Fiche 3 – Propriété de Markov, récurrence et transience

Propriété de Markov (faible et forte)

Exercice 1 – ***Nombre de visites à un état.*** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov, d'espace d'états E. Pour tout état x, on définit la variable aléatoire

$$N_x = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=x\}},$$

c'est-à-dire que N_x est le nombre (fini ou infini) de visites de la chaîne de Markov à l'état x.
1. Montrer que, pour tout état x,

$$\mathbb{E}_x[N_x] = 1 + \sum_{y\in E} P(x,y)\mathbb{E}_y[N_x].$$

2. Montrer que, pour tous états $x \neq y$, $\mathbb{E}_x[N_y] = \mathbb{P}_x(\tau_y < \infty)\mathbb{E}_y[N_y]$.
3. Montrer que, pour tout état x et tout entier n,

$$\mathbb{P}_x(N_x \geq n+1) = \mathbb{P}_x(N_x \geq n)\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty).$$

En déduire que, si x est transient, N_x suit une loi géométrique sous $\mathbb{P}_x$, et donner une expression de $\mathbb{E}_x[N_x]$. Conclure de plus que $\mathbb{E}_y[N_x] < \infty$ pour tout $y \in E$.

Exercice 2 – ***Absorption.*** Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur l'espace d'états E, de matrice de transition P.
On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des états transients, et $\mathcal{C}_1,\ldots,\mathcal{C}_N$ les classes récurrentes.
1. Pour $1 \leq i \leq N$ et $x \in E$, on note $q_i(x)$ la probabilité d'absorption par la classe $\mathcal{C}_i$ pour la chaîne de Markov issue de x :

$$q_i(x) = \mathbb{P}_x(\tau_{\mathcal{C}_i} < \infty)$$

où $\tau_{\mathcal{C}_i} = \inf\{n \geq 0 | X_n \in \mathcal{C}_i\}$.
1.a) Que vaut $q_i(x)$ si $x \in \mathcal{C}_i$? Et si $x \in \mathcal{C}_j$ avec $j \neq i$?
1.b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{T}$,

$$q_i(x) = \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x,y)q_i(y) + \sum_{y\in\mathcal{C}_i} P(x,y).$$

1.c) Pour tout état x, montrer que $\mathbb{P}_x(X_n \in \mathcal{C}_i) = \mathbb{P}_x(\tau_{\mathcal{C}_i} \leq n)$ et déduire $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_x(X_n \in \mathcal{C}_i) = q_i(x)$.
1.d) On suppose que $\mathcal{T}$ est fini. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\sum_{i=1}^{N} q_i(x) = 1.$$

2. Pour tout $x \in E$, on note $t(x)$ le temps moyen d'absorption pour la chaîne de Markov issue de x :

$$t(x) = \mathbb{E}_x[\tau],$$

où $\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n \in \mathcal{R}\}$, et $\mathcal{R} = \mathcal{C}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{C}_N$ est l'ensemble des états récurrents.
2.a) Que vaut $t(x)$ pour $x \in \mathcal{R}$?
2.b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{T}$,

$$t(x) = 1 + \sum_{y\in\mathcal{T}} P(x,y)t(y).$$

2.c) Soit $x \in \mathcal{T}$. En constatant que, sous $\mathbb{P}_x$, $\tau = \sum_{y\in\mathcal{T}} N_y$, montrer (avec l'exercice précédent) que si $\mathcal{T}$ est fini alors $t(x) < \infty$.

Classification des états, récurrence et transience

Exercice 3. Pour les chaînes des Markov suivantes (d'espace d'état E et de matrice de transition P), donner une classification des états et donner leur nature (récurrent ou transient). Calculer les probabilités d'absorption, et les temps moyens d'absorption.

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

2. $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

3. $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/4 & 3/4 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

4. $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour la première chaîne de Markov, calculer aussi les temps moyens d'atteinte de l'état 1.

Exercice 4. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0.25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0.2 & 0.6 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

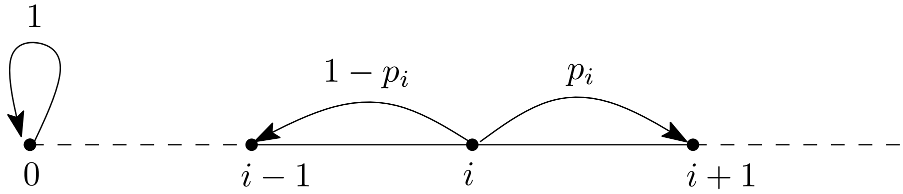
1. Classifier les états et donner leur nature.
2. Calculer les probabilités et temps moyens d'absorption.

Exercice 5. Soit $(X_n)_n$ une chaîne de Markov sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0 & 0.25 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Classifier les états et donner leur nature.
2. Calculer les probabilités et temps moyens d'absorption.

Exercice 6 – *Marche aléatoire sur* $\mathbb{N}$ *absorbée en* 0. Étant donnée une suite de réels $(p_i)_{i\geq 1}$ dans $]0, 1[$, on définit une chaîne de Markov $(X_n)_n$ sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition sont données par la figure suivante :



1. Classer les états. Quels comportements asymptotiques peut-on imaginer pour X_n ?
2. Si on avait $p(0, 1) > 0$, pourrait-on faire la classification sans connaître les p_i ?