Fiche 2 – Propriété de Markov

Définition, calculs

On rappelle le critère pratique pour montrer qu'une suite de variables aléatoires est une chaîne de Markov : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans un espace discret E. Si, pour tout $n \geq 0$, on peut écrire

$$X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, U_{n+1}),$$

où U_{n+1} est une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble mesurable F (en général, $\mathbb{R}$) indépendante de $X_0, \ldots, X_n$, et $f_n : E \times F \to E$ est une fonction mesurable, alors $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov. Si de plus les variables aléatoires $U_1, U_2, \ldots$ ont toutes la même loi et que $f_1 = f_2 = \cdots$, alors cette chaîne de Markov est homogène.

Exercice 1 – *Renouvellement.* On suppose qu'une ampoule a une probabilité p de griller chaque jour, indépendamment du passé. Lorsqu'elle grille, on la remplace le soir-même par une ampoule neuve. On note X_n l'âge (en jours), au début du n-ième jour, de l'ampoule branchée.
Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène et donner sa matrice de transition. *On pourra noter A_n l'événement « le n-ième jour, l'ampoule branchée grille. » et utiliser le critère précédent.*

Exercice 2. Sur $E = \{1, 2, 3\}$, on considère la chaîne de Markov de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter le diagramme de cette chaîne de Markov.
2. On note $\tau_3 = \inf\{n \geq 1 | X_n = 3\}$ le temps d'atteinte de l'état 3 (avec $\tau_3 = +\infty$ si 3 n'est pas atteint). Que valent $\mathbb{P}_1(\tau_3 = 1)$, $\mathbb{P}_1(\tau_3 = 2)$, $\mathbb{P}_1(\tau_3 = 3)$? Calculer, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{P}_1(\tau_3 = n)$. En déduire que $\mathbb{P}_1(\tau_3 < \infty) = 1$.

Propriété de Markov

Rappelons une formulation de la propriété de Markov. On suppose que $(X_n)_n$ est une chaîne de Markov, d'espace d'états E. Pour tout $n \geq 0$, pour tous $F \in \sigma(X_n, X_{n+1}, \ldots)$, $G \in \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_{n-1})$ et $i_n \in E$,

$$\mathbb{P}\big(F \big| G, X_n = i_n\big) = \mathbb{P}\big(F \big| X_n = i_n\big)$$

et si la chaîne est *homogène* alors cette quantité est invariante par « translation des indices » : si F est l'événement $\{(X_{n+1}, X_{n+2}, \ldots) \in A\}$ où A est un élément de la tribu produit sur $E^{\mathbb{N}}$, alors

$$\mathbb{P}\big(F \big| X_n = i_n\big) = \mathbb{P}\big((X_n, X_{n+1}, \ldots) \in A \big| X_n = i_n\big) = \mathbb{P}\big((X_0, X_1, \ldots) \in A \big| X_0 = i_n\big).$$

Par exemple, $\mathbb{P}(X_{n+2} = X_{n+3} | X_{n-1} = j, X_n = i) = \mathbb{P}(X_{n+2} = X_{n+3} | X_n = i) = \mathbb{P}(X_2 = X_3 | X_0 = i)$.

Exercice 3. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, \ldots, 9\}$ de matrice de transition P. Réécrire en fonction des coefficients $P^k(i,j)$ les probabilités suivantes :

$$\mathbb{P}_9(X_1 = 3, X_2 = 3), \qquad \mathbb{P}_9(X_2 = 7), \qquad \mathbb{P}_9(X_1 = 2, X_3 = 5), \qquad \mathbb{P}_9(X_1 \in \{2,3\}, X_3 = 5),$$

$$\mathbb{P}_9(X_2 = 4, X_5 = 8, X_{15} = 7), \qquad \mathbb{P}_9(X_5 = 7, X_6 = 8 | X_3 = 2), \qquad \mathbb{P}_9(X_5 = 3 | X_2 \in \{4, 8\}).$$

Exercice 4 – ***Visite d'un état par une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$.***
Soit $p \in]0,1[$, et on note $q = 1-p$. On considère la chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}$ ayant les probabilités de transition suivantes : pour tous $k, l \in \mathbb{Z}$,

$$P(k,k+1) = p, \quad P(k,k-1) = q, \quad \text{et} \quad P(k,l) = 0 \quad \text{si } l \notin \{k-1, k+1\}.$$

1. Représenter schématiquement le diagramme de cette chaîne de Markov.
2. Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on note $\tau_x = \inf\{n \geq 0 | X_n = x\}$ le temps d'atteinte de x. À l'aide de la propriété de Markov, démontrer l'identité suivante :

$$\mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty) = q + p\,\mathbb{P}_1(\tau_{-1} < \infty).$$

D'abord, découper l'espace de probabilité selon la valeur de X_1, de façon à appliquer la propriété de Markov au temps $n = 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. Montrer que l'identité suivante est une traduction de la propriété de Markov au temps n :

$$\mathbb{P}_1(\tau_{-1} < \infty | \tau_0 = n) = \mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty).$$

Réécrire les événements en fonction de $X_0, X_1, \ldots$
4. Déduire de ce qui précède que

$$\mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty) = q + p\,\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty)\mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty).$$

5. Justifier que $\mathbb{P}_1(\tau_0 < \infty) = \mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty)$. On note cette valeur α.
5.a) Si $p \leq q$, en déduire la valeur de α. *On notera que $\frac{q}{p} \geq 1 \geq \alpha$.*
5.b) $*$ Si $p > q$, utiliser la loi des grands nombres pour justifier que $\alpha \neq 1$, et en déduire la valeur de α. *Justifier que $X_n \to_n +\infty$ presque sûrement ; par ailleurs, en répétant 3. et 4., montrer que si $\alpha = 1$ alors $\mathbb{P}_0(\tau_{-k} < \infty) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, et conclure.*