et des temps bien choisis)*
Remarque : Pour une sous-martingale, on a les inégalités inverses.
$\rightsquigarrow$ Si M est une martingale et S,T deux temps d'arrêt bornés, on a donc $\mathbb{E}[M_{S\wedge T}]=\mathbb{E}[M_S]=\mathbb{E}[M_T]$.

Exercice 2 – *Arrêt optimal.* On considère une suite finie de variables aléatoires $Z_0,\ldots,Z_N$, que l'on observe une par une, dans l'ordre. Ces variables représentent des gains, et on doit en choisir un sans connaître les suivants : à chaque fois que l'on observe une variable, on peut ou bien la choisir, ou bien la rejeter définitivement et considérer la suivante. On peut ainsi choisir Z_0, et s'arrêter, ou choisir (selon la valeur de Z_0) de considérer Z_1, etc., et si on n'a toujours pas choisi au moment de considérer Z_N, alors on choisit nécessairement Z_N. Le problème est de trouver la stratégie qui optimise l'espérance du gain : il faut trouver un temps d'arrêt τ (à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$) pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ où $\mathcal{F}_n=\sigma(Z_0,\ldots,Z_n)$ tel que

$$\mathbb{E}[Z_\tau]=\max\Big\{\mathbb{E}[Z_T]\,\Big|\,T\text{ est un temps d'arrêt pour }(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}\Big\}.$$

On dira alors que τ est un temps d'arrêt optimal, et $\mathbb{E}[Z_\tau]$ est le gain optimal.
NB. Tous les temps d'arrêt considérés ici sont à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$, donc bornés.
1. On suppose pour cette question que Z est une sur-martingale. Par un résultat du cours, justifier que le temps d'arrêt optimal est $\tau=0$: le mieux est de toujours choisir la première variable.
2. On suppose maintenant qu'il existe une sur-martingale Y pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0\leq n\leq N}$ telle que $Z\leq Y$ (c'est-à-dire $Z_n\leq Y_n$ pour tout n) et telle que p.s. il existe $n\in\{0,\ldots,N\}$ tel que $Y_n=Z_n$. Notons

$$\tau=\min\big\{n\in\{0,\ldots,N\}\,\big|\,Y_n=Z_n\big\}.$$

Soit T un temps d'arrêt. Montrons que $T\wedge\tau$ est un meilleur temps d'arrêt que T.
2.a) Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2.b) Montrer que $\mathbb{E}[Z_{T\wedge\tau}-Z_T]\geq\mathbb{E}[Y_{T\wedge\tau}-Y_T]$. *Commencer par justifier que* $\mathbb{E}[Z_{T\wedge\tau}-Z_T]=\mathbb{E}[(Z_\tau-Z_T)\mathbf{1}_{\{\tau<T\}}]$
2.c) Conclure que $\mathbb{E}[Z_T]\leq\mathbb{E}[Z_{T\wedge\tau}]$.
3. On ne fait plus d'hypothèse sur Z. On construit une suite $Y_0,\ldots,Y_N$ par induction décroissante par

$$Y_N=Z_N\qquad\text{et, pour }0\leq n\leq N-1,\qquad Y_n=\max(Z_n,\mathbb{E}[Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n]).$$

3.a) Montrer que Y est une sur-martingale pour la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$. *Déduire cela directement de la définition.*
3.b) Soit $W=(W_n)_n$ une sur-martingale telle que $Z\leq W$ p.s.. Montrer que $W\geq Y$. *Induction décroissante.*
$\rightsquigarrow$ Ainsi, Y est la plus petite sur-martingale plus grande que Z. De plus, $Y_N=Z_N$, donc $\tau\leq N$, où

$$\tau=\min\{n\in\{0,\ldots,N\}\,|\,Y_n=Z_n\}.$$

4. Montrons que τ est optimal.
4.a) Pour tout $n\leq\tau$, justifier que $Y_n=\mathbb{E}[Y_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n]$. *Déduire cela directement des définitions de Y et τ.*
Ainsi, $(M_n)_n=(Y_{n\wedge\tau})_{0\leq n\leq N}$ est une martingale pour $(\mathcal{F}_n)_n$.
4.b) En déduire que, pour tout temps d'arrêt T, $\mathbb{E}[Y_{T\wedge\tau}]=\mathbb{E}[Y_\tau]$, puis de là que $\mathbb{E}[Z_{T\wedge\tau}]\leq\mathbb{E}[Z_\tau]$.
4.c) Conclure.

Pour chaque suite $(Z_n)_n$, on est donc amené à calculer Y et τ afin de trouver la stratégie optimale. Imaginons que l'on cherche un candidat pour un emploi : on en auditionne N, un par un, et à la fin de chaque entretien on doit décider immédiatement si on prend ce candidat ou si on le refuse. Quelle est la stratégie optimale ? Se décider rapidement pour un candidat pas trop mauvais, ou attendre longtemps et prendre le risque de devoir se contenter du dernier ?... On peut choisir diverses modélisations. On suppose ici que l'on donne des notes (entre 0 et 1 par exemple) aux candidats et on veut optimiser l'espérance de la note du candidat choisi.

5. Supposons donc que $Z_0,\ldots,Z_N$ sont indépendantes et de loi uniforme sur [0,1].
On définit $Y_0,\ldots,Y_N$ et τ comme avant.

5.a) Calcul préliminaire : vérifier que, si U suit la loi uniforme sur [0,1], et $x \in [0,1]$, $\mathbb{E}[\max(U,x)] = \frac{1+x^2}{2}$.

5.b) Que vaut Y_N ? Que vaut Y_{N-1} ? Vérifier par récurrence (décroissante) que, pour $n \leq N-1$,

$$Y_n = \max\Big(Z_n, \mathbb{E}[Y_{n+1}]\Big) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{E}[Y_n] = \frac{1}{2}(1+\mathbb{E}[Y_{n+1}]^2).$$

5.c) Conclure que $\tau = \min\{n \geq 0 \,|\, Z_n \geq u_{n+1}\}$, où la suite $u_n (= \mathbb{E}[Y_n])$ peut se définir par récurrence décroissante par $u_{N+1} = 0$ et $u_n = \frac{1}{2}(1+u_{n+1}^2)$ pour $n \leq N$.
Représenter le graphe de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(1+x^2)$ sur [0,1], et la suite des "niveaux d'exigence" $u_{N+1}, u_N, u_{N-1}, \ldots$ sur le même graphe (suite définie par récurrence via la fonction précédente).

Souvent on suppose plutôt que l'on observe des variables aléatoires $X_0,\ldots,X_n$, si bien que l'on pose $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0,\ldots,X_n)$ (information dont on dispose au temps n), et que le gain Z_n dépend de $X_0,\ldots,X_n$, c'est-à-dire que Z_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable (la suite Z est *adaptée* à la filtration $\mathcal{F}$). Tous les arguments précédents restent valables dans ce cadre : dans cet exercice on a pris $X_n = Z_n$ uniquement pour simplifier la présentation.

La théorie développée dans l'exercice s'applique à l'évaluation du prix d'**options américaines** : une option dite "américaine" peut s'exercer à tout instant avant l'échéance, par exemple un call rapporte $Z_n = (S_n - K)_+$ si on l'exerce au temps n, et il ne peut être exercé qu'une fois, ce qui conduit au problème du temps d'exercice optimal (par rapport aux options européennes, une stratégie de portefeuille inclut le choix du moment où exercer l'option).

Les problèmes d'arrêt optimal sont nombreux : problème de choix du meilleur candidat (ou inversement du meilleur emploi, ou du prix le plus bas pour acheter un produit, ou de l'offre la plus haute pour vendre un bien,..., cf. question 5), choix de la meilleure place de parking (à partir de quelle distance du lieu visé faut-il accepter une place de parking disponible ? Ici la loi de Z_n dépend de n car le gain augmente quand on se rapproche du lieu visé, puis diminue quand on le dépasse), choix entre location et achat (à partir de combien de séjours au ski faut-il acheter son matériel ? Ici aussi Z_n dépend de n, et du nombre total $W(\leq N)$ de séjours au ski, aléatoire et inconnu avant d'être atteint), etc. Ces questions ont un intérêt économique (gestion de stock, programme d'investissements, etc.).