Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2021–2022

MACS 2 – Probabilités
M1 Math – Probabilités

DM n°1 – Chaînes de Markov

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération.

Exercice 1 – ***Marche aléatoire perturbée sur*** $\mathbb{N}$**.** On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$ et dont les probabilités de transition vérifient, pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X_1 = x+1 \,|\, X_0 = x) = p_x, \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(X_1 = x-1 \,|\, X_0 = x) = 1 - p_x,$$

où $(p_x)_{x\in\mathbb{N}^*}$ sont des réels dans $[0,1]$, et $p_0 = 1$ (c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X_1 = 1 \,|\, X_0 = 0) = 1$). On pose $q_x = 1 - p_x$. Le cas $p_x \equiv 1/2$ est la marche aléatoire simple. On étudie le comportement de ce système lorsque l'on perturbe ces probabilités de transition en certains états x.

1. À quelle condition (sur $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$) cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? On suppose cette condition vérifiée. Quelle est la période ?

2. Écrire les équations vérifiées par une mesure invariante μ, en déduire en fonction de $\mu(0)$ (et $(p_x)_{x\in\mathbb{N}}$) les valeurs de $\mu(1)$, $\mu(2)$, $\mu(3)$ et finalement $\mu(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire que la chaîne de Markov est récurrente positive si, et seulement si $\displaystyle\sum_{x=1}^{\infty} \frac{p_1 \cdots p_{x-1}}{q_1 \cdots q_{x-1}} \frac{1}{q_x} < \infty.$

4. *Exemple :* on considère le cas où $p_0 = 1$, $p_x = 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{N}^* \setminus S$ et $p_x = 1/4$ si $x \in S$, où $S = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$. La chaîne de Markov est-elle récurrente positive ? *Remarquer que le quotient* $\frac{p_1\cdots p_{x-1}}{q_1\cdots q_{x-1}}$ *garde la même valeur (laquelle ?) pour* x *entre* 2^k+1 *et* 2^{k+1}. Même question si $S = \{3^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

5. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On définit les temps d'atteinte $T_z = \inf\{n \geq 0 \,|\, X_n = z\}$ pour $z \in \mathbb{N}$ et on cherche à calculer, pour $0 \leq x \leq N$, les probabilités

$$f_N(x) = \mathbb{P}_x(T_N < T_0).$$

5.a) Donner les valeurs de $f_N(0)$ et $f_N(N)$ et montrer que, pour $0 < x < N$, f_N vérifie la relation de récurrence suivante :

$$f_N(x) = q_x f_N(x-1) + p_x f_N(x+1).$$

On écrira précisément l'application de la propriété de Markov.

5.b) En déduire une relation simple entre $f_N(x+1) - f_N(x)$ et $f_N(x) - f_N(x-1)$ (on pourra noter $\alpha_x = \frac{q_x}{p_x}$ pour alléger les écritures) ; puis une expression de $f_N(x+1) - f_N(x)$ en fonction de $f_N(1)$ (et des p_x,q_x) ; et enfin une expression de $f_N(x)$ en fonction de $f_N(1)$ (et des p_x,q_x).

5.c) Conclure : à l'aide de la valeur $f_N(N)$, calculer $f_N(1)$ puis $f_N(x)$ pour tout $0 \leq x \leq N$.

6. En déduire la condition sous laquelle $\mathbb{P}_x(T_0 = \infty) = 0$ pour tout $x > 0$. *Justifier précisément le passage à la limite ; on pourra remarquer la monotonie d'une suite d'événements...*

7. Que vaut donc la probabilité $\mathbb{P}_0(\tau_0 = \infty)$, où $\tau_0 = \inf\{n \geq 1 \,|\, X_n = 0\}$ est le temps de retour en 0 ?

8. Conclure : donner la nature de la chaîne de Markov (transiente, récurrente positive, récurrente nulle) en fonction de conditions sur les p_x,q_x.

9. *Exemple :* Dans l'exemple précédent (question 4), on prend maintenant $p_x = 3/4$ si $x \in S$, et toujours $p_x = 1/2$ sinon. La chaîne est-elle récurrente si $S = \{2^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$? Et si $S = \{3^n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$?