Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2012-2013

M1 – Modèles aléatoires

Fiche 5 – Théorèmes limites

Exercice 1. Pour les chaînes de Markov suivantes, montrer qu'elles sont récurrentes irréductibles et déterminer leur période.

1. $E = \{1, 2, 3\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2. $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 & 0 & 0.7 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0.8 & 0 \end{pmatrix}$$

4. $E = \{1, 2, 3\}$ et

$$Q = \begin{pmatrix} 0.40 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0 & 0.8 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 – ***Météo (suite).*** On reprend l'énoncé de l'exercice 6 de la fiche 1. La matrice de transition sur $E = \{\text{beau}, \text{nuageux}, \text{couvert}\}$ était

$$P = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique. Calculer la probabilité stationnaire de cette chaîne.
2. Quelle est la proportion de belles journées (calculée sur une longue période de temps) ?

Exercice 3. On considère la chaîne de Markov d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer qu'elle est irréductible et récurrente.
2. Quelle est sa probabilité invariante ?
3. Quelles sont les limites p.s. de $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} X_k^2$ lorsque $n \to \infty$?

Exercice 4 – ***Jeu de l'oie ou des petits chevaux.*** Un jeu comprend 12 cases numérotées en cercle de 0 à 11. Au départ, le joueur place son pion sur la case 0. À chaque tour un joueur lance un dé à six faces et avance son pion d'un nombre de cases correspondant au résultat du lancer (il peut faire plusieurs tours du plateau). Les lancers successifs sont supposés indépendants. On note Y_n le numéro de la case où se trouve le pion du joueur à l'issue du n-ième lancer.
1. Montrer que $(Y_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (homogène) sur l'espace d'états $E = \{0, 1, \ldots, 11\}$.
2. Donner sa matrice de transition P et classer ses états. Quelles sont leurs périodes ?
3. Vérifier que la matrice P est bistochastique (c'est-à-dire que P et ${}^tP$ sont stochastiques), et en déduire la probabilité invariante de la chaîne.
4. Que vaut $\lim_n \mathbb{P}(Y_n = 0)$? Quelle est la distance moyenne à 0 (au cours d'une longue partie), en disant que 1 et 11 sont à distance 1 de 0, 2 et 10 à distance 2, etc. ?
5. La partie s'arrête quand le joueur revient exactement sur sa case de départ. Quelle est la durée moyenne d'une partie ?