Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2020–2021

MACS 2 – Probabilités
M1 Math – Probabilités

Devoir maison

À rendre le 16 novembre. En M1, le rendu doit être sous la forme d'un fichier source LaTeX (.tex) et du fichier compilé (.pdf). En MACS2, le rendu peut être manuscrit ou en LaTeX, envoyé par e-mail (un fichier unique au format PDF) ou donné en cours.

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération. Notamment, toute réponse doit être rédigée et justifiée.

Exercice 1 – ***Temps de ruine ou de fortune.*** On considère le problème de la ruine du joueur dans un jeu équilibré : soit $N \in \mathbb{N}^*$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov sur $\{0,1,\dots,N\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P(0,0) = 1, \qquad P(N,N) = 1, \qquad \forall\ k \in \{1,\dots,N-1\},\ P(k,k+1) = P(k,k-1) = \frac{1}{2}.$$

On note

$$T = \inf\big\{n \geq 0 \,\big|\, X_n \in \{0,N\}\big\} = \min(T_0,T_N).$$

1. Justifier (grâce au cours) pourquoi $T < \infty$ p.s., quel que soit l'état initial.
2. Montrer que, pour $k = 0,\dots,N$, on a

$$\mathbb{P}_k(T \leq N) \geq 2^{-k} \geq 2^{-N}.$$

3. En déduire que, pour $x = 0,\dots,N$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_x(T > (n+1)N) \leq \big(1 - 2^{-N}\big)\mathbb{P}_x(T > nN),$$

puis que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a $\mathbb{P}_x(T > m) \leq c\beta^m$ pour des constantes $c > 0$ et $\beta \in]0,1[$.
4. En déduire finalement que $\mathbb{E}_x[T] < \infty$, pour $x = 0,\dots,N$.
5. Pour $x = 0,\dots,N$, on pose $g(x) = \mathbb{E}_x[T]$.
5.a) Que valent $g(0)$ et $g(N)$?
5.b) Démontrer la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } x = 1,\dots,N-1, \qquad g(x) = 1 + \frac{g(x-1) + g(x+1)}{2}.$$

Décomposer selon la valeur de X_1 et utiliser la propriété de Markov au temps 1.
5.c) En déduire une relation de récurrence vérifiée par $f : x \mapsto g(x) + x^2$, et la résoudre pour obtenir $f(x)$, pour $x = 0,\dots,N$ et conclure :

$$\text{pour } x = 0,\dots,N, \qquad \mathbb{E}_x[T] = x(N-x).$$

6. A-t-on utilisé le résultat de la question 4 ?

Exercice 2 – ***Temps de couverture.*** Le *temps de couverture* d'une chaîne de Markov irréductible $(X_n)_n$ sur un espace fini E est le temps moyen nécessaire pour visiter tous les états, en partant de l'état pour lequel ce temps moyen est le plus grand :

$$t_{\text{couv}} = \max_{x\in E} \mathbb{E}_x[T^*], \qquad \text{où} \qquad T^* = \max_{y\in E} T_y,$$

avec $T_y = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n = y\}$ (temps de première visite de y).
1. À l'aide des hypothèses, justifier précisément pourquoi $T^* < \infty$ p.s..
2. On s'intéresse à t_{couv} pour la chaîne de Markov sur $\{0,\dots,N\}$ de matrice P suivante :

$$P(0,1) = 1, \qquad P(N,N-1) = 1, \qquad \forall\ k \in \{1,\dots,N-1\},\ P(k,k+1) = P(k,k-1) = \frac{1}{2}.$$

Soit $x \in \{0,\dots,N\}$.

2.a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $n = T_0 < T_N$ alors $T^* = n + T_N \circ \theta_n$, et plus généralement que

$$T^* = T_{\{0,N\}} + \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\mathbf{1}_{\{n=T_0<T_N\}} T_N \circ \theta_n + \mathbf{1}_{\{n=T_N<T_0\}} T_0 \circ \theta_n \Big),$$

où $T_{\{0,N\}} = \min(T_0, T_N)$ est le temps d'atteinte de l'ensemble $\{0,N\}$.
2.b) Avec la propriété de Markov au temps n, ré-exprimer $\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{n=T_0<T_N\}} T_N \circ \theta_n]$ et $\mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\{n=T_N<T_0\}} T_0 \circ \theta_n]$.
2.c) En déduire que

$$\mathbb{E}_x[T^*] = \mathbb{E}_x[T_{\{0,N\}}] + \mathbb{E}_0[T_N].$$

2.d) À l'aide de l'exercice précédent, donner la valeur de ces deux espérances. (On pourra justifier que $\mathbb{E}_0[T_N] = \mathbb{E}'_0[\min(T_{-N}, T_N)]$ où $\mathbb{E}'$ se réfère à la marche aléatoire simple symétrique sur $\{-N, \ldots, N\}$).
2.e) En déduire $\mathbb{E}_x[T^*]$ et t_{couv}.
3. On considère la marche aléatoire simple symétrique sur le cycle $\{0,1,\ldots,N\}(= \mathbb{Z}/(N+1)\mathbb{Z})$. Pour $1 \leq k \leq N+1$, on note S_k le premier instant où la chaîne de Markov a visité k sommets. Ainsi, $S_1 = 0$: on a désormais

$$P(0,1) = P(0,N) = 1/2 = P(N,0) = P(N,N-1).$$

3.a) Montrer que, pour $k = 1, \ldots, N$,

$$\mathbb{E}_0[S_{k+1}] = \mathbb{E}_0[S_k] + \mathbb{E}_1[\min(T_0, T_{k+1})].$$

On décomposera selon la valeur de S_k et on appliquera la propriété de Markov en ce temps-là.
3.b) En déduire t_{couv}.
4. À coder. À l'aide d'une simulation de la marche aléatoire sur le cycle, estimer numériquement, par méthode de Monte-Carlo, le temps de couverture pour $N = 1, \ldots, 100$, et comparer au résultat théorique. Donner le programme et un graphe (imprimer ou envoyer par mail).

Exercice 3 – *Dernier point visité sur le cycle.* On reprend l'exemple de la marche symétrique sur le cycle à $N+1$ sommets numérotés $0,1,\ldots,N$. Partant de 0, on cherche la loi du dernier sommet visité :

$$Z = X_T,$$

où $T = \max_{y \in E} T_y$.
1. Justifier l'égalité suivante : pour $x = 1, \ldots, N$,

$$\mathbb{P}_0(Z = x) = \mathbb{P}_0(T_{x-1} < T_{x+1})\mathbb{P}_{x-1}(T_{x+1} < T_x) + \mathbb{P}_0(T_{x-1} > T_{x+1})\mathbb{P}_{x+1}(T_{x-1} < T_x).$$

Décomposer selon la valeur de $U_x = \min(T_{x-1}, T_{x+1})$ et appliquer la propriété de Markov en ce temps.
2. Expliquer pourquoi, pour tout x,

$$\mathbb{P}_{x-1}(T_{x+1} < T_x) = \mathbb{P}_{x+1}(T_{x-1} < T_x) = \mathbb{P}_1(T_N < T_0).$$

3. En déduire que, pour $x = 1, \ldots, N$,

$$\mathbb{P}_0(Z = x) = \mathbb{P}_1(T_N < T_0).$$

4. Conclure : quelle est la loi de Z sous $\mathbb{P}_0$? (Et que vaut $\mathbb{P}_1(T_N < T_0)$, sans calcul ?)
5. À coder. Pour $N = 20$, estimer numériquement la loi de Z sous $\mathbb{P}_0$ (on la représentera sous forme d'histogramme). Donner le programme et un graphe (imprimer ou envoyer par mail).