# Marches aléatoires en milieu de Dirichlet

## Intégrabilité des temps de sortie et balisticité

Laurent Tournier

Thèse sous la direction de Christophe Sabot
Institut Camille Jordan, Université Lyon-1

7 mars 2008 / Groupe de travail «Processus Stochastiques, Matrices Aléatoires», université Paris 6

# Plan

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o, x)$ sous $\mathbb{P}$

# Déroulement de l'exposé

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o,x)$ sous $\mathbb{P}$

# Origine du modèle

L'introduction de **milieux aléatoires** où s'effectue une marche aléatoire se justifie dans des modèles de physique ou de biologie dans le but, notamment :

- en physique, de prendre en compte les irrégularités d'un milieu : perturbation aléatoire d'un milieu déterministe ;
- en biologie, de modéliser une chaîne d'ADN (sur laquelle se déplace une enzyme, par exemple).

Mais surtout, c'est un modèle porteurs de problèmes mathématiques délicats, et intéressants.

# Définition

Graphe orienté $G = (V, E)$. Pour $x \in V$,

$$\mathcal{P}_x = \mathrm{Prob}(\{e \in E | \underline{e} = x\}) \subset \mathbb{R}^E.$$

Un *environnement* est un élément $\omega \in \Omega = \prod_{x \in V} \mathcal{P}_x$.

- Pour $\omega \in \Omega$ et $x \in V$, loi *quenched* issue de $x$ :

  $P_{x,\omega}$ : loi de la chaîne de Markov issue de $x$ de transition $\omega$.

# Définition

Graphe orienté $G = (V, E)$. Pour $x \in V$,

$$\mathcal{P}_x = \mathrm{Prob}(\{e \in E | \underline{e} = x\}) \subset \mathbb{R}^E.$$

Un *environnement* est un élément $\omega \in \Omega = \prod_{x \in V} \mathcal{P}_x$.
On munit $\Omega$ d'une probabilité $\mathbb{P}$.

- Pour $\omega \in \Omega$ et $x \in V$, loi *quenched* issue de $x$ :

  $P_{x,\omega}$ : loi de la chaîne de Markov issue de $x$ de transition $\omega$.

# Définition

Graphe orienté $G = (V, E)$. Pour $x \in V$,

$$\mathcal{P}_x = \mathrm{Prob}(\{e \in E | \underline{e} = x\}) \subset \mathbb{R}^E.$$

Un *environnement* est un élément $\omega \in \Omega = \prod_{x \in V} \mathcal{P}_x$.
On munit $\Omega$ d'une probabilité $\mathbb{P}$.

- Pour $\omega \in \Omega$ et $x \in V$, loi *quenched* issue de $x$ :

  $P_{x,\omega}$ : loi de la chaîne de Markov issue de $x$ de transition $\omega$.

- Pour $x \in V$, loi *annealed* issue de $x$ :

$$P_x(\cdot) = \int_\Omega P_{x,\omega}(\cdot)\, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}[P_{x,\omega}(\cdot)].$$

# Remarque

Sous $P_o$, $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.

En effet, le passé de la marche avant l'instant $n$ renseigne sur l'environnement sous-jacent, et donc sur la loi du futur de la marche.

# Remarque

Sous $P_o$, $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.

En effet, le passé de la marche avant l'instant $n$ renseigne sur l'environnement sous-jacent, et donc sur la loi du futur de la marche.

## Hypothèse

$\mathbb{P}$ sera toujours une probabilité produit sur $\Omega = \prod_x \mathcal{P}_x$ : indépendance «spatiale» de l'environnement.

# Remarque

Sous $P_o$, $(X_n)_{n\geq 0}$ n'est pas une chaîne de Markov.

En effet, le passé de la marche avant l'instant $n$ renseigne sur l'environnement sous-jacent, et donc sur la loi du futur de la marche.

**Hypothèse**

$\mathbb{P}$ sera toujours une probabilité produit sur $\Omega = \prod_x \mathcal{P}_x$ : indépendance «spatiale» de l'environnement.

Les transitions sont *renforcées* à mesure que les arêtes orientées sont traversées.

# Déroulement de l'exposé

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o, x)$ sous $\mathbb{P}$

# En dimension 1 : marche sur $\mathbb{Z}$

Environnement i.i.d. : $\mathbb{P}$ équivaut à la donnée de $\mu$, loi sur $[0, 1]$.
On note $\rho = \frac{\omega(0,-1)}{\omega(0,1)} = \frac{1-\omega(0,1)}{\omega(0,1)}$.

## Théorème (Solomon, 1975)

- Transience/récurrence
  - si $\mathbb{E}[\ln \rho] < 0$, $X_n \xrightarrow[n]{} +\infty$ $P_o$-p.s. ;
  - si $\mathbb{E}[\ln \rho] = 0$, $\liminf_n X_n = -\infty$ et $\limsup_n X_n = +\infty$ $P_o$-p.s.
- Vitesse
  - si $\mathbb{E}[\rho] < 1$, $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v = \dfrac{1-\mathbb{E}[\rho]}{1+\mathbb{E}[\rho]} > 0$ $P_o$-p.s. ;
  - si $\mathbb{E}[\rho^{-1}]^{-1} < 1 < \mathbb{E}[\rho]$, $\dfrac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} 0$ $P_o$-p.s.

# En dimension $d \geq 2$

- Résultats beaucoup plus incomplets.
- Critère de Kalikow (1981) de transience dans une direction : $X_n \cdot \ell \underset{n}{\longrightarrow} +\infty$.
- Sznitman et Zerner (1998) montrent que le critère de Kalikow entraîne la *balisticité* de la marche : il existe $v \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tel que

$$P_o\text{-p.s.}, \ \frac{X_n}{n} \underset{n}{\longrightarrow} v.$$

- Sznitman (2000, 2002) introduit de nouvelles conditions de balisticité (T), (T') (sous l'hypothèse d'ellipticité uniforme).

# Déroulement de l'exposé

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o, x)$ sous $\mathbb{P}$

# Loi de Dirichlet

Soit une famille $\vec{\alpha} = (\alpha_e)_{e \in E}$ de réels $> 0$. La loi de Dirichlet sur les environnements est :

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}^{(\vec{\alpha})} = \bigotimes_{x \in V} \mathcal{D}((\alpha_e)_{e \in E,\ \underline{e} = x}),$$

où, pour toute famille $(\alpha_i)_{i \in I}$, on a défini la loi de Dirichlet sur $\mathrm{Prob}(I)$ :

$$\mathcal{D}((\alpha_i)_{i \in I}) = \frac{\Gamma(\sum_{i \in I} \alpha_i)}{\prod_{i \in I} \Gamma(\alpha_i)} \left( \prod_{i \in I} x_i^{\alpha_i - 1} \right) d\lambda((x_i)_i),$$

$\lambda((x_i)_i) = \prod_{i \neq i_0} dx_i$ étant la mesure de Lebesgue sur $\mathrm{Prob}(I)$.

# Propriétés de $\mathcal{D}((\alpha_i)_{i\in I})$

## Proposition

Soit $(X_i)_{i\in I}$ des v.a. indépendantes telles que $X_i$ suit la loi $\Gamma(\alpha_i)$. Alors :

$$\left(\frac{X_i}{\sum_j X_j}\right)_{i\in I} \sim \mathcal{D}((\alpha_i)_{i\in I}).$$

## Corollaire

- propriété d'associativité ;
- propriété de restriction.

Si $(p_i)_{i\in I}$ suit $\mathcal{D}((\alpha_i)_{i\in I})$,

$$E[p_i] = \frac{\alpha_i}{\sum_j \alpha_j}$$

## Propriété bayésienne

Si le couple $(p, X)$ de v.a. est tel que $\mathcal{L}(p) = \mathcal{D}((\alpha_i)_{i\in I})$ et $\mathcal{L}(X|p) = p$, alors : $\mathcal{L}(p|X) = \mathcal{D}((\alpha_i + \delta_{X,i})_{i\in I})$.

# Marche aléatoire linéairement renforcée

On se donne des poids initiaux $\alpha_e > 0$ pour $e \in E$ (arêtes orientées). Puis :

- les probabilités de transition sont proportionnelles aux poids des arêtes ;
- le poids d'une arête croît de 1 après chaque traversée.

Autrement dit,

$$P((X_n, X_{n+1}) = e | X_0, \ldots, X_n) = \frac{\alpha_e + N_e^{(n)}}{\sum_{\underline{f}=X_n}(\alpha_f + N_f^{(n)})},$$

où $N_f^{(n)}$ est le nombre de traversées de l'arête $f$ jusqu'à l'instant $n$.

# Renforcement linéaire et milieu de Dirichlet

**Proposition**

La loi *annealed* de la marche aléatoire dans un environnement de Dirichlet de paramètres $(\alpha_e)_{e \in E}$ coïncide avec la loi d'une marche aléatoire linéairement renforcée de poids initiaux $(\alpha_e)_{e \in E}$.

# Marches aléatoires en milieu de Dirichlet dans $\mathbb{Z}^d$

$(e_1, \ldots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$, $\mathcal{V} = \{\pm e_i, i = 1, \ldots, d\}$.
Soit $(\alpha_e)_{e\in\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{V}}$. On note $\mathbb{P}$ la mesure de Dirichlet (i.i.d.) sur les environnements de $\mathbb{Z}^d$ associée.
On note $\Sigma = \sum_{e\in\mathcal{V}} \alpha_e$, et $d_m = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i - \alpha_{-i}}{\Sigma} e_i = E_o[X_1]$.

## Théorème (Enriquez, Sabot 2006, T. 2008)

Si $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$, alors il existe $v \neq 0$ tel que, $P_o$-p.s. :

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v.$$

Et, alors :

$$\left| v - \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} d_m \right|_1 < \frac{1}{\Sigma - 1}.$$

# Marches aléatoires en milieu de Dirichlet dans $\mathbb{Z}^d$

$(e_1, \dots, e_d)$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$, $\mathcal{V} = \{\pm e_i, i = 1, \dots, d\}$.
Soit $(\alpha_e)_{e\in\mathcal{V}} \in \mathbb{R}_+^{\mathcal{V}}$. On note $\mathbb{P}$ la mesure de Dirichlet (i.i.d.) sur les environnements de $\mathbb{Z}^d$ associée.
On note $\Sigma = \sum_{e\in\mathcal{V}} \alpha_e$, et $d_m = \sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i - \alpha_{-i}}{\Sigma} e_i = E_o[X_1]$.

## Théorème (Enriquez, Sabot 2006, T. 2008)

Si $\sum_{i=1}^d |\alpha_i - \alpha_{-i}| > 1$, alors il existe $v \neq 0$ tel que, $P_o$-p.s. :

$$\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v.$$

Et, alors :
$$\left| v - \frac{\Sigma}{\Sigma - 1} d_m \right|_1 < \frac{1}{\Sigma - 1}.$$

## Preuve

Le critère de Kalikow s'applique.

# Déroulement de l'exposé

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o, x)$ sous $\mathbb{P}$

# Marche de Kalikow

Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$ connexe tel que $o \in U$, on définit des probabilités de transition : pour $x \in U$ et $e \in \mathcal{V}$,

$$\widehat{\omega}_U(x,e) = \frac{\mathbb{E}[G_U^\omega(o,x)\omega(x,e)]}{\mathbb{E}[G_U^\omega(o,x)]}.$$

## Lemme de Kalikow

Pour tout $x \in U$,

$$\boxed{G_U^{\widehat{\omega}_U}(o,x) = \mathbb{E}[G_U^\omega(o,x)]}.$$

En particulier, $E_o^{\widehat{\omega}_U}[T_U] = E_o[T_U]$, et pour $x \in \partial_V U$,

$$P_{o,\widehat{\omega}_U}(X_{T_U} = x) = P_o(X_{T_U} = x).$$

# Critère de Kalikow

On définit la dérive de la marche de Kalikow :

$$\widehat{d}_U(x) = E_x^{\widehat{\omega}_U}[X_1 - X_0] = \sum_{e \in \mathcal{V}} \widehat{\omega}_U(x,e)e.$$

## Critère de Kalikow (Kalikow 81, Sznitman et Zerner 98)

On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et $\ell \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ tels que :

Pour tout $U \subset \mathbb{Z}^d$ borné tel que $o \in U$, et tout $x \in U$,

$$\widehat{d}_U(x) \cdot \ell \geq \varepsilon.$$

Alors il existe $v \neq 0$ tel que $\frac{X_n}{n} \xrightarrow[n]{} v$ $P_o$-p.s.. Et $v \cdot \ell > 0$.

# Kalikow et l'uniforme ellipticité

## Définition

La loi $\mathbb{P}$ est **uniformément elliptique** s'il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $e \in E$,

$$\mathbb{P}\text{-p.s.},\ \omega_e \geq \kappa.$$

# Kalikow et l'uniforme ellipticité

## Définition

La loi $\mathbb{P}$ est **uniformément elliptique** s'il existe $\kappa > 0$ tel que, pour tout $e \in E$,

$$\mathbb{P}\text{-p.s.},\ \omega_e \geq \kappa.$$

Dans ce cas, on a :

## Proposition (Kalikow)

S'il existe $\ell \in \mathbb{R}^d$ tel que :

$$\mathbb{E}[(d^\omega(o) \cdot \ell)_+] - \frac{1}{\kappa}\mathbb{E}[(d^\omega(o) \cdot \ell)_-] > 0,$$

alors le critère de Kalikow est satisfait.

# Déroulement de l'exposé

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o, x)$ sous $\mathbb{P}$

# Formule d'intégration par parties

- Pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction $f$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$, en notant $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\vec{\alpha}}$,

$$\int f\, d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f\, d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left( \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

# Formule d'intégration par parties

- Pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction $f$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$, en notant $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\vec{\alpha}}$,

$$\int f \, d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f \, d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left( \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

- Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, $x_1, x_2, x_4 \in U$, $x_3 \in U \cup \partial_V U$ avec $(x_2, x_3) \in E$,

$$\frac{\partial G_U^\omega(x_1, x_4)}{\partial \omega(x_2, x_3)} = G_U^\omega(x_1, x_2) G_U^\omega(x_3, x_4)$$

# Formule d'intégration par parties

- Pour tout $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}_+^n$, et toute fonction $f$ différentiable sur $\mathbb{R}^n$, en notant $\mathbb{P} = \mathbb{P}^{\vec{\alpha}}$,

$$\int f \, d\mathbb{P} = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\alpha_1} \int x_1 f \, d\mathbb{P} + \frac{1}{\alpha_1} \int x_1 \left( \sum_i x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) d\mathbb{P}.$$

- Pour $U \subset \mathbb{Z}^d$, $x_1, x_2, x_4 \in U$, $x_3 \in U \cup \partial_V U$ avec $(x_2, x_3) \in E$, et $\delta \in (0, 1)$,

$$\frac{\partial G^\omega_{U,\delta}(x_1, x_4)}{\partial \omega(x_2, x_3)} = \delta G^\omega_{U,\delta}(x_1, x_2) G^\omega_{U,\delta}(x_3, x_4)$$

où $G^\omega_{U,\delta}$ est la fonction de Green de la marche tuée, avec probabilité de survie $\delta$.

# Suite du calcul

On trouve alors : pour tout $e \in \mathcal{V}$,

$$\widehat{\omega}_{U,\delta}(z,e) = \frac{1}{\Sigma - 1}\left(\alpha_e - \frac{\mathbb{E}[G^{\omega}_{U,\delta}(o,z)p_{\omega,\delta}(z,e)]}{\mathbb{E}[G^{\omega}_{U,\delta}(o,z)]}\right)$$

où

$$p_{\omega,\delta}(z,e) = \omega(z,e)(G^{\omega}_{U,\delta}(z,z) - \delta G^{\omega}(z+e,z))$$

# Suite du calcul

On trouve alors : pour tout $e \in \mathcal{V}$,

$$\widehat{\omega}_{U,\delta}(z,e) = \frac{1}{\Sigma - 1}\left(\alpha_e - \frac{\mathbb{E}[G^{\omega}_{U,\delta}(o,z)p_{\omega,\delta}(z,e)]}{\mathbb{E}[G^{\omega}_{U,\delta}(o,z)]}\right)$$

où

$$\begin{aligned} p_{\omega,\delta}(z,e) &= \omega(z,e)(G^{\omega}_{U,\delta}(z,z) - \delta G^{\omega}(z+e,z)) \\ &= P_{z,\omega}(X_1 = z+e | H_\partial < \widetilde{H}_z). \end{aligned}$$

# Suite du calcul

On trouve alors : pour tout $e \in \mathcal{V}$,

$$\widehat{\omega}_{U,\delta}(z,e) = \frac{1}{\Sigma - 1}\left(\alpha_e - \frac{\mathbb{E}[G^{\omega}_{U,\delta}(o,z)p_{\omega,\delta}(z,e)]}{\mathbb{E}[G^{\omega}_{U,\delta}(o,z)]}\right)$$

où

$$\begin{aligned} p_{\omega,\delta}(z,e) &= \omega(z,e)(G^{\omega}_{U,\delta}(z,z) - \delta G^{\omega}(z+e,z)) \\ &= P_{z,\omega}(X_1 = z+e | H_\partial < \widetilde{H}_z). \end{aligned}$$

D'où :

$$\widehat{d}_{U,\delta}(z) = \frac{1}{\Sigma - 1}\left(\sum_{i=1}^{d}(\alpha_i - \alpha_{-i})e_i - \widetilde{d}\right),$$

où $\widetilde{d}$ est l'espérance d'une v.a. à valeur dans $\mathcal{V}$ : $|\widetilde{d}|_1 \leq 1$.

On obtient $\ell \neq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tous $U, z, \delta$,

$$\widehat{d}_{U,\delta}(z) \cdot \ell \geq \varepsilon.$$

Puis (convergence monotone) :

$$\widehat{d}_{U,\delta}(z) \underset{\delta \to 1^-}{\longrightarrow} \widehat{d}_U(z)$$

et le critère de Kalikow est satisfait

On obtient $\ell \neq 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que, pour tous $U, z, \delta$,

$$\widehat{d}_{U,\delta}(z) \cdot \ell \geq \varepsilon.$$

Puis (convergence monotone) :

$$\widehat{d}_{U,\delta}(z) \underset{\delta \to 1^-}{\longrightarrow} \widehat{d}_U(z)$$

et le critère de Kalikow est satisfait **si on a de plus :**

$$\mathbb{E}[G_U^\omega(o,x)] < \infty.$$

# Déroulement de l'exposé

1. Introduction du modèle, et résultats
   - Marches aléatoires en milieu aléatoire.
   - Résultats dans $\mathbb{Z}^d$, balisticité.
   - Loi de Dirichlet, renforcement linéaire
2. Preuve du résultat
   - Critère de Kalikow
   - Calcul dans le cas Dirichlet
   - Intégrabilité de $G_U^\omega(o, x)$ sous $\mathbb{P}$

# Énoncé de la condition

$G = (V \cup \{\partial\}, E)$ graphe **fini** orienté, $(\alpha_e)_{e\in E}$ des poids >0. Les marches sur $G$ sont tuées en $\partial$. On suppose que tout sommet est relié à $\partial$.
Pour $A \subset E$, on note :

$$\beta_A = \sum_{e\in\partial_E A} \alpha_e.$$

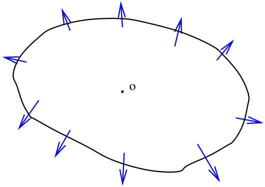
## Théorème

Soit $o \in V$. De façon équivalente :

1. $\mathbb{E}[G^\omega(o,o)] < \infty$ ;
2. pour tout $A \subset E$ fortement connexe avec $o \in \underline{A}$, $\beta_A > 1$.

# Minoration de $\mathbb{E}[G^\omega(o,o)]$

Hyp. : il existe $A \subset E$ fort[t] connexe tel que $o \in \underline{A}$ et $\beta_A \leq 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. On définit l'événement :




$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{\forall e \in \partial_E A, \omega_e \leq \varepsilon\}$$

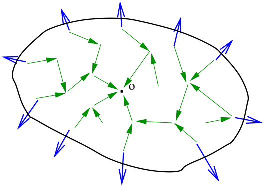
Pour $\omega \in \mathcal{E}_\varepsilon$, $E_{o,\omega}[T_A] \geq \frac{1}{\varepsilon}$, et $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\varepsilon) \sim_{\varepsilon\to 0} c\varepsilon^{\beta_A}$, d'où :

$$E_o[T_A] = \int_0^\infty \mathbb{P}(E_{o,\omega}[T_A] \geq t)dt \geq \int_0^\infty \mathbb{P}(\mathcal{E}_{1/t})dt = \infty.$$

Il existe donc $x \in \underline{A}$ tel que $\mathbb{E}[G^\omega_A(o,x)] = \infty$.

# Minoration de $\mathbb{E}[G^\omega(o,o)]$

Hyp. : il existe $A \subset E$ fort[t] connexe tel que $o \in \underline{A}$ et $\beta_A \leq 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. On définit l'événement :




$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{\forall e \in \partial_E A, \omega_e \leq \varepsilon\}$$
$$\mathcal{F} = \{\vec{G}(\omega) = T\}$$

Pour $\omega \in \mathcal{E}_\varepsilon$, $E_{o,\omega}[T_A] \geq \frac{1}{\varepsilon}$, et $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\varepsilon) \sim_{\varepsilon \to 0} c\varepsilon^{\beta_A}$, d'où :

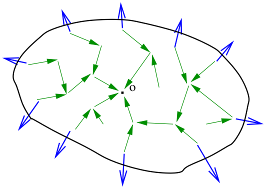
$$E_o[T_A] = \int_0^\infty \mathbb{P}(E_{o,\omega}[T_A] \geq t)dt \geq \int_0^\infty \mathbb{P}(\mathcal{E}_{1/t})dt = \infty.$$

Il existe donc $x \in \underline{A}$ tel que $\mathbb{E}[G_A^\omega(o,x)] = \infty$

$\vec{G}(\omega)$ : graphe des arêtes $e$ avec $\omega_e$ maximale.
Pour $e \in \vec{G}(\omega)$, $\omega_e \geq \kappa > 0$.

# Minoration de $\mathbb{E}[G^\omega(o,o)]$

Hyp. : il existe $A \subset E$ fort[t] connexe tel que $o \in \underline{A}$ et $\beta_A \leq 1$.
Soit $\varepsilon > 0$. On définit l'événement :




$$\mathcal{E}_\varepsilon = \{\forall e \in \partial_E A, \omega_e \leq \varepsilon\}$$
$$\mathcal{F} = \{\vec{G}(\omega) = T\}$$

Pour $\omega \in \mathcal{E}_\varepsilon$, $E_{o,\omega}[T_A] \geq \frac{1}{\varepsilon}$, et $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\varepsilon \cap \mathcal{F}) \sim_{\varepsilon \to 0} c\varepsilon^{\beta_A}$, d'où :

$$E_o[T_A, \mathcal{F}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(E_{o,\omega}[T_A, \mathcal{F}] \geq t)dt \geq \int_0^\infty \mathbb{P}(\mathcal{E}_{1/t} \cap \mathcal{F})dt = \infty.$$

Il existe donc $x \in \underline{A}$ tel que $\mathbb{E}[G_A^\omega(o,x), \mathcal{F}] = \infty$ d'où

$$\mathbb{E}[G_A^\omega(o,o), \mathcal{F}] \geq \kappa^m \mathbb{E}[G_A^\omega(o,x), \mathcal{F}] = \infty.$$

$\vec{G}(\omega)$ : graphe des arêtes $e$ avec $\omega_e$ maximale.
Pour $e \in \vec{G}(\omega)$, $\omega_e \geq \kappa > 0$.

# Majoration de $G^{\omega}(o, o)$

Principe : Récurrence sur le nombre d'arêtes du graphe.

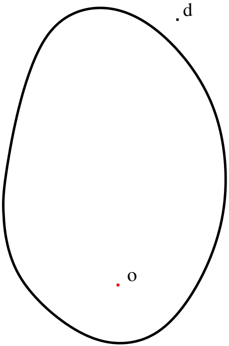
Pour cela, on "simplifie" le graphe en identifiant des sommets "aisément reliables entre eux".

Pour $\omega \in \Omega$, on note $C(\omega)$ la partie de $E$ par laquelle on va quotienter le graphe $G$.

# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

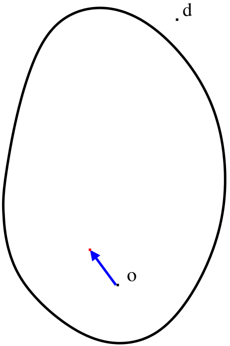
- On part de $o$ ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

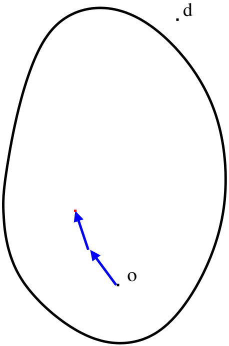
• On part de $o$ ;
• On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

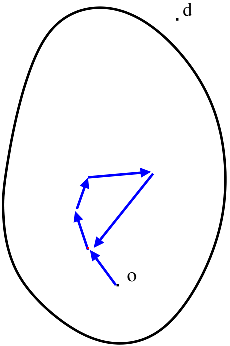
• On part de $o$ ;
• On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

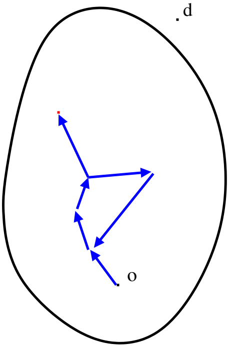
- On part de $o$ ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

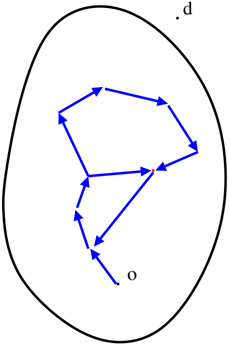
• On part de $o$ ;
• On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

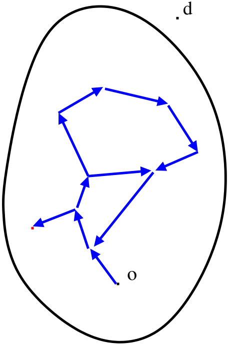
• On part de $o$ ;
• On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

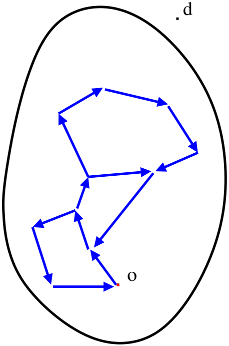
- On part de $o$ ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

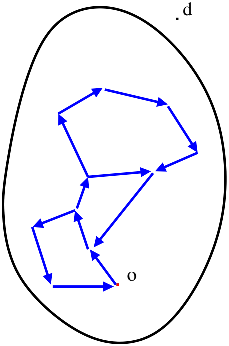
- On part de $o$ ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;
- Jusqu'à aboutir en $o$ ou en $\partial$.



# Construction de $C(\omega)$

On construit $C(\omega)$ arête par arête.

- On part de $o$ ;
- On ajoute l'arête qui maximise, pour une marche partant du dernier point visité, la probabilité de sortie de l'ensemble des arêtes déjà visitées ;
- Jusqu'à aboutir en $o$ ou en $\partial$.




## Propriété

Il existe $c > 0$ tel que, pour tous $x \in \underline{C(\omega)}$, $y \in \overline{C(\omega)}$ distincts,

$$P_{x,\omega}(H_y < \widetilde{H}_x \wedge T_{C(\omega)}) > c.$$

# Conséquences

- Si on aboutit en $\partial$, $G^\omega(o,o) \leq \frac{1}{c}$.
- Si on aboutit en $o$, $C(\omega)$ est fortement connexe, et :
  - Le nombre de visites en $o$ est comparable au nombre de visites dans $C(\omega)$
  - Le nombre de visites à $o$ dans $C(\omega)$ est de l'ordre de $1/\Sigma$ où $\Sigma = \sum_{e\in\partial_E C(\omega)} \omega_e$

On se place dans ce cas dorénavant.

# Passage au quotient

On note $\widetilde{G}$ le graphe quotient de $G$ obtenu en contractant $C(\omega)$ en un point $\widetilde{o}$. On le munit de l'environnement quotient $\widetilde{\omega}$ :

$$\text{si } e \in \partial_E C(\omega), \qquad \widetilde{\omega}_e = \frac{\omega_e}{\Sigma}.$$

Alors :

$$P_{o,\omega}(H_\partial < \widetilde{H}_o) \geq c\Sigma P_{\widetilde{o},\widetilde{\omega}}(H_\partial < \widetilde{H}_{\widetilde{o}}).$$

# Passage au quotient

On note $\widetilde{G}$ le graphe quotient de $G$ obtenu en contractant $C(\omega)$ en un point $\widetilde{o}$. On le munit de l'environnement quotient $\widetilde{\omega}$ :

$$\text{si } e \in \partial_E C(\omega), \qquad \widetilde{\omega}_e = \frac{\omega_e}{\Sigma}.$$

Alors :

$$P_{o,\omega}(H_\partial < \widetilde{H}_o) \geq c\Sigma P_{\widetilde{o},\widetilde{\omega}}(H_\partial < \widetilde{H}_{\widetilde{o}}).$$

Attention : sous $\mathbb{P}(\cdot|C(\omega))$, $\widetilde{\omega}$ n'est pas un environnement de Dirichlet.

# Réduction au cas Dirichlet

Pour un site, on a la propriété de restriction :

Si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, alors :

$$\left( \frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \right) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2)$$

et cette variable est indépendante de $\omega_1 + \omega_2$.

# Réduction au cas Dirichlet

Pour un site, on a la propriété de restriction :

Si $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, alors :

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_1 + \omega_2}, \frac{\omega_2}{\omega_1 + \omega_2}\right) \sim \mathcal{D}(\alpha_1, \alpha_2)$$

et cette variable est indépendante de $\omega_1 + \omega_2$.

Pour plusieurs sites, cette propriété s'adapte sous forme d'encadrement de la densité des lois des vecteurs $(\Sigma, (\widetilde{\omega}_e)_e)$, ce qui permet de se ramener au cas où $\widetilde{\omega}$ est de Dirichlet.

# Hypothèse d'induction

On montre alors :

## Théorème

Si $G$ a moins de $n$ arêtes, pour tous paramètres $\alpha_e > 0$, tout $o \in V$, il existe $C, r > 0$ tels que, pour $\varepsilon > 0$ assez petit,

$$\mathbb{P}(P_{o,\omega}(H_\partial < \widetilde{H}_o) \leq \varepsilon) \leq C\varepsilon^\beta(-\ln \varepsilon)^r,$$

où $\beta = \min\{\beta_A | A \text{ fortement connexe et } o \in \underline{A}\}$.

grâce au :

## Lemme

Si $P(X < \varepsilon) \leq C\varepsilon^{\alpha_X}$ et $P(Y < \varepsilon) \leq C'\varepsilon^{\alpha_Y}(-\ln \varepsilon)^r$, alors :

$$P(XY \leq \varepsilon) \leq C''\varepsilon^{\alpha_X \wedge \alpha_Y}(-\ln \varepsilon)^{r+1}$$

(ou $r$ si $\alpha_X \neq \alpha_Y$).

# Bilan

- On a obtenu l'encadrement plus précis :

$$\frac{c}{t^{\min_A \beta_A}} \leq \mathbb{P}(G^\omega(o,o) > t) \leq C\frac{(\ln t)^r}{t^{\min_A \beta_A}}.$$

- Rôle de l'hypothèse "Dirichlet" : queue de la distribution, et presque-additivité

# Corollaires

## Proposition

Dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, la condition d'intégrabilité de $G_U^\omega(o, o)$ est :

$$\text{pour toute arête } e \in \mathcal{V} \text{ dans } U,\ 2\Sigma > \alpha_e + \alpha_{-e} + 1$$

où $\Sigma = \sum_{e \in \mathcal{V}} \alpha_e$.

# Corollaires

## Proposition

Dans le cas de $\mathbb{Z}^d$, la condition d'intégrabilité de $G_U^\omega(o,o)$ est :

$$\text{pour toute arête } e \in \mathcal{V} \text{ dans } U,\ 2\Sigma > \alpha_e + \alpha_{-e} + 1$$

où $\Sigma = \sum_{e\in\mathcal{V}} \alpha_e$.

## Proposition

Pour un graphe $G = (V \cup \{\partial\})$ fortement connexe, et $(\alpha_e)_{e\in E}$ des réels >0, on a de façon équivalente :

- il existe $x \in V$ tel que $E_x[T_V] < \infty$ ;
- pour tout $x \in V$, $E_x[T_V] < \infty$ ;
- toute partie fortement connexe $A$ non vide, $\beta_A > 1$.

# Conclusion

- La loi de Dirichlet apparaît naturellement dans le contexte des marches linéairement renforcées par arêtes orientées.

# Conclusion

- La loi de Dirichlet apparaît naturellement dans le contexte des marches linéairement renforcées par arêtes orientées.
- La question de l'intégrabilité de $G^{\omega}(o, o)$ sous $\mathbb{P}$ se pose dans l'application du critère de Kalikow ; elle permet de montrer un critère de balisticité.

# Conclusion

- La loi de Dirichlet apparaît naturellement dans le contexte des marches linéairement renforcées par arêtes orientées.
- La question de l'intégrabilité de $G^{\omega}(o,o)$ sous $\mathbb{P}$ se pose dans l'application du critère de Kalikow ; elle permet de montrer un critère de balisticité.
- Le critère de non-intégrabilité fournit des cas où la marche a une vitesse nulle.

# Conclusion

- La loi de Dirichlet apparaît naturellement dans le contexte des marches linéairement renforcées par arêtes orientées.
- La question de l'intégrabilité de $G^\omega(o,o)$ sous $\mathbb{P}$ se pose dans l'application du critère de Kalikow ; elle permet de montrer un critère de balisticité.
- Le critère de non-intégrabilité fournit des cas où la marche a une vitesse nulle.
- Quid des cas intermédiaires ? (critère de balisticité non satisfait, et temps de sortie intégrables)

# Conclusion

- La loi de Dirichlet apparaît naturellement dans le contexte des marches linéairement renforcées par arêtes orientées.
- La question de l'intégrabilité de $G^{\omega}(o, o)$ sous $\mathbb{P}$ se pose dans l'application du critère de Kalikow ; elle permet de montrer un critère de balisticité.
- Le critère de non-intégrabilité fournit des cas où la marche a une vitesse nulle.
- Quid des cas intermédiaires ? (critère de balisticité non satisfait, et temps de sortie intégrables)
- Quid de la transience dans une direction lorsque la vitesse est nulle ?