

Compléments à la fiche 1

Soit E un espace dénombrable, et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E, définies sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
La suite $(X_n)_n$ est une *chaîne de Markov* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i_0, i_1, \ldots, i_n, i_{n+1} \in E$ tels que $\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = i_{n+1} \,|\, X_n = i_n).$$

Autrement dit, la connaissance de X_0,... X_n n'apporte pas plus d'information sur X_{n+1} que la connaissance de X_n seulement ; ou encore, X_{n+1} peut se définir à partir de X_n et de variables aléatoires indépendantes de $X_0, \ldots, X_n$ (cf. dernier exercice).
Elle est dite *homogène* si cette quantité ne dépend pas de n, au sens suivant : pour tous $i, j \in E$, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbb{P}(X_m = i) > 0$ et $\mathbb{P}(X_n = i) > 0$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j | X_n = i) = \mathbb{P}(X_{m+1} = j | X_m = i).$$

On note alors $P(i, j)$ (ou $P_{i,j}$) cette quantité, appelée *probabilité de transition* de i à j, et la famille $(P(i, j))_{i,j\in E}$ est appelée la *matrice de transition* de la chaîne de Markov. Dans la suite, sauf indication contraire, « chaîne de Markov » signifiera toujours implicitement « chaîne de Markov homogène ».

E est appelé l'*espace d'états*, et la loi de X_0 est appelée la *loi initiale* de $(X_n)_n$.

On remarque que la « matrice » P est *stochastique*, c'est-à-dire que $P(i, j) \geq 0$ pour tous indices $i, j \in E$ et que chaque « ligne » de P a pour somme 1 : pour tout $i \in E$, $\sum_{j\in E} P(i, j) = 1$.

Inversement, la donnée de la loi μ de X_0 et de la matrice P suffit à définir la loi de la suite $(X_n)_{n\geq 0}$. En effet, la définition donne : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous états $i_0, i_1, \ldots, i_n \in E$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) &= \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})\mathbb{P}(X_n = i_n | X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})\\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-1} = i_{n-1})P(i_{n-1}, i_n)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2})P(i_{n-2}, i_{n-1})P(i_{n-1}, i_n)\\ &= \cdots\\ &= \mathbb{P}(X_0 = i_0)P(i_0, i_1) \cdots P(i_{n-1}, i_n) = \mu(i_0)P(i_0, i_1) \cdots P(i_{n-1}, i_n).\end{aligned}$$

Pour toute loi ν sur E, on notera $\mathbb{P}_\nu$ la loi de la chaîne de Markov de matrice de transition P (fournie par le contexte) et de mesure initiale ν. En particulier, pour $i \in E$, on note $\mathbb{P}_i = \mathbb{P}_{\delta_i}$ la loi de la chaîne de Markov *issue de i*, c'est-à-dire telle que $X_0 = i$ presque sûrement.
NB : une loi μ sur E est définie par une famille $(\mu(i))_{i\in E}$ de réels dans $[0, 1]$ tels que $\sum_{i\in E} \mu(i) = 1$, où on a noté pour simplifier $\mu(i)$ au lieu de $\mu(\{i\})$.

Exercice 1.

Exercice 2.
1. S est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on décompose

$$\{S = n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X = k, Y = n - k\}$$

d'où $\mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{n} \cdots$; formule du binôme de Newton ; on obtient une loi de Poisson, préciser son paramètre.
2. Z est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on décompose (union d'événements disjoints) $\{Z = n\} = \{X = n, Y > n\} \cup \{X > n, Y = n\} \cup \{X = n, Y = n\}$, et on calcule... Ou bien on justifie $\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(X \geq n, Y \geq n) = \cdots$ et on en déduit $\mathbb{P}(Z = n)$ vu que $\mathbb{P}(Z \geq n) = \mathbb{P}(Z = n) + \mathbb{P}(Z \geq n+1)$. On trouve une loi géométrique, préciser son paramètre.

Exercice 3 – ***Somme d'un nombre aléatoire de termes.***
1. Décomposer selon la valeur de N : (justifier)

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}\left[S \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=n\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[S\,\mathbf{1}_{\{N=n\}}]$$

et calculer chaque terme (on est ramené à un nombre fixé n de termes dans la somme S ; et utiliser l'indépendance entre S et les X_i)
2. Rappeler la variance de $X_1+\cdots+X_n$ et en déduire l'espérance de $(X_1+\cdots+X_n)^2$ (ou la calculer directement). Procéder de même qu'en 1 pour calculer $\mathbb{E}[S^2]$. On trouve $\mathrm{Var}(S) = \mathbb{E}[N]\,\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(N)\mathbb{E}[X]^2$.

Exercice 4 – ***Lancers de dés.***
D'après la définition, pour montrer qu'une suite $(Z_n)_{n\geq 0}$ à valeurs dans E est une chaîne de Markov homogène, il suffit de montrer qu'il existe $P = (P(i,j))_{i,j\in E}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tous $i_0, \ldots, i_n, i_{n+1} \in E$, on peut écrire

$$\mathbb{P}(Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n, Z_{n+1} = i_{n+1}) = \mathbb{P}(Z_0 = i_0, \ldots, Z_n = i_n)P(i_n, i_{n+1})$$

et dans ce cas P est la matrice de transition de $(Z_n)_n$. On peut commencer par préciser les situations où le membre de gauche vaut 0, pour se restreindre ensuite aux cas « intéressants ».
Question subsidiaire [à garder pour la fin, ou à regarder rapidement] : Que dire des suites $(S'_n)_{n\geq 0}$ et $(\Delta_n)_{n\geq 0}$ définies par

$$S'_n = X_0 + 2X_1 + \cdots + 2^n X_n \qquad \text{et} \qquad \Delta_n = X_{n+1} - X_n\,?$$

L'une d'elles n'est pas une chaîne de Markov homogène, et l'autre n'est pas une chaîne de Markov (du tout)...

Exercice 5 – ***Formalisme matriciel.***
1. Décomposer $\mathbb{P}_\nu(X_1 = x_j)$ selon la valeur de X_0 (qui suit la loi ν), et reconnaître un produit matriciel (vecteur ligne × matrice). Itérer l'idée pour traiter X_n.
2. Décomposer à nouveau selon la valeur de X_0.

Exercice 6 – ***Météo.*** On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov sur E, et on note $E = \{1, 2, 3\}$ dans l'ordre de l'énoncé. Réécrire les probabilités demandées avec ces notations. Utiliser alors l'exercice précédent. Pour la deuxième question, se ramener également à l'exercice précédent (à l'aide de la définition, ou de la propriété de Markov).

Exercice 7 – ***Modélisation.***
1. Quel est l'espace d'états ? Dans quel(s) cas passe-t-on de X_n dossiers le jour n à $X_n + 1$ le lendemain ? etc. À quelle hypothèse implicite correspond le fait que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov ?
2. Repenser à l'exercice 1 : la génération $n+1$ s'obtient par tirage au sort avec remise dans une urne d'allèles A et a en nombres donnés par la génération n.

Exercice 8 – ***Chaîne à deux états.***
1. Récurrence [Simple calcul, l'admettre]
2. Que se passe-t-il si $p = q = 1$? (pour la chaîne de Markov, et pour la suite Q^n)
3. Se ramener à la définition.

Exercice 9 – ***Une construction des chaînes de Markov.***
1. Suivre l'indication. Faire un schéma : sur un segment de longueur 1, faire figurer p_1, $p_1 + p_2$, etc., et indiquer ce que vaut $f(p,u)$ quand u prend diverses valeurs dans ce segment. Avec le fait que U suit la loi uniforme sur $[0,1]$, justifier alors que $\mathbb{P}(f(p,U) = i) = p_i$.
2. Avec la question 1, définir une variable X_0 de loi μ_0 à partir de U_0. La matrice P décrit la loi de X_1 si on connaît X_0 : si $X_0 = i$, la loi de X_1 est donnée par la ligne i de P. En déduire une définition de X_1 à partir de X_0 et U_1, puis continuer cette construction par récurrence. Vérifier au final que la suite construite satisfait bien la définition.