Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2022–2023

MACS 2 – Probabilités
M1 Math – Probabilités

Devoir maison

La qualité de la présentation et de la rédaction seront prises en considération.

Exercice 1 – ***Temps de ruine.*** On considère le problème de la ruine du joueur dans un jeu déséquilibré : soit $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[\setminus\{\frac{1}{2}\}$ et $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov sur $\{0,1,\ldots,N\}$ de matrice de transition P donnée par

$$P(0,0)=1, \qquad P(N,N)=1, \qquad \forall\, k \in \{1,\ldots,N-1\},\ P(k,k+1)=p=1-P(k,k-1).$$

On pourra noter $q=1-p$ pour alléger certaines écritures. On note

$$T=\inf\big\{n\geq 0 \,\big|\, X_n \in \{0,N\}\big\}=\min(T_0,T_N).$$

1. Justifier (grâce au cours) que $T<\infty$ p.s., quel que soit l'état initial.
2. Pour $x \in \{0,\ldots,N\}$, on note N_x le nombre de visites en x :

$$N_x=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{1}_{\{X_n=x\}}.$$

2.a) Justifier (grâce au cours) que $\mathbb{E}_x[N_x]<\infty$ p.s., quel que soit l'état initial $x\in\{1,\ldots,N-1\}$.
2.b) Montrer (à l'aide de la propriété de Markov) que, pour tous états $x\neq y$, pour tout n,

$$\mathbb{E}_x[N_y\mathbf{1}_{\{T_y=n\}}]=\mathbb{P}_x(T_y=n)\mathbb{E}_y[N_y],$$

et en déduire une relation entre $\mathbb{E}_x[N_y]$ et $\mathbb{E}_y[N_y]$ pour conclure que $\mathbb{E}_x[N_y]<\infty$ si $y\in\{1,\ldots,N-1\}$.
2.c) En utilisant la question précédente, montrer que $\mathbb{E}_x[T]<\infty$ pour tout état initial x.
3. Pour $x=0,\ldots,N$, on pose $g(x)=\mathbb{E}_x[T]$.
3.a) Que valent $g(0)$ et $g(N)$?
3.b) Démontrer la relation de récurrence suivante :

$$\text{pour } x=1,\ldots,N-1, \qquad g(x)=1+q\,g(x-1)+p\,g(x+1).$$

Décomposer selon la valeur de X_1 et utiliser la propriété de Markov au temps 1.
3.c) Trouver une solution particulière de ce système sous la forme $h(x)=\alpha x$ $(0\leq x\leq N)$, pour une valeur $\alpha\in\mathbb{R}$ à déterminer.
3.d) En déduire la fonction g.
4. A-t-on utilisé le résultat de la question 2.c) ?

Exercice 2 – ***Déplacements aléatoires d'un cavalier.*** On considère, sur l'espace d'états $E=\{1,\ldots,8\}\times\{1,\ldots,8\}$, une chaîne de Markov correspondant à des déplacements aléatoires d'un cavalier du jeu d'échecs : sachant la position $X_n\in E$, X_{n+1} est choisie aléatoirement de façon uniforme parmi les positions dans E atteignables par un cavalier situé en X_n. Pour deux cases $x,y\in E$, on notera $x\sim y$ si un mouvement de cavalier mène de x en y. On note, pour $x\in E$, $d(x)$ le nombre de positions atteignables depuis x :

$$d(x)=\mathrm{Card}\{y\in E \,|\, y\sim x\}.$$

1. Représenter sur un schéma les valeurs de $d(\cdot)$ *Grâce aux symétries, on pourra se contenter de ne donner qu'un petit nombre de valeurs.*
2. (Facultatif) Justifier que cette chaîne de Markov est irréductible. *Par exemple, on pourra commencer par vérifier que tout état (i,j) communique avec les états $(i+1,j)$ (si $i\leq 7$) et $(i,j+1)$ (si $j\leq 7$)...*
3. Montrer que d est une mesure invariante pour la chaîne de Markov et en déduire la probabilité invariante.
4. En déduire, en fonction de la position initiale $x\in E$, l'espérance $\mathbb{E}_x[\tau_x]$ du temps de retour à cette position initiale.

Exercice 3. Soit $\big(p(x)\big)_{x\in\mathbb{N}}$ une probabilité sur $\mathbb{N}$ telle que $p(x)>0$ pour tout $x\in\mathbb{N}$. On considère la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ de matrice de transition P définie par

$$P(0,y)=p(y), \qquad \text{pour tout } y\in\mathbb{N},$$
$$P(x,y)=\begin{cases}1/x & \text{si } y<x\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}, \qquad \text{pour tous } x\geq 1,\ y\in\mathbb{N}.$$

1. Donner schématiquement le graphe de cette chaîne de Markov, en n'indiquant que les états 0,1,2,3 (et des points de suspension).
2. Justifier que, pour tout $x\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}_x(T_0\leq x)=1$, puis que la chaîne de Markov est récurrente. A-t-on, pour tout x, $\mathbb{E}_x[T_0]<\infty$?
3. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{E}_x[T_0]=1+\alpha(x), \qquad \text{où} \qquad \alpha(x)=\frac{1}{x}\sum_{y=0}^{x-1}\mathbb{E}_y[T_0].$$

4. Exprimer $\mathbb{E}_x[T_0]$ en fonction de $\alpha(x+1)$ et de $\alpha(x)$. En déduire la valeur de $\alpha(x)$ et finalement de $\mathbb{E}_x[T_0]$. Donner un équivalent de cette espérance quand $x\to\infty$.
5. Donner une relation entre $\mathbb{E}_0[\tau_0]$ et les valeurs $\mathbb{E}_x[T_0]$. En déduire que X est récurrente positive si, et seulement si

$$\sum_{x\geq 1}p(x)\ln(x)<\infty.$$

6. Définir une probabilité $(p(x))_{x\in\mathbb{N}}$ pour laquelle X n'est pas récurrente positive.