Devoir maison

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération. Notamment, toute réponse doit être rédigée et justifiée.

Exercice 1 – ***Marche paresseuse sur un segment.*** Soit N un entier ≥ 2. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\{0,\dots,N\}$ de matrice de transition P donnée par

$$\text{pour tout } x\in\{1,\dots,N-1\},\qquad P(x,x+1)=P(x,x-1)=\frac{1}{4},\qquad P(x,x)=\frac{1}{2},$$

$$P(N,N-1)=P(N,N)=\frac{1}{2},\qquad P(0,1)=P(0,0)=\frac{1}{2}.$$

1. Représenter le graphe, donner la classification des états, leur nature (récurrent ou transient) et leur période.
2. Déterminer la probabilité invariante de cette chaîne de Markov.
3. On s'intéresse au temps moyen d'atteinte de 0 ou N :

$$T=\inf\{n\geq 0\,|\,X_n=0 \text{ ou } X_n=N\}.$$

Pour $x=0,\dots,N$, on note $g(x)=\mathbb{E}_x[T]$.
3.a) Montrer que, pour tout $x\in\{1,\dots,N-1\}$,

$$g(x)=2+\frac{1}{2}g(x-1)+\frac{1}{2}g(x+1).$$

Décomposer selon la valeur de X_1, justifier que, sous $\mathbb{P}_x$, $T=1+T\circ\theta_1$, et appliquer la propriété de Markov.
3.b) En déduire que, pour $x=0,\dots,N$, $g(x)=2x(N-x)$.
On pourra vérifier que les incréments $g(x+1)-g(x)$ forment une suite arithmétique de raison -4, puis en déduire $g(x)$ par sommation, en déterminant les constantes grâce à $g(0)$ et $g(N)$.

Exercice 2 – ***Formule des moments de Kac.*** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov, de matrice P, sur un espace d'états E. Soit $A\subset E$. On considère le temps d'atteinte de A :

$$T=\inf\{n\geq 0\,|\,X_n\in A\}.$$

On souhaite montrer la formule suivante :

$$\text{pour tout } x\in E, \text{ pour tout } n\in\mathbb{N},\qquad \mathbb{E}_x[T^n]\leq n!\Big(\sup_{z\in E}\mathbb{E}_z[T]\Big)^n.$$

(Ici, T^n est simplement l'entier T élevé à la puissance n)
1. Justifier ce qui suit :

$$\mathbb{E}_x[T^n]=\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{N}^*}\mathbb{P}_x(T\geq k_1,\dots,T\geq k_n)\leq n!\sum_{1\leq k_1\leq\cdots\leq k_n}\mathbb{P}_x(T\geq k_n).$$

La première égalité généralise la formule $\mathbb{E}[T]=\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(T\geq k)$. On rappelle sa preuve, dont on pourra s'inspirer : on a toujours $T=\sum_{k=1}^\infty \mathbf{1}_{\{T\geq k\}}$, et la formule se déduit en prenant l'espérance de chaque membre (en invoquant le théorème de convergence monotone pour les séries à termes positifs).
2. Soit deux entiers $1\leq k_1\leq k_n$.
2.a) Pour $y\in E$, appliquer la propriété de Markov au temps k_1 à $\mathbb{P}_x(X_{k_1}=y,\,T\geq k_n)$.
2.b) En décomposant selon la valeur de X_{k_1}, en déduire que

$$\mathbb{P}_x(T\geq k_n)\leq \mathbb{P}_x(T\geq k_1)\sup_{z\in E}\mathbb{P}_z(T\geq k_n-k_1).$$

3. Grâce aux questions précédentes, démontrer la formule à l'aide d'une récurrence.
4. On va tirer deux conséquences de la formule obtenue. Supposons que $M = \sup_{z\in E} \mathbb{E}_z[T] < \infty$.
4.a) Montrer que, pour tout réel λ tel que $0 < \lambda < 1/M$,

$$\mathbb{E}_x[e^{\lambda T}] \leq \frac{1}{1-\lambda M}.$$

4.b) En déduire que, pour tout réel $u \in]0,1[$,

$$\mathbb{P}_x(T > n) \leq \frac{1}{1-u} e^{-u\frac{n}{M}}.$$

Poser $\lambda = u/M$ et commencer par écrire $\mathbb{P}_x(T > n) = \mathbb{P}_x(e^{\lambda T} > e^{\lambda n})$...
5. Dans le cas de la marche paresseuse de l'exercice précédent, pour $A = \{0, N\}$, que vaut $\sup_{x\in E} \mathbb{E}_x[T]$? Écrire la majoration de $\mathbb{P}_x(T > n)$ obtenue à la question précédente, dans ce cas-là.

Exercice 3 – *Modèle des votants (facultatif).* À l'approche d'une élection, les habitants de Metropolis n'ont pas encore choisi pour qui voter. On s'intéresse à l'évolution de leur opinion, qui varie lors des discussions avec leurs voisins.
On propose un modèle très simple :
- il n'y a que 2 choix de vote, notés 0 et 1 ;
- les N électeurs sont disposés le long d'un cercle et numérotés de 1 à N, et ne communiquent qu'avec leurs deux voisins immédiats ;
- à chaque heure, une discussion est entamée entre deux voisins choisis au hasard, uniformément parmi les paires de voisins ayant des avis différents, s'il y en a ; si tout le monde est du même avis, tout le monde garde son avis ;
- après une discussion, les deux voisins se rallient au même avis, qui a autant de chance d'être 0 que 1.

On note $Z_n(x)$, où $x \in \{1,\dots,N\}$ et $n \in \mathbb{N}$, l'opinion (0 ou 1) du votant numéro x après n heures, si bien que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Z_n = (Z_n(x))_{1\leq x\leq N}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $E = \{0,1\}^N$.
1. Expliquer pourquoi $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur E. *(On ne demande pas une vérification formelle de la définition mais une explication de la raison pour laquelle la définition est vérifiée : sachant $Z_0,\dots,Z_n$, de quoi dépend Z_{n+1} ?...)*
2. Le nombre d'états est trop grand pour représenter le graphe ou la matrice. On peut tout de même décrire les probabilités de transition. Étant donné $z = (z(x))_{1\leq x\leq N} \in E$, combien y a-t-il de transitions possibles depuis z et quelles sont leurs probabilités ?
3. Justifier qu'il y a 2 états absorbants et qu'ils sont accessibles depuis tout autre état. Qu'en déduit-on de la récurrence et de la transience des états ? Qu'est-ce que cela signifie pour les votants ?
4. On note X_n le nombre de votants ayant choisi 1, après n discussions : $X_n = Z_n(1) + \cdots + Z_n(N)$. Justifier que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\{0,1,\dots,N\}$, de matrice de transition P donnée par

$$P(0,0) = 1, \qquad P(N,N) = 1, \qquad \text{et, pour } n = 1,\dots,N-1, \qquad P(n,n+1) = P(n,n-1) = \frac{1}{2}.$$

5. À l'aide d'un résultat vu en TD, en déduire, en fonction de la configuration initiale de votants, la probabilité que tous les votants se rallient à l'opinion 1. Et quel est le temps moyen avant que tous se rallient à la même opinion ?
6. Dans le langage de votre choix, simuler $(X_n)_{n\geq 0}$ et obtenir une représentation graphique comme celle montrée ci-dessus.