Université Paris 13, Institut Galilée
Année universitaire 2012-2013

M1 – Modèles aléatoires

Examen partiel du 13 novembre 2012

Durée : 1 heure et demie

Aucun appareil électronique n'est autorisé. Seule une feuille de notes au format A4 est autorisée.
La qualité de la présentation et de la rédaction sera prise en considération.

NB. Dans le sujet, les chaînes de Markov sont toujours supposées homogènes.

Exercice 1. On dispose dans une maison de deux systèmes de chauffage, l'un de base et l'autre d'appoint. On dira que l'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les deux systèmes fonctionnent.
Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec probabilité $\frac{1}{2}$. Par contre, si l'on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et l'on passe dans l'état 1 avec probabilité $\frac{3}{4}$.
On note X_n l'état du système au jour numéro n, et on considère que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov homogène.
1. Donner sa matrice de transition et son schéma. Quelles sont les classes et la nature des états (transients, récurrents) ?
2. Sachant que l'on est dans l'état 1 un dimanche, quelle est la probabilité d'être dans le même état le mardi suivant ?
3. Pour $n \geq 0$, on pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ (la loi initiale est donc donnée par $\mathbb{P}(X_0 = 1) = p_0$). Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}, puis montrer que la suite de terme général $u_n = p_n - \frac{3}{5}$ est géométrique. En déduire p_n en fonction de n et de p_0, puis $\lim_{n\to\infty} p_n$.
4. On suppose que le premier jour (jour numéro 0) on se trouve dans l'état 1 avec probabilité $\frac{3}{5}$. Montrer qu'alors il en est de même dans tous les jours qui suivent. En déduire la probabilité d'être dans l'état 1 le jour n et dans l'état 2 le jour $n + 1$.
5. On se place dans la situation de la question précédente. Chaque journée dans l'état 1 coûte 10€, dans l'état 2 coûte 15€, et chaque transition de l'état 1 à l'état 2 ou inversement par rapport à la veille coûte 5€. Donner le coût C_n de la journée n en fonction de X_{n-1} et X_n, puis calculer son espérance.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ d'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et de matrice de transition donnée (partiellement) ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$$

1. Quels sont les deux coefficients manquants ?
2. Représenter le schéma de cette chaîne de Markov (on disposera les états « en cercle », dans le sens des aiguilles d'une montre).
3. Déterminer les classes de communication et les représenter sur le schéma, puis donner la nature des états (récurrents ou transients).

4. Calculer, pour chaque classe récurrente, les probabilités d'absorption par cette classe selon l'état initial de la chaîne de Markov.
5. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des états transients, et $\mathcal{R}$ celui des états récurrents. On définit le temps τ (ou encore $\tau(X_0, X_1, \ldots)$) d'absorption de $(X_n)_n$ par

$$\tau = \inf\{n \geq 0 | X_n \in \mathcal{R}\},$$

Pour tout état x, on pose $t(x) = \mathbb{E}_x[\tau]$.
5.a) *Cette question porte sur une chaîne de Markov* $(X_n)_{n\geq 0}$ *générale.* Que vaut $t(x)$ si x est récurrent ? Pour $x \in \mathcal{T}$, montrer que

$$t(x) = 1 + \sum_{y \in \mathcal{T}} P(x, y)t(y).$$

5.b) Dans l'exemple précédent, calculer le temps moyen d'absorption $t(x)$ pour tout état initial x.

Exercice 3. Soit N un entier naturel ≥ 2. On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov d'espace d'états $\{0, 1, 2, \ldots, N\}$ et dont les probabilités de transition $(P(i, j))_{1\leq i,j\leq N}$ sont données par :

$$P(0, 0) = 1, \quad P(N, N) = 1$$

et, pour $x = 1, \ldots, N - 1$,

$$P(x, x + 1) = P(x, x - 1) = \frac{1}{2}.$$

1. Dessiner le schéma de cette chaîne de Markov. Quelles sont les classes de communication ? Quelle est la nature des états (récurrent, transient) ?
2. Pour tout état x, on note τ_x la variable aléatoire donnant le temps d'atteinte de x par $(X_n)_n$:

$$\tau_x = \inf\{n \geq 0 | X_n = x\}.$$

Pour $x = 0, 1, \ldots, N$, on pose $f(x) = \mathbb{P}_x(\tau_N < \tau_0)$.
2.a) Donner les valeurs de $f(0)$ et $f(N)$, ainsi qu'une relation entre $f(x)$, $f(x - 1)$ et $f(x + 1)$.
2.b) En déduire que la fonction $x \mapsto f(x+1) - f(x)$ est constante sur $\{0, \ldots, N-1\}$, et prouver finalement que, pour $x = 0, \ldots, N$,

$$f(x) = \frac{x}{N}.$$

Exercice 3. Soit N un entier naturel ≥ 2. On note $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov d'espace d'états $\{0,1,2,\dots,N\}$ et dont les probabilités de transition $(P(i,j))_{1\leq i,j\leq N}$ sont données par :

$$P(0,0)=1, \quad P(N,N)=1$$

et, pour $x=1,\dots,N-1$,

$$P(x,x+1)=P(x,x-1)=\frac{1}{2}.$$

1. Dessiner le schéma de cette chaîne de Markov. Quelles sont les classes de communication ? Quelle est la nature des états (récurrent, transient) ?

2. Pour tout état x, on note τ_x la variable aléatoire donnant le temps d'atteinte de x par $(X_n)_n$:

$$\tau_x = \inf\{n\geq 0 | X_n = x\}.$$

Pour $x=0,1,\dots,N$, on pose $f(x)=\mathbb{P}_x(\tau_N<\tau_0)$.

2.a) Donner les valeurs de $f(0)$ et $f(N)$, ainsi qu'une relation entre $f(x)$, $f(x-1)$ et $f(x+1)$.

2.b) En déduire que la fonction $x\mapsto f(x+1)-f(x)$ est constante sur $\{0,\dots,N-1\}$, et prouver finalement que, pour $x=0,\dots,N$,

$$f(x)=\frac{x}{N}.$$

3. On note $\tau=\min(\tau_0,\tau_N)$ la variable aléatoire donnant le temps d'atteinte de 0 ou de N et, pour tout état x, $t(x)=\mathbb{E}_x[\tau]$.

3.a) Donner les valeurs de $t(0)$ et $t(N)$ et, à l'aide de l'exercice 2, question 5.a) (*justifier pourquoi elle s'applique*), donner une équation reliant $t(x)$, $t(x-1)$ et $t(x+1)$ pour $0<x<N$.

3.b) En déduire une relation vérifiée par la fonction $g:\{0,\dots,N\}\to\mathbb{R}$ définie par

$$g(x)=t(x)+x^2 \qquad \text{pour } 0\leq x\leq N,$$

puis la valeur de $g(x)$ pour tout $0\leq x\leq N$, et finalement de $t(x)$.

4. On considère maintenant une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition $(Q(i,j))_{i,j\geq 0}$ sont données par :

$$Q(0,0)=1$$

et, pour $x\geq 1$,

$$Q(x,x+1)=Q(x,x-1)=\frac{1}{2}.$$

4.a) Justifier que $\mathbb{P}_1(\tau_0=\infty)=\lim_{N\to\infty}\mathbb{P}_1(\tau_0>\tau_N)$. Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathbb{P}_1(\tau_0=\infty)$.

4.b) Conclure que $\mathbb{P}_1(\tau_1^+=\infty)>0$, où $\tau_1^+=\inf\{n\geq 1|X_n=1\}$, et donner la classification et la nature des états de la chaîne de Markov.

4.c) Justifier que $\mathbb{E}_1[\tau_0]=\lim_{N\to\infty}\mathbb{E}_1[\min(\tau_0,\tau_N)]$. Déduire de ce qui précède ce que vaut $\mathbb{E}_1[\tau_0]$.

5. Soit $(r_x,p_x,q_x)_{x\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs tels que $q_0=0$ et $p_x+q_x+r_x=1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. On considère maintenant une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{N}$ dont les probabilités de transition $(Q(i,j))_{i,j\geq 0}$ sont données par : pour tout $x\in\mathbb{N}$,

$$Q(x,x+1)=p_x, \qquad Q(x,x-1)=q_x \qquad Q(x,x)=r_x.$$

(NB : Comme $q_0=0$, l'espace d'états est bien $\mathbb{N}$)

5.a) À quelle condition cette chaîne de Markov est-elle irréductible ? On suppose dorénavant cette condition vérifiée.

5.b) Soit N un entier ≥ 2. On définit f comme plus haut. Montrer que, pour $x\geq 1$,

$$f(x+1)-f(x)=\alpha_x(f(x)-f(x-1))$$

où $\alpha_x=\frac{q_x}{p_x}$. En déduire une expression de $f(x+1)-f(x)$ en fonction de $f(1)$ (et p,q,r), puis une expression de $f(x)$ en fonction de $f(1)$. Enfin, en déduire une expression de $f(x)$ en fonction des seuls p,q,r.

5.c) En procédant comme plus haut, en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov soit récurrente.