

Percolation sur les graphes de Cayley

François Rousseau et Laurent Tournier

Sujet proposé par Philippe Marchal

Introduction

Étant donné un graphe, une percolation sur ce graphe consiste à supprimer certaines de ses arêtes de façon aléatoire, selon une certaine loi de probabilité. On s'intéresse alors aux propriétés du sous-graphe ainsi obtenu, et en particulier à l'existence éventuelle de composantes connexes infinies dans celui-ci.

Introduite à partir des années 1950 par Hammersley et Broadbent, l'étude mathématique de la percolation répond à de nombreuses préoccupations physiques. Son intérêt premier était de prévoir si le pétrole pouvait s'écouler à travers des roches poreuses. Lorsque de l'eau s'infiltré lentement dans le milieu poreux, les forces capillaires dominent les forces de viscosité dans les passages les plus étroits. Le déplacement se représente donc comme une suite de mouvements discrets (correspondant aux cavités successives) dans lesquels l'eau repousse le pétrole. Mais le phénomène de percolation se retrouve partout : la propagation d'un feu, d'une épidémie, du courant électrique.

Dans ces applications pratiques, le graphe sous-jacent utilisé dans la modélisation est en général le réseau \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z}^3 , ce qui explique que l'étude de la percolation s'est longtemps concentrée sur le cas de ces graphes-ci, et commence à être bien comprise. Cependant, rien n'empêche de considérer des graphes plus généraux, tels des arbres par exemple. L'objet de cet exposé est d'introduire une certaine classe de graphes pour lesquels la percolation admet de bonnes propriétés, les graphes de Cayley, et de montrer quelques résultats généraux de la percolation sur ces graphes.

Pour leur majorité, les résultats et conjectures énoncés, bien qu'ayant pour certains des preuves adaptées du cas de \mathbb{Z}^d , sont postérieurs aux années 1990.

Table des matières

1	Introduction : définitions, premières propriétés	3
1.1	Graphes de Cayley	3
1.1.1	Quelques définitions élémentaires	3
1.1.2	Graphes de Cayley, moyennabilité	4
1.2	Percolation	7
2	Existence de la transition de phase	8
2.1	Minoration de $p_c(G)$	8
2.2	Est-ce que $p_c(G) < 1$?	8
3	Propriétés générales de la percolation	10
3.1	Invariance par les automorphismes	10
3.2	Tolérance d'insertion et de suppression	10
3.3	Ergodicité de \mathbb{P}_p	11
3.4	Transport de masse	12
4	Nombre de composantes connexes infinies	13
4.1	Résultat général pour les graphes transitifs	13
4.2	Cas des graphes moyennables	13
4.3	Percolation invasive	16
5	Percolation critique sur le graphe de Cayley d'un groupe non moyennable	17

1 Introduction : définitions, premières propriétés

1.1 Graphes de Cayley

1.1.1 Quelques définitions élémentaires

Rappelons d'abord rapidement quelques définitions de théorie des graphes, de façon à fixer le vocabulaire et les notations.

Un **graphe** (non orienté) G est un couple (V, E) , où E est un ensemble de paires de points de V . V est appelé l'ensemble des **sommets** de G et E celui de ses **arêtes**. On dit que $x, y \in V$ sont **voisins** dans G , et on note $x \sim_G y$ (ou $x \sim y$), si $\{x, y\} \in E$; le **degré** $\deg_G x$ d'un sommet x est son nombre de voisins dans G . x et y sont **reliés** dans G , ce qui est noté $x \leftrightarrow_G y$, s'il existe une suite $x = x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ de sommets de G telle que, pour $i = 1, \dots, n-1$, $x_i \sim x_{i+1}$. Lorsque tous les couples de sommets de G sont reliés, G est dit **connexe**. Les **composantes connexes** d'un graphe G sont les classes d'équivalence de sommets pour la relation \leftrightarrow_G ; si $x \in V$, la composante connexe de x est notée $K_G(x)$. Si x et y sont deux sommets de G reliés entre eux, la **distance** $d_G(x, y)$ entre x et y est la longueur n de la plus courte suite $x = x_1, \dots, x_n = y$ avec $x_i \sim x_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, n-1$.

Un **sous-graphe** de $G = (V, E)$ est un graphe (V', E') où $V' \subset V$ et $E' = \{\{x, y\} \in E \mid x, y \in V'\}$. La donnée d'un sous-graphe équivaut donc à celle de ses sommets ou de ses arêtes.

Un **morphisme de graphes** de $G = (V, E)$ dans $G' = (V', E')$ est une application $f : V \rightarrow V'$ telle que, pour tous $x, y \in V$, $x \sim_G y$ implique $f(x) \sim_{G'} f(y)$. Un **isomorphisme de graphes** est un morphisme de graphes bijectif dont l'application réciproque est également un morphisme de graphes, et on parle d'**automorphisme de graphes** lorsque les graphes de départ et d'arrivée sont les mêmes. Remarquons qu'un isomorphisme de graphes induit naturellement une bijection $E \rightarrow E'$ que l'on notera de la même manière. Un graphe $G = (V, E)$ est **transitif** si le groupe de ses automorphismes agit transitivement sur ses sommets.

Un **cycle** dans un graphe G est une suite x_1, \dots, x_n de sommets distincts de G , avec $n \geq 3$, telle que, pour $i = 1, \dots, n-1$, $x_i \sim x_{i+1}$, et $x_n \sim x_1$. Un **arbre** est un graphe connexe et sans cycle.

Un **arbre couvrant** d'un graphe G est un sous-graphe T de G qui est un arbre et qui contient tous les sommets de G . Une **forêt couvrante** d'un graphe G est un sous-graphe F de G sans cycle (c'est donc une réunion disjointe d'arbres) et qui contient tous les sommets de G .

Le comportement de la percolation étant plus simple sur les arbres, on utilisera à plusieurs reprises la proposition suivante pour s'y ramener :

PROPOSITION 1. – Tout graphe connexe admet un arbre couvrant.

DÉMONSTRATION. Soit $G = (V, E)$ un graphe.

On choisit un sommet o de G , et on définit par récurrence une suite croissante $(T_n)_{n \geq 0}$ de sous-graphes de G connexes sans cycle telle que, pour tout n , les sommets de T_n sont ceux de G à distance $\leq n$ de o : $T_0 = \{o\}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_{n+1} s'obtient en ajoutant à T_n une arête par sommet à distance $n+1$ de o . On note alors $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Par construction, T contient tous les sommets et n'a pas de cycle : T est un arbre couvrant. \square

1.1.2 Graphes de Cayley, moyennabilité

Nous en arrivons à la définition d'une moitié du titre :

DÉFINITION. – Soit Γ un groupe engendré par un ensemble fini S . Le **graphe de Cayley** de Γ relativement à l'ensemble de générateurs S est le graphe $G = (\Gamma, E)$ où :

$$E = \{\{x, y\} \mid \text{il existe } s \in S \text{ tel que } y = sx\}.$$

REMARQUES.

- Comme le graphe n'est pas orienté, on peut supposer S stable par passage à l'inverse.
- Le fait que S est fini implique que G est **localement fini** : pour tout sommet $x \in V$, l'ensemble $\{y \in V \mid x \sim y\}$ de ses voisins est fini, et même ici de cardinal constant.
- On a ici défini les graphes de Cayley à gauche : les arêtes correspondent à des multiplications à gauche. Cette restriction n'a pas d'importance puisque les graphes de Cayley à gauche et à droite d'un même groupe relativement au même ensemble de générateurs sont isomorphes *via* l'application de passage à l'inverse.

PROPOSITION 2. – Tout graphe de Cayley est transitif.

DÉMONSTRATION. Soit G un graphe de Cayley d'un groupe Γ . Pour tous $x, y \in \Gamma$, on vérifie immédiatement que l'application $g \mapsto gx^{-1}y$ est un automorphisme de graphes qui envoie x sur y , d'où la proposition. \square

Cette proposition élémentaire montre que les graphes de Cayley possèdent de fortes propriétés de symétrie : ils demeurent identiques vus de n'importe quel sommet. La figure 1 illustre quelques exemples de graphes de Cayley de groupes donnés par des **présentations** notées sous la forme $\langle S \mid R \rangle$, où l'ensemble S est celui des générateurs, et R est un ensemble de combinaisons entre ces générateurs que l'on fixe égales à l'élément neutre, définissant ainsi des relations qui permettent de décrire le groupe. (Formellement, le groupe ainsi défini est le quotient du groupe libre engendré par les éléments de S par le sous-groupe distingué engendré par R) Dans les exemples, le symbole $*$ désigne le produit libre de groupes.

DÉFINITION. – Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour toute partie finie K de V , on note :

$$\begin{aligned} \partial_E K &= \{\{x, y\} \in E \mid x \notin K, y \in K\}, \\ \partial_V K &= \{y \notin K \mid \text{il existe } x \in K \text{ avec } x \sim y\}. \end{aligned}$$

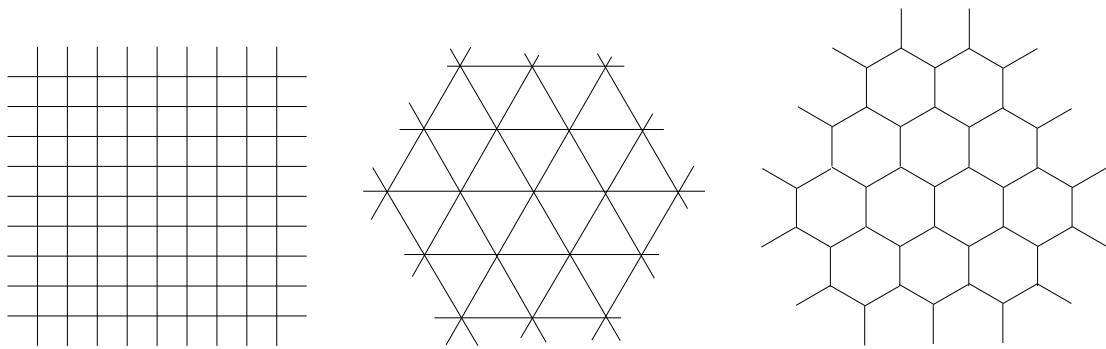
On définit alors les **constantes isopérimétriques** $\iota_E(G)$ et $\iota_V(G)$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \iota_E(G) &= \inf \left\{ \frac{|\partial_E K|}{|K|} \mid K \subset V \text{ fini non vide} \right\}, \\ \iota_V(G) &= \inf \left\{ \frac{|\partial_V K|}{|K|} \mid K \subset V \text{ fini non vide} \right\}. \end{aligned}$$

Si $\iota_E(G) = 0$, G est dit **moyennable**, et **non-moyennable** sinon.

REMARQUE. Pour un graphe dont le degré des sommets est borné, comme c'est le cas pour un graphe transitif (dont le degré des sommets est même constant), et donc pour un graphe de Cayley par exemple, il est immédiat que $\iota_E(G) = 0$ si, et seulement si $\iota_V(G) = 0$.

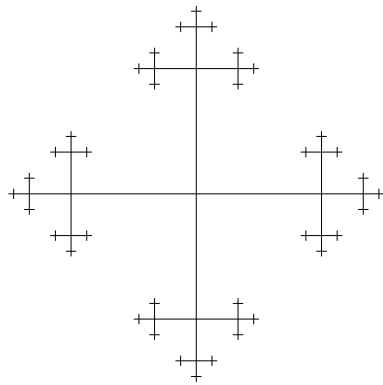
La propriété de moyennabilité d'un graphe est essentielle pour caractériser le comportement de la percolation, comme on le verra dans les sections 4 et 5. Intuitivement, un graphe moyennable est un



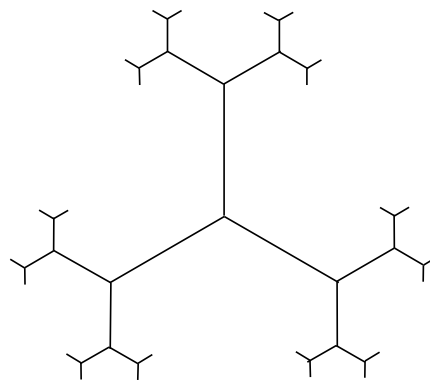
(a) \mathbb{Z}^2 engendré par $(0, 1)$ et $(1, 0)$, $\langle a, b \mid aba^{-1}b^{-1} \rangle$

(b) \mathbb{Z}^2 engendré par $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$, $\langle a, b, c \mid aba^{-1}b^{-1}, abc^{-1} \rangle$

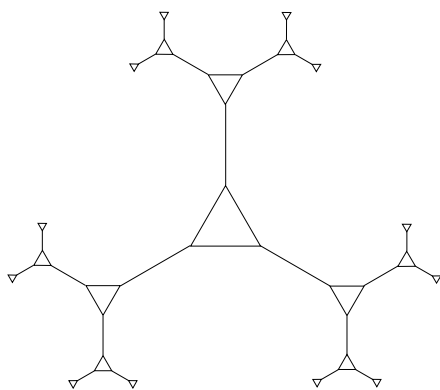
(c) $\langle a, b, c \mid a^2, b^2, c^2, (abc)^2 \rangle$



(d) $F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} = \langle a, b \mid \rangle$



(e) $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} * \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * \mathbb{Z}$



(f) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) * (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) = \langle a, b \mid a^2, b^3 \rangle$

(g) $\langle a, b, c, d, e \mid a^2, b^2, c^2, d^2, e^2, abcde \rangle$

FIG. 1 – Quelques exemples de graphes de Cayley.

graphe où on pourra trouver des parties pour lesquelles certains «effets de bords» seront négligeables. Un exemple typique de graphe non moyennable est celui d'un arbre infini. Et on vérifie aisément que le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 pour les générateurs standards est moyennable. En réalité, le choix des générateurs n'a pas d'importance :

THÉORÈME 3. – Soit Γ un groupe finiment engendré. Si un graphe de Cayley de Γ est moyennable, alors il en est de même de tous les autres. Autrement dit, la moyennabilité est une propriété intrinsèque du groupe.

DÉMONSTRATION. On suppose qu'il existe un graphe de Cayley $G = (\Gamma, E)$ de Γ moyennable. On a donc $\iota_V(G) = 0$, c'est à dire que l'on peut trouver une suite $(B_n)_n$ de parties finies non vides de Γ telle que :

$$\lim_n \frac{|\partial_V B_n|}{|B_n|} = 0.$$

Soit maintenant un ensemble fini quelconque $S' = \{a'_1, \dots, a'_q\}$ engendrant Γ . S' définit un nouveau graphe de Cayley $G' = (\Gamma, E')$, dans lequel le bord d'une partie sera noté avec le symbole ∂'_V . Posons $d = \max_{1 \leq i \leq q} d(a'_i, e)$, où $d(\cdot, \cdot)$ désigne la distance dans le graphe G et e l'élément neutre de Γ . Soit B une partie finie non vide de Γ . Pour tout $x \in \partial'_V B$, $x \notin B$ et il existe $i \in \{1, \dots, q\}$ et $y \in B$ tels que $x = a'_i y$, d'où $d(x, y) = d(a'_i, e) \leq d$. En notant p le cardinal d'une partie génératrice correspondant au graphe G , on a donc :

$$|\partial'_V B| \leq (2p)^{d-1} |\partial_V B|$$

en écrivant qu'un élément $x \notin B$ à distance $\leq d$ de B est produit d'un élément de $\partial_V B$ et de moins de $d - 1$ générateurs (ou de leurs inverses). Appliquant ceci à la suite $(B_n)_n$, on obtient :

$$\frac{|\partial'_V B_n|}{|B_n|} \leq (2p)^{d-1} \frac{|\partial_V B_n|}{|B_n|} \xrightarrow[n]{} 0,$$

ce qui montre que G' est moyennable. \square

Ceci justifie l'énoncé du théorème suivant :

THÉORÈME 4. – Tout groupe abélien finiment engendré est moyennable.

DÉMONSTRATION. Soit Γ un tel groupe. Γ s'écrit donc à isomorphisme près sous la forme $\mathbb{Z}^d \times \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}/d_i \mathbb{Z}$; on considère l'ensemble naturel de générateurs $S = \{(1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)\}$ associé à cette écriture, qui définit un graphe G . On introduit alors la suite des «cubes» $(C_N)_{N \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$C_N = \{(z_1, \dots, z_d, a_1, \dots, a_n) \in \Gamma \mid |z_1| \leq N, \dots, |z_d| \leq N\}.$$

En posant $p = d_1 \cdots d_n$, on a : $|C_N| = (2N + 1)^d p$, et on remarque facilement que :

$$\partial_V C_N = \{(z_1, \dots, z_d, a_1, \dots, a_n) \in \Gamma \mid \text{il existe } i \in \{1, \dots, d\} \text{ tel que } |z_i| = N+1 \text{ et, pour } j \neq i, |z_j| \leq N\},$$

d'où $|\partial_V C_N| = 2d(2N + 1)^{d-1} p$. Ainsi,

$$\frac{|\partial_V C_N|}{|C_N|} = \frac{2d(2N + 1)^{d-1} p}{(2N + 1)^d p} \xrightarrow[N]{} 0,$$

ce qui montre que G est moyennable. \square

1.2 Percolation

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe localement fini. On formalise ici la notion de sous-graphe aléatoire de G , avant de s'intéresser aux propriétés du sous-graphe obtenu.

DÉFINITION. – Un **processus de percolation** sur G est une variable aléatoire ω à valeurs dans l'ensemble $\Omega = 2^E$ muni de sa tribu produit \mathcal{B} .

REMARQUE. On parle dans ce cas-ci de percolation de *liens*; on peut aussi définir des processus de percolation de *sites* (variable aléatoire sur 2^V) ou encore de percolation *mixte* (sur $2^{E \cup V}$).

Sauf mention contraire, la lettre ω désignera désormais un processus de percolation dont la loi est la probabilité considérée dans le contexte. De plus, pour toute arête $e \in E$, on note $\omega(e) = \mathbf{1}_{\{e \in \omega\}}$.

Par définition de la tribu produit sur 2^E , les événements $\{e \in \omega\}$ sont mesurables pour toute arête $e \in E$, donc il en va de même des $\{x \sim_\omega y\}$ pour $x, y \in V$, puis des $\{x \leftrightarrow_\omega y\}$. Enfin, l'événement :

$$\{|K_\omega(x)| = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{\text{il existe } y \text{ à distance } n \text{ de } x \text{ tel que } y \leftrightarrow_\omega x\}$$

est mesurable, donc $\{\omega \text{ possède une composante connexe infinie}\}$ aussi.

L'exemple fondamental est celui de la **percolation de Bernoulli** sur les liens avec paramètre de survie $p \in [0, 1]$: il s'agit du cas où ω suit la loi $\mathbb{P}_p = \bigotimes_{e \in E} \mu_p$, où μ_p est la probabilité de Bernoulli sur $\{0, 1\}$ de paramètre p (i.e. $\mu_p(1) = 1 - \mu_p(0) = p$). Autrement dit, ω est obtenue en conservant *indépendamment* les arêtes de G avec une probabilité p .

Dans la suite, G désigne un graphe transitif connexe infini, et o un sommet de G . On définit, pour $0 \leq p \leq 1$, $\theta_p(G) = \mathbb{P}_p(|K_\omega(o)| = \infty)$. Clairement, $\theta_0(G) = 0$ et $\theta_1(G) = 1$. Par l'hypothèse de transitivité de G , $\theta_p(G)$ est de plus indépendant du choix de o .

PROPOSITION 5. – La fonction $p \mapsto \theta_p(G)$ est croissante.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer cette proposition, il faut réaliser un «couplage» des processus de percolation pour deux probabilités différentes. Considérons pour cela une variable aléatoire U sur $[0, 1]^E$ de loi $\mathbb{P} = \bigotimes_{e \in E} \mu$, où μ est la loi uniforme sur $[0, 1]$. Pour tout $p \in [0, 1]$, on définit une variable aléatoire ω_p sur 2^E (autrement dit, un processus de percolation sur G) par :

$$\text{pour tout } e \in E, \quad \omega_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{si } U(e) \leq p \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il résulte de la loi de U que ω_p suit la loi \mathbb{P}_p .

Soit $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$. On a l'inclusion immédiate : $\omega_{p_1} \subset \omega_{p_2}$, donc :

$$\mathbb{P}(|K_{\omega_{p_1}} o| = \infty) \leq \mathbb{P}(|K_{\omega_{p_2}} o| = \infty).$$

Or, compte-tenu des lois de ω_{p_1} et ω_{p_2} , ceci s'écrit : $\theta_{p_1}(G) \leq \theta_{p_2}(G)$, ce qui démontre la proposition. \square

DÉFINITION. – La **probabilité critique** du graphe G est : $p_c(G) = \inf \{p \in [0, 1] \mid \theta_p(G) > 0\}$.

THÉORÈME 6. – Pour tout $p \in [0, 1]$, $\mathbb{P}_p(\omega \text{ possède une composante connexe infinie}) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c(G) \\ 1 & \text{si } p > p_c(G) \end{cases}$.

DÉMONSTRATION. Notons A l'événement $\{\omega \text{ possède une composante connexe infinie}\}$. Comme la réalisation de A ne dépend pas d'un nombre fini des $\omega(e)$ où $e \in E$ et que ces variables aléatoires sont indépendantes, il résulte de la loi du 0-1 de Kolmogorov que $\mathbb{P}_p(A) \in \{0, 1\}$ quel que soit p .

Si $p < p_c(G)$, alors $\mathbb{P}_p(A) \leq \sum_{x \in V} \mathbb{P}_p(|K_\omega(x)| = \infty) = 0$. Maintenant, si $p > p_c(G)$, alors $\mathbb{P}_p(A) \geq \mathbb{P}_p(|K_\omega(o)| = \infty) > 0$ donc $\mathbb{P}_p(A) = 1$ *via* ce qui précède. \square

2 Existence de la transition de phase

Le point de départ de l'étude de la percolation a été le fait que $0 < p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$: le phénomène de percolation présente une «transition de phase», c'est à dire un changement brutal de comportement. L'objet de cette section est de montrer que, dans une grande généralité, cette propriété reste vraie pour les graphes de Cayley.

2.1 Minoration de $p_c(G)$

Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe localement fini, et $o \in V$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C_n(G)$ le nombre de chemins dans G de longueur n partant de o . La **constante de connectivité du graphe** se définit par :

$$\lambda(G) = \limsup_n C_n(G)^{1/n}.$$

THÉORÈME 7. – On a : $p_c(G) \geq \frac{1}{\lambda(G)}$.

DÉMONSTRATION. Soit $p \in [0, 1]$. On a $\{|K_\omega(o)| = \infty\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{C_n(\omega) \geq 1\}$, d'où :

$$\mathbb{P}_p(|K_\omega(o)| = \infty) = \lim_n \mathbb{P}_p(C_n(\omega) \geq 1).$$

Or, pour $n \geq 0$, $\mathbb{P}_p(C_n(\omega) \geq 1) \leq \mathbb{E}_p[C_n(\omega)] = C_n(G)p^n$, donc $\mathbb{P}_p(|K_\omega(o)| = \infty) = 0$ dès que l'on a $p < \liminf_n (C_n(G))^{-1/n}$, ce qui fournit le résultat. \square

Si les sommets de G sont de degré majoré par un entier d , ce qui est le cas pour les graphes de Cayley, alors pour tout $n \geq 1$ on a $C_n(G) \leq d(d-1)^{n-1}$, donc $\lambda(G) \leq d-1$. Le théorème précédent donne donc :

$$p_c(G) \geq \frac{1}{d-1} > 0.$$

2.2 Est-ce que $p_c(G) < 1$?

Cette inégalité est bien moins simple que la précédente. On remarque d'abord qu'on ne peut pas espérer avoir $p_c(G) < 1$ pour n'importe quel graphe de Cayley G , étant donné que $p_c(\mathbb{Z}) = 1$. Cependant, en admettant le fait que la propriété $p_c(G) < 1$ est indépendante du choix des générateurs, on a :

CONJECTURE. – Si G est un groupe transitif à croissance au moins quadratique (ce qui signifie que le cardinal d'une boule de rayon n est minoré par une fonction quadratique de n), alors $p_c(G) < 1$.

Cette conjecture hautement probable a déjà été vérifiée pour les groupes à croissance au plus polynomiale, pour ceux à croissance exponentielle, et pour les quelques groupes à «croissance intermédiaire» connus. Nous allons ici nous contenter de traiter quelques exemples classiques.

PROPOSITION 8. – Soit $d \geq 2$. On a $p_c(\mathbb{Z}^d) < 1$.

DÉMONSTRATION. Comme \mathbb{Z}^d contient une copie de \mathbb{Z}^2 , il suffit de faire la preuve pour $d = 2$.

Notons $\mathbb{L} = (V, E)$ le graphe de \mathbb{Z}^2 pour les générateurs usuels $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Comme ce graphe est plan, on peut introduire son graphe dual $\mathbb{L}^\dagger = (V^\dagger, E^\dagger)$, qui lui est isomorphe (en fait, le graphe dual \mathbb{L}^\dagger s'obtient ici simplement en translatant \mathbb{L} de $(1/2, 1/2)$ dans \mathbb{R}^2).

Soit $p \in [0, 1]$. On note ω une variable aléatoire sur 2^E de loi \mathbb{P}_p . On définit alors la variable aléatoire ω^\times à valeurs dans 2^{E^\dagger} comme étant (p.s.) le complémentaire du dual de ω : les arêtes de ω^\times sont celles

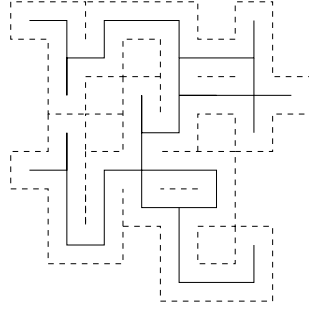


FIG. 2 – Toute composante finie de ω (en traits pleins) est entourée par un cycle de ω^\times (en pointillés).

qui ne coupent pas une arête de ω . Il est immédiat que ω^\times suit la loi \mathbb{P}_{1-p} . On remarque de plus que si $K_\omega(o)$ est finie, alors il existe dans ω^\times un cycle entourant o (voir figure 2). Or on peut majorer (très largement) par $n3^n$ le nombre de cycles de longueur n entourant o , étant donné qu'un tel cycle passe par l'un des n points $(1/2, 0), (3/2, 0), \dots, (n - 1/2, 0)$ puis comporte n arêtes choisies à chaque fois selon 3 directions possibles. Ainsi on a :

$$1 - \theta_p(\mathbb{L}) = \mathbb{P}_p(|K_\omega(o)| < \infty) \leq \sum_n (1-p)^n \times n3^n.$$

Pour p assez proche de 1, cette somme peut être rendue strictement inférieure à 1, et on a alors $\theta_p(\mathbb{L}) > 0$, ce qui conclut. \square

On s'intéresse maintenant au cas des arbres. Les arbres qui sont des graphes de Cayley de groupes sont les **arbres réguliers**, c'est à dire dont tous les sommets ont même degré (voir par exemple figures 1(d) et 1(e)). Pour $d \in \mathbb{N}^*$, l'arbre régulier de degré d est en effet le graphe de Cayley du groupe produit libre de d copies de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, avec les générateurs naturellement associés. On désigne aussi ces arbres par les noms de «réseau de Bethe» ou d'«arbre de Cayley infini».

PROPOSITION 9. – Soit T un arbre régulier de degré $d \geq 3$. On a $p_c(T) = \frac{1}{d-1}$, et il n'y a pas de composante connexe infinie $\mathbb{P}_{p_c(T)}$ -presque sûrement.

DÉMONSTRATION. On choisit un sommet o de T . Soit $p \in]0, 1[$. On note ω une percolation sur T , de loi \mathbb{P}_p . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, désignons par p_n la probabilité qu'il existe dans ω un chemin de longueur $\geq n$ issu de o . On a facilement $p_1 = 1 - (1-p)^d$ et, si $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 1 - (1 - p \cdot p_n)^{d-1} = f(p_n),$$

où $f : t \mapsto 1 - (1 - p \cdot t)^{d-1}$. Cette fonction f vérifie $f(0) = 0$, $f(1) = 1 - (1-p)^{d-1} < p_1 < 1$, est strictement croissante et strictement concave sur $[0, 1]$, et on a $f'(0) = p(d-1)$. De ceci résulte que :

- si $p(d-1) \leq 1$, $(p_n)_{n \geq 1}$ décroît vers l'unique point fixe 0 de f ;
- si $p(d-1) > 1$, f admet un point fixe $\alpha \in]0, 1[$ (en plus de 0), avec $\alpha < p_1$, donc la suite $(p_n)_{n \geq 1}$ décroît vers α .

Comme la limite de la suite $(p_n)_n$ est $\mathbb{P}_p(|K_\omega(o)| = \infty) = \theta_p(T)$, le résultat en découle. \square

REMARQUE. On verra dans la section 5 que la seconde partie de la proposition précédente est un fait général pour les graphes de Cayley non moyennables.

Enfin, la remarque suivant le théorème 23 de la partie 5 montre que :

PROPOSITION 10. – Pour tout graphe de Cayley G non moyennable, $p_c(G) \leq 1 - \frac{\iota_E(G)}{d_G} < 1$.

3 Propriétés générales de la percolation

3.1 Invariance par les automorphismes

DÉFINITION. – Soit $G = (V, E)$ un graphe; on note $\text{Aut } G$ le groupe de ses automorphismes. Soit Γ un sous-groupe de $\text{Aut } G$. Une probabilité P sur 2^E est Γ -invariante si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $A \in \mathcal{B}$, $P(\gamma A) = P(A)$.¹

PROPOSITION 11. – Pour tout $p \in [0, 1]$, \mathbb{P}_p est $(\text{Aut } G)$ -invariante.

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma \in \text{Aut } G$. On considère $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} \mid \mathbb{P}_p(\gamma A) = \mathbb{P}_p(A)\}$. \mathcal{C} est une tribu (ceci résulte de ce que γ est un automorphisme), contenant les cylindres élémentaires (par la définition de \mathbb{P}_p), donc $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. \square

3.2 Tolérance d'insertion et de suppression

Soit $G = (V, E)$ un graphe dénombrable; 2^E est muni de sa tribu produit \mathcal{B} . Soit $\omega \in 2^E$ une configuration. Pour tout $e \in E$, on note :

$$\Pi_e \omega = \omega \cup \{e\} \quad \text{et} \quad \Pi_{-e} \omega = \omega \setminus \{e\}.$$

Cette notation s'étend aux parties finies $F = \{e_1, \dots, e_n\}$ de E :

$$\Pi_F \omega = \Pi_{e_1} \cdots \Pi_{e_n} \omega = \omega \cup F \quad \text{et} \quad \Pi_{-F} \omega = \Pi_{-e_1} \cdots \Pi_{-e_n} \omega = \omega \setminus F.$$

Pour tout événement $A \in \mathcal{B}$, on peut donc considérer les images directes $\Pi_e A$, $\Pi_{-e} A$ si $e \in E$, et $\Pi_F A$, $\Pi_{-F} A$ si F est une partie finie de E .

PROPOSITION 12. – Pour tout événement A et toute arête e , $\Pi_e A$ et $\Pi_{-e} A$ sont des événements.

DÉMONSTRATION. On raisonne dans le cas de Π_e . On constate que

$$\Pi_e(A) = \{e \in \omega\} \cap (A \cup \Pi_{-e}^{-1}(A)),$$

et que Π_{-e} est une application mesurable puisque ses applications composantes le sont : l'application composante d'indice e est constante en 1, et les autres sont l'identité. \square

DÉFINITION. – Une probabilité P sur 2^E **tolère l'insertion** (resp. **la suppression**) si, pour tout $A \in \mathcal{B}$ et $e \in E$, $P(A) > 0$ implique $P(\Pi_e A) > 0$ (resp. $P(\Pi_{-e} A) > 0$).

Il résulte de la proposition suivante que, pour $0 < p < 1$, \mathbb{P}_p tolère l'insertion et la suppression :

PROPOSITION 13. – Soit $p \in [0, 1]$. Pour tout événement A , et tout $e \in E$, on a :

$$\mathbb{P}_p(\Pi_e A) \geq p \mathbb{P}_p(A) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_p(\Pi_{-e} A) \geq (1 - p) \mathbb{P}_p(A).$$

DÉMONSTRATION. Soit $A \in \mathcal{B}$ et $e \in E$. On pose $A' = \Pi_e A \cup \Pi_{-e} A$. Clairement, $A \subset A'$ et on a $\Pi_e A = \{e \in \omega\} \cap A'$ et $\Pi_{-e} A = \{e \notin \omega\} \cap A'$. De plus, on remarque que A' est indépendante de $\{e \in \omega\}$ (pour tout $\omega \in A'$, les configurations $\Pi_e \omega = \omega \cup \{e\}$ et $\Pi_{-e} \omega = \omega \setminus \{e\}$ sont toutes deux dans A' , si bien que la fonction indicatrice de l'événement A' ne dépend que des $\omega(e')$ où $e' \neq e$, qui sont indépendants de $\omega(e)$), d'où : $\mathbb{P}_p(\Pi_e(A)) = p \mathbb{P}_p(A') \geq p \mathbb{P}_p(A)$ et de même pour $\Pi_{-e} A$. \square

¹On rappelle qu'un automorphisme γ de G , défini *a priori* comme une bijection $V \rightarrow V$, induit également une bijection sur les arêtes, par $\gamma(\{x, y\}) = \{\gamma(x), \gamma(y)\}$, et on vérifie aisément que, pour tout $A \in \mathcal{B}$, $\gamma A \in \mathcal{B}$.

3.3 Ergodicité de \mathbb{P}_p

On aura besoin du lemme suivant :

LEMME 14. – Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ pour tout $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_\infty = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{F}_n$. Si A est un événement de \mathcal{F}_∞ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ et $B \in \mathcal{F}_{n_0}$ tels que $P(A \Delta B) < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION. Soit $A \in \mathcal{F}_\infty$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq 1$, on définit :

$$T_n = E[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n].$$

Comme la fonction $\mathbf{1}_A$ est dans L^1 , le théorème de convergence des martingales montre que la suite $(T_n)_{n \geq 1}$ converge p.s. et dans L^1 vers $E[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_\infty] = \mathbf{1}_A$. En particulier, elle converge en probabilité, donc il existe $n_0 \geq 1$ tel que $P(|T_{n_0} - \mathbf{1}_A| < \eta) > 1 - \varepsilon$, où on a choisi $\eta \in]0, 1/2[$. Notons C l'événement $\{|T_{n_0} - \mathbf{1}_A| < \eta\}$, et $B = \{T_{n_0} \geq 1/2\}$. On constate que si C est réalisé, alors, comme $0 < \eta < 1/2$ et $\mathbf{1}_A \in \{0, 1\}$, la valeur de T_{n_0} détermine celle de $\mathbf{1}_A$:

$$B \cap C \subset A \text{ et } B^c \cap C \subset A^c$$

d'où l'on déduit :

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (B \cup C^c) \setminus (B \cap C).$$

Or, comme $C = (B^c \cap C) \cup (B \cap C)$, on a

$$C^c = (B^c \cap C)^c \cap (B \cap C)^c = (B^c \cap C)^c \setminus (B \cap C) = (B \cup C^c) \setminus (B \cap C),$$

d'où $P(A \Delta B) \leq 1 - P(C) < \varepsilon$. \square

DÉFINITION. – Soit $G = (V, E)$ un graphe dénombrable, Γ un sous-groupe de $\text{Aut}(G)$. On note \mathcal{B}_Γ la tribu des événements invariants par l'action de Γ . Une probabilité P sur 2^E est dite Γ -ergodique si, pour tout $A \in \mathcal{B}_\Gamma$, $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

THÉORÈME 15. – Si G est localement fini et transitif, et que les orbites sous l'action de Γ sont infinies, alors \mathbb{P}_p est Γ -ergodique.

DÉMONSTRATION. Soit $A \in \mathcal{B}_\Gamma$. Soit $\varepsilon > 0$. Le lemme fournit un événement $B \in \mathcal{B}$ qui ne dépend que des $\omega(e)$ pour e dans un ensemble fini F et tel que $\mathbb{P}_p(A \Delta B) < \varepsilon$. Les orbites étant infinies, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $F \cap \gamma F = \emptyset$. Ainsi, B et γB sont indépendants. De plus, par l'invariance de \mathbb{P}_p , on a $\mathbb{P}_p(\gamma A \Delta \gamma B) = \mathbb{P}_p(\gamma(A \Delta B)) = \mathbb{P}_p(A \Delta B) < \varepsilon$.

Enfin, pour tous $C_1, C_2, D \in \mathcal{B}$, on a $\mathbb{P}_p((C_1 \cap D) \Delta (C_2 \cap D)) = \mathbb{P}_p(C_1 \cap D) + \mathbb{P}_p(C_2 \cap D) - 2\mathbb{P}_p(C_1 \cap C_2 \cap D)$, d'où l'inégalité : $|\mathbb{P}_p(C_1 \cap D) - \mathbb{P}_p(C_2 \cap D)| \leq \mathbb{P}_p((C_1 \cap D) \Delta (C_2 \cap D)) \leq \mathbb{P}_p(C_1 \Delta C_2)$.

Tout ceci justifie ce qui suit :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}_p(A) - \mathbb{P}_p(A)^2| &= |\mathbb{P}_p(A \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq |\mathbb{P}_p(A \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(B \cap \gamma A)| + |\mathbb{P}_p(B \cap \gamma A) - \mathbb{P}_p(B \cap \gamma B)| \\ &\quad + |\mathbb{P}_p(B \cap \gamma B) - \mathbb{P}_p(B)^2| + |\mathbb{P}_p(B)^2 - \mathbb{P}_p(A)^2| \\ &\leq \mathbb{P}_p(A \Delta B) + \mathbb{P}_p(\gamma A \Delta \gamma B) \\ &\quad + |\mathbb{P}_p(B)\mathbb{P}_p(\gamma B) - \mathbb{P}_p(B)^2| + |\mathbb{P}_p(B) - \mathbb{P}_p(A)|(\mathbb{P}_p(B) + \mathbb{P}_p(A)) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + 0 + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbb{P}_p(A) = \mathbb{P}_p(A)^2$ d'où la conclusion. \square

3.4 Transport de masse

On s'intéresse ici spécifiquement à un *graphe de Cayley* $G = (\Gamma, E)$.

DÉFINITION. – Soit f une application $\Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$. f est **diagonalement invariante** si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $(x, y) \in \Gamma^2$, $f(\gamma x, \gamma y) = f(x, y)$.

La propriété élémentaire suivante sera utilisée à de multiples reprises dans la suite :

THÉORÈME 16. – PRINCIPE DU TRANSPORT DE MASSE.

Soit f une application diagonalement invariante. Pour tout $x \in \Gamma$, on a :

$$\sum_{y \in \Gamma} f(x, y) = \sum_{z \in \Gamma} f(z, x).$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire $f(x, y) = f(xy^{-1}x, x)$ et de voir que $y \mapsto xy^{-1}x$ est une bijection de Γ sur Γ . \square

Le nom de cette propriété vient de l'interprétation suivante : $f(x, y)$ désigne une *masse* qui est déplacée dans le graphe de x vers y . Le principe énonce que si f est diagonalement invariante, alors la masse totale reçue en un point x est égale à celle qui en est issue : la masse s'est conservée.

Dans les applications à la percolation, f sera de la forme $E[F(x, y; \omega)]$ où $F : \Gamma^2 \times 2^E \rightarrow \mathbb{R}_+$ correspond à un transport de masse qui dépend de la configuration ω , c'est à dire que la conservation de la masse aura lieu *en moyenne*. Supposant que la probabilité P est invariante par le groupe des translations, l'hypothèse d'invariance diagonale est alors remplacée par :

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \Gamma^2 \text{ et tout } \gamma \in \Gamma, \text{ presque sûrement } F(\gamma x, \gamma y; \gamma \omega) = F(x, y; \omega).$$

(Le fait que f est alors diagonalement invariante est vrai si pour tous x, y , $F(x, y, \cdot)$ est une fonction indicatrice, par invariance de P , et le cas général s'en déduit par linéarité et théorème de convergence monotone)

Illustrons ce principe par un exemple relatif à la percolation.

DÉFINITION. – Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sommet x de G est une **multifurcation** si $K_G(x) \setminus \{x\}$ a au moins trois composantes connexes infinies.

Une multifurcation est donc un point de concours d'au moins trois branches infinies.

PROPOSITION 17. – Soit $G = (\Gamma, E)$ un graphe de Cayley, et P une probabilité invariante sur 2^E . P -presque sûrement, chaque composante connexe de ω a ou bien aucune multifurcation, ou bien une infinité.

DÉMONSTRATION. On définit l'application de transport de masse suivante :

$$F(x, y; \omega) = \begin{cases} 0 & \text{si } K_\omega(x) \text{ a } 0 \text{ ou une infinité de multifurcations} \\ \frac{1}{N} & \text{si } y \text{ est l'une des } N \text{ multifurcations de } K_\omega(x) \text{ et } 1 \leq N < \infty, \end{cases}$$

L'hypothèse d'invariance diagonale est bien satisfaite puisqu'un automorphisme ne modifie pas la géométrie des composantes connexes (elles sont juste «déplacées»). Par construction, la masse qui sort d'un sommet est toujours inférieure à 1. Par ailleurs, la masse entrant dans une multifurcation d'une composante connexe qui en a un nombre fini $N \geq 1$ est $+\infty$. Mais le principe du transport de masse montre qu'en moyenne la masse entrante et la masse sortante d'un sommet quelconque sont égales. Pour tout $x \in \Gamma$, la probabilité que x est une multifurcation d'une composante connexe qui en a un nombre fini $N \geq 1$ doit donc être nulle. Comme Γ est dénombrable, on obtient en sommant ces probabilités pour $x \in \Gamma$ que, P -p.s., il n'y a pas de telle composante connexe. \square

4 Nombre de composantes connexes infinies

On suppose dans cette section que ω est un processus de percolation dont la loi P tolère l'insertion et la suppression, et est invariante et ergodique pour l'action des automorphismes du graphe. En particulier, ce qui suit s'applique au cas usuel de la percolation de Bernoulli sur un graphe de Cayley.

4.1 Résultat général pour les graphes transitifs

PROPOSITION 18. – Si G est un graphe connexe transitif, alors le nombre de composantes connexes infinies de ω est constant p.s. (c'est à dire constant sur un événement de probabilité 1) et égal à 0, 1 ou ∞ .

DÉMONSTRATION. On note N_∞ le nombre de composantes connexes infinies de ω , et $\Gamma = \text{Aut}(G)$.

On constate que, pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, l'événement $\{N_\infty = k\}$ est Γ -invariant (un automorphisme de graphes envoie bijectivement composante connexe sur composante connexe), si bien que, P étant Γ -ergodique, $P(N_\infty = k) \in \{0, 1\}$. Il existe donc un $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tel que $N_\infty = k$ p.s. : N_∞ est donc constant presque sûrement.

Supposons que $k \in \{2, 3, \dots\}$. Alors (G étant dénombrable) il existe x et y tels que la probabilité que x et y appartiennent à des composantes connexes infinies distinctes est > 0 . On choisit un chemin d'arêtes (e_1, \dots, e_n) reliant x à y dans G . En notant A l'événement $\{x \text{ et } y \text{ sont dans des composantes connexes infinies distinctes}\}$ et $B = \prod_{\{e_1, \dots, e_n\}} A$, on a $P(B) > 0$ par tolérance d'insertion. Cependant, sur B , on a p.s. $N_\infty \leq k - 1 < k$ puisqu'on a relié deux composantes connexes infinies et que k est fini, ce qui contredit la constance presque sûre de N_∞ . Ainsi, $k = 0, 1$ ou ∞ . \square

REMARQUE. Bien sûr, ce théorème tombe en défaut pour un graphe qui n'est pas transitif : penser au graphe obtenu en reliant deux exemplaires de \mathbb{Z}^2 par une arête (le théorème 19 montrera qu'il n'y a dans \mathbb{Z}^2 qu'au plus une composante connexe infinie après percolation).

4.2 Cas des graphes moyennables

Pour un tel graphe, on peut même exclure le dernier cas de la proposition précédente :

THÉORÈME 19. – Si G est transitif, connexe et moyennable, alors P -p.s. il y a au plus une composante connexe infinie.

DÉMONSTRATION. L'idée est de montrer que, s'il y a une infinité de composantes connexes infinies p.s., alors chaque sommet a une probabilité strictement positive d'être une multifurcation (cf. paragraphe 3.4), ce qui permet d'extraire de G certains arbres aléatoires, et force alors G à être non-moyennable.

Supposons que le nombre de composantes connexes infinies est > 1 avec une probabilité strictement positive. Par la proposition précédente, il est donc infini p.s.. Choisissons un sommet o de G . Comme chaque composante connexe infinie contient des points à toutes les distances suffisamment grandes de o , et qu'il y a au moins trois composantes connexes infinies avec une probabilité strictement positive, il existe x, y et z dans G , à la même distance R de o , et tels que l'événement

$$A = \{x, y \text{ et } z \text{ sont dans trois composantes connexes infinies distinctes}\}$$

a une probabilité strictement positive.

On joint o à x par un chemin \mathcal{C}_x de longueur R , puis o à y par \mathcal{C}_y de longueur R et tel que $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y$ est sans cycle (par minimalité de $|\mathcal{C}_x| = R$, il n'y a pas de cycle dans \mathcal{C}_x , et si $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y$ présente un cycle,

on peut le supprimer en faisant «passer» \mathcal{C}_y par la portion de chemin de \mathcal{C}_x correspondante, ce qui ne change pas sa longueur par minimalité de R), et enfin o à z par un chemin \mathcal{C}_z tel que $\mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \cup \mathcal{C}_z$ ne contient pas de cycle.

Ainsi, $T = \mathcal{C}_x \cup \mathcal{C}_y \cup \mathcal{C}_z$ est un arbre, sous-graphe de G , admettant x, y et z pour feuilles. En particulier, on peut distinguer un sommet u de T (une «racine») tel que x, y et z sont dans trois composantes connexes distinctes de $T \setminus \{u\}$.

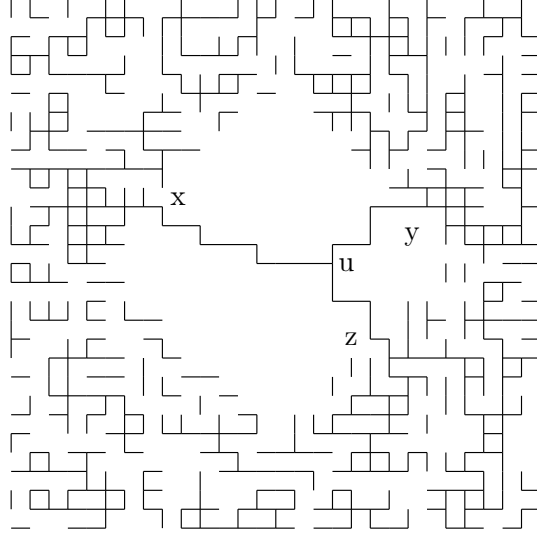


FIG. 3 – Une configuration de A'

On note alors $A' = \Pi_T \Pi_{\neg E_R(o)} A$ où $E_R(o)$ est l'ensemble des arêtes ayant une extrémité à distance $\leq R - 1$ de o : A' est l'ensemble des configurations obtenues à partir de configurations de A en ne gardant ouvertes dans $E_R(o)$ que les arêtes de T (cf. figure 3). Par tolérance d'insertion et de suppression, $P(A') > 0$. De plus, u est une *multifurcation* pour les $\omega \in A'$. En notant $\Lambda (= \Lambda(\omega))$ l'ensemble des multifurcations d'une configuration ω , on a donc, par transitivité de G et invariance de P :

$$c := P(o \in \Lambda) = P(u \in \Lambda) \geq P(A') > 0.$$

Soit K une partie finie de V . On montre maintenant qu'on a toujours $|\partial_E K| \geq |K \cap \Lambda|$, ce qui fournira, en prenant les espérances :

$$|\partial_E K| \geq E[|K \cap \Lambda|] = E\left[\sum_{x \in K} \mathbf{1}_{\{x \in \Lambda\}}\right] = \sum_{x \in K} P(x \in \Lambda) = c|K|$$

par invariance et transitivité, d'où la *contradiction* attendue : $\iota_E(G) \geq c > 0$. Pour démontrer l'inégalité annoncée, on utilise le lemme suivant :

LEMME 20. – Soit $T = (V, E)$ un arbre sans sommet de degré 1. On note B l'ensemble de ses sommets de degré ≥ 3 . Alors, pour toute partie non vide $K \subset V$, on a : $|\partial_E K| \geq |K \cap B| + 2$.

PREUVE DU LEMME. En décomposant K en la somme disjointe de ses composantes connexes, on voit qu'il suffit de démontrer le lemme dans le cas où K est connexe (et que l'on a même $|\partial_E K| \geq |K \cap B| + 2n$ où n est le nombre de composantes connexes de K). On procède alors par récurrence sur $|K|$.

Si $|K| = 1$, il existe $x \in V$ tel que $K = \{x\}$ d'où $|\partial_E K| = \deg x \geq 2 + |K \cap B|$ puisque tous les sommets de T sont de degré ≥ 2 , et ≥ 3 si et seulement s'ils sont dans B .

Soit $n \geq 1$. Supposons la propriété vraie pour les parties connexes de cardinal n . Soit $K \subset V$ de cardinal $n + 1$. Il existe un sommet x de K ayant un et un seul voisin dans K (K est fini et connexe, donc le contraire fournirait un cycle dans T); $K' = K \setminus \{x\}$ est alors connexe de cardinal n donc $|\partial_E K'| \geq 2 + |K' \cap B|$. Si $\deg x = 2$, alors x est relié à un sommet de K et à un sommet de $T \setminus K$, donc $|\partial_E K'| = |\partial_E K|$ et $|K \cap B| = |K' \cap B|$, d'où $|\partial_E K| \geq |K \cap B| + 2$. Supposons alors $\deg x \geq 3$: $x \in K \cap B$. Alors $|B \cap K| = |B \cap K'| + 1$, et $|\partial_E K'| = |\partial_E K| - \deg x + 1 \leq |\partial_E K| - 1$, donc $|\partial_E K| \geq |\partial_E K'| + 1 \geq 2 + |K' \cap B| + 1 = 2 + |K \cap B|$, ce qui achève la récurrence. \square

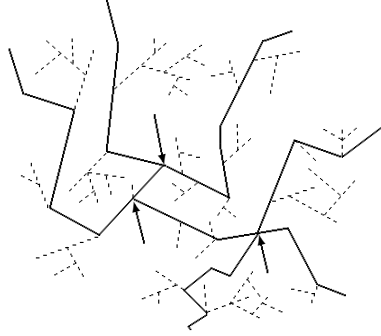


FIG. 4 – Arbre $T(\eta)$ obtenu à partir de T . Les flèches désignent les multifurcations de η

Afin d'appliquer ce lemme, on construit maintenant une forêt $\mathcal{F}' \subset \omega$ (*i.e.* un sous-graphe sans cycle de ω), sans sommet de degré 1, et qui possède la propriété suivante : les multifurcations de ω sont des sommets de degré ≥ 3 de \mathcal{F}' . Pour ce faire, notons d'abord $\mathcal{F} \subset \omega$ une forêt obtenue comme réunion d'arbres couvrants des composantes connexes de ω (par la proposition 1). On définit alors par récurrence une suite décroissante $(\mathcal{F}_n)_n$ de forêts incluses dans ω par $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$ et, pour tout $n \geq 0$, \mathcal{F}_{n+1} est la forêt obtenue en ôtant de \mathcal{F}_n toutes les arêtes dont une extrémité est de degré 1 (toutes les «feuilles»). La forêt annoncée est $\mathcal{F}' = \bigcap_n \mathcal{F}_n$ (voir figure 4). Par construction, \mathcal{F}' ne contient pas de sommet de degré 1. De plus, si u est une multifurcation de ω , on peut trouver trois chemins infinis disjoints dans \mathcal{F} issus de u (partant dans chaque composante connexe infinie de $K_{\mathcal{F}}(u) \setminus \{u\}$), et de tels chemins sont conservés dans \mathcal{F}' , si bien que u est bien de degré ≥ 3 dans \mathcal{F}' .

En sommant les inégalités fournies par le lemme (sous la forme « $|\partial_E K| \geq |K \cap B|$ ») pour les différentes composantes connexes de \mathcal{F}' , on obtient alors, en notant $V(\mathcal{F}')$ l'ensemble des sommets extrémités d'arêtes de \mathcal{F}' :

$$|\partial_E K| \geq |\partial_{\mathcal{F}'}(K \cap V(\mathcal{F}'))| \geq |(K \cap V(\mathcal{F}')) \cap \Lambda| = |K \cap \Lambda|,$$

ce qui est l'inégalité annoncée. \square

Dans le cas de la percolation de Bernoulli, sur \mathbb{Z}^d par exemple, ce théorème s'exprime ainsi :

COROLLAIRE 21. – Soit G un graphe connexe, transitif et moyennable. Le nombre N_∞ de composantes connexes du résultat de la percolation vérifie : \mathbb{P}_p -p.s., $N_\infty = \begin{cases} 0 & \text{si } p < p_c \\ 1 & \text{si } p > p_c \end{cases}$.

On remarque que le théorème ne permet pas de décider si $N_\infty = 0$ ou $N_\infty = 1$ lorsque $p = p_c$; cette question sera évoquée dans la partie 5.

Introduisons $p_u(G) = \inf \{p \in [0, 1] \mid \mathbb{P}_p$ -p.s., il n'y a qu'une seule composante connexe dans $\omega\}$. Le théorème 19 exprime que $p_u(G) = p_c(G)$ pour tout graphe de Cayley moyennable G . Si la conjecture suivante est vraie, alors on dispose d'une caractérisation de la moyennabilité par la percolation :

CONJECTURE. – Pour tout graphe transitif G non moyennable, on a : $p_c(G) < p_u(G)$.

4.3 Percolation invasive

Dans le couplage entre les différents paramètres de la percolation de Bernoulli, décrit dans la preuve de la proposition 5, on peut étudier l'évolution des composantes connexes, à configuration fixée, lorsque la probabilité p augmente. On parle de **percolation invasive**.

Lorsque p croît, deux comportements entrent en concurrence dans l'évolution du nombre de composantes connexes infinies : la fusion des composantes *finies*, qui tend à accroître ce nombre, et celle des composantes *infinies*, qui a l'effet inverse. La proposition suivante montre que, dans le cas des graphes de Cayley, c'est le second comportement qui se produit, après la probabilité critique :

PROPOSITION 22. – Dans le couplage standard de la percolation de Bernoulli sur les arêtes d'un graphe de Cayley G , si $p_c(G) < p_1 < p_2$, alors p.s. toute composante connexe infinie pour p_2 contient une composante connexe infinie pour p_1 .

DÉMONSTRATION. On note (ω_1, ω_2) la configuration du couplage standard entre p_1 et p_2 ($\omega_1 \subset \omega_2$). De plus, on désignera par $K_2(x)$ la composante connexe de x dans ω_2 . On pose, pour $e \in E$, $\Pi_e^2(\omega_1, \omega_2) = (\omega_1, \Pi_e \omega_2)$; alors pour tout événement A , on peut montrer que l'on a :

$$\mathbb{P}(\Pi_e^2 A) \geq \min \left(1, \frac{p_2 - p_1}{1 - p_2} \right) \mathbb{P}(A)$$

d'où une tolérance d'insertion : si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors $\mathbb{P}(\Pi_e^2 A) > 0$.

Notons η la réunion des composantes connexes infinies de ω_1 . On définit une application de transport de masse F de la façon suivante : pour $(x, y) \in V^2$, si x et y sont dans la même composante connexe de ω_2 et si y est l'*unique* sommet de η qui est le plus proche de x dans ω_2 , alors $F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = 1$, et dans le cas contraire $F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = 0$. Il est immédiat que F est diagonalement invariante et que $\sum_y F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) \leq 1$. Par le principe du transport de masse, on en déduit que pour tout $x \in V$:

$$\sum_y \mathbb{E}[F(y, x; (\omega_1, \omega_2))] = \sum_y \mathbb{E}[F(x, y; (\omega_1, \omega_2))] \leq 1.$$

En particulier, chaque sommet x reçoit p.s. une masse finie. Supposons maintenant qu'avec une probabilité strictement positive il existe une composante connexe infinie de ω_2 qui ne contient pas de composante connexe infinie de ω_1 . Une telle composante connexe est donc disjointe de η . Par suite, il existe $y, z \in V$ et $e_1, \dots, e_n \in E$ tels que l'événement :

$$A = \{K_2(z) \text{ est infinie et disjointe de } \eta, y \in \eta, \text{ et } (e_1, \dots, e_n) \text{ est un chemin de } z \text{ à } y \text{ hors de } K_2(z) \cup \eta\}$$

a une probabilité > 0 . Alors, si $B = \Pi_{e_1}^2 \dots \Pi_{e_n}^2 A$, $P(B) > 0$. Or, si B est réalisé, on a, pour tout $x \in K_2(z)$, $F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = 1$ (x est relié à z dans $K_2(z)$ puis z à y par (e_1, \dots, e_n) , et y est le plus proche par le choix de A) d'où $\sum_x F(x, y; (\omega_1, \omega_2)) = \infty$. Ceci contredit la conséquence du principe du transport de masse, et conclut. \square

REMARQUE. Ainsi, le nombre de composantes connexes infinies ne peut que décroître avec p (une fois p_c franchie). Cependant, ce n'est pas le cas général : considérons par exemple le graphe obtenu en reliant par une arête le graphe de Cayley de \mathbb{Z}^2 à un arbre dont la probabilité critique $p_c(T)$ vérifie $p_c(\mathbb{Z}^2) < p_c(T) < 1$. Il est facile de voir que, dans ce cas, on a d'abord une seule composante connexe infinie ($p_c(\mathbb{Z}^2) < p < p_c(T)$), puis une infinité ($p_c(T) < p < 1$).

5 Percolation critique sur le graphe de Cayley d'un groupe non moyennable

Nous avons établi l'existence d'une probabilité critique p_c , en-deçà de laquelle plus aucune composante infinie ne subsiste et au-delà de laquelle on est sûr de trouver une composante infinie. Cependant, on ne sait pas ce qui se passe lorsqu'on se trouve exactement à la probabilité critique dans un graphe quelconque. Il existe néanmoins une conjecture :

CONJECTURE. – Si G est un graphe transitif pour lequel $p_c(G) < 1$, alors $\theta_{p_c(G)}(G) = 0$: il n'y a pas de composante connexe infinie $\mathbb{P}_{p_c(G)}$ -presque sûrement.

Celle-ci a été vérifiée pour les graphes de \mathbb{Z}^d lorsque $d = 2$ (en 1980, par Kesten) et $d \geq 19$ (en 1994, par Hara et Slade), et l'objectif de cette section est de démontrer le théorème 26, qui exprime que cette conjecture est vraie pour un graphe non-moyennable (on montrera également qu'un graphe non-moyennable vérifie $p_c(G) < 1$). Pour cela, nous avons besoin de plusieurs résultats préliminaires.

THÉORÈME 23. – Soit $G = (V, E)$ le graphe de Cayley d'un groupe, de degré δ_G , et ω un processus de percolation sur G dont la loi \mathbb{P} est invariante par translation. Si presque-sûrement toutes les composantes connexes de ω sont finies, alors

$$\mathbb{E}[\deg_\omega o] \leq \delta_G - \iota_E(G).$$

DÉMONSTRATION. Pour un sous-graphe fini non vide K de G , on définit

$$\alpha_K = \frac{1}{|K|} \sum_{x \in K} \deg_K(x),$$

et $\alpha(G) = \sup \{\alpha_K \mid K \subset V \text{ est fini et non vide}\}$.

La quantité $\sum_{x \in K} \deg_K x + |\partial_E K|$ compte deux fois chaque arête de K et une fois chaque arête de $\partial_E K$. Or de chaque sommet partent δ_G arêtes, donc $\delta_G \cdot |K|$ compte également deux fois chaque arête de K (une fois par extrémité) et une fois celles de $\partial_E K$. On en déduit $\sum_{x \in K} \deg_K x + |\partial_E K| = \delta_G \cdot |K|$, qui se réécrit

$$\frac{\sum_{x \in K} \deg_K x}{|K|} = \frac{\delta_G \cdot |K| - |\partial_E K|}{|K|}.$$

On passe alors à la borne supérieure sur l'ensemble des $K \subset V$ finis non vides dans cette égalité, et on obtient :

$$\alpha(G) = \delta_G - \iota_E(G).$$

Il suffit donc pour montrer le théorème d'établir que $\mathbb{E}[\deg_\omega o] \leq \alpha(G)$.

Nous allons utiliser le principe du transport de masse (paragraphe 3.4). Commençons avec une masse $\deg_\omega x$ placée dans chaque sommet x et redistribuons-la équitablement dans tous les sommets (y compris x lui-même) de la composante (finie) $K_\omega(x)$. Après transport, la masse en x est $\alpha_{K_\omega(x)}$. Ce transport est invariant donc si $f(x, y)$ désigne la masse moyenne envoyée de x à y , on a

$$\mathbb{E}[\deg_\omega o] = \sum_x f(o, x) = \sum_x f(x, o) = \mathbb{E}[\alpha_{K_\omega(o)}].$$

L'égalité de gauche est immédiate car toute la masse initialement dans o , $\deg_\omega o$, est redistribuée dans tous les sommets. De plus, la masse reçue en o est exactement $\alpha_{K(o)}$ donc on en déduit l'égalité de droite.

Par définition, $\alpha_{K_\omega(o)} \leq \alpha(G)$ et on a bien $\mathbb{E}[\deg_\omega o] \leq \alpha(G)$. \square

REMARQUE. Si on applique cette inégalité au cas de la percolation de Bernoulli \mathbb{P}_p , où $\deg_G o$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(\delta_G, p)$, on obtient, pour $p < p_c(G) : p \cdot \delta_G \leq \delta_G - \iota_E(G)$, d'où l'on déduit :

$$p_c(G) \leq 1 - \frac{\iota_E(G)}{\delta_G}.$$

LEMME 24. – Soit $G = (V, E)$ un graphe de Cayley, et ω un processus de percolation sur G dont la loi \mathbb{P} est invariante par translation et telle que toutes les composantes sont des arbres finis presque-sûrement. Alors :

$$\mathbb{E}[\deg_\omega o | o \in \omega] < 2.$$

DÉMONSTRATION. On reprend les définitions de la preuve précédente. Montrons d'abord par récurrence sur $n \geq 1$ que, si K est un arbre fini à n sommets, alors $\alpha_K < 2$. Ceci est vrai si K ne contient qu'un sommet : $\alpha_K = 0$. Soit $n \geq 1$; supposons l'inégalité vraie pour tout arbre à n sommets. Si \tilde{K} est un arbre à $n + 1$ sommets, on note K le sous-arbre de \tilde{K} obtenu en enlevant une arête correspondant à un sommet de degré 1, et on a alors

$$\alpha_{\tilde{K}} = \frac{(|K|\alpha_K) + 1 + 1}{|K| + 1} < \frac{2|K| + 2}{|K| + 1} = 2,$$

ce qui clôt la récurrence.

Maintenant, reprenons la démonstration du théorème 23 en ne plaçant cette fois de la masse que dans ω . De la même façon, on établit que $\mathbb{E}[\deg_\omega o | o \in \omega] \leq \alpha(G)$. En combinant cette inégalité avec la précédente, on démontre le résultat annoncé. \square

THÉORÈME 25. – Soit $G = (V, E)$ un graphe de Cayley. Soit \mathcal{F} un processus de percolation sur G , dont la loi est invariante par translation, et tel que \mathcal{F} est une forêt presque-sûrement (i.e. \mathcal{F} n'a pas de cycle, c'est une réunion disjointe d'arbres). Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) Des composantes de \mathcal{F} ont au moins une multifurcation avec une probabilité strictement positive;
- (ii) Des composantes de \mathcal{F} ont une probabilité critique strictement inférieure à 1 avec une probabilité strictement positive;
- (iii) $\mathbb{E}[\deg_{\mathcal{F}} o | |K(o)| = \infty] > 2$ (où o est un sommet quelconque de G).

DÉMONSTRATION.

◇ Supposons (i) : il y a dans \mathcal{F} des multifurcations avec une probabilité strictement positive.

Par la même construction que dans le théorème 19 (voir aussi figure 4), on définit une forêt $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, sans sommet de degré 1, et contenant toutes les multifurcations de \mathcal{F} : \mathcal{F}' s'obtient en enlevant de \mathcal{F} toutes les arêtes dont une extrémité est de degré 1, et en itérant ce procédé indéfiniment. Comme \mathcal{F} contient des multifurcations avec une probabilité strictement positive, il en va de même de \mathcal{F}' .

On définit alors une orientation aléatoire ζ des arêtes de \mathcal{F} appartenant à une composante connexe infinie de la manière suivante : si $e \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}'$ (et $|K_{\mathcal{F}}(e)| = \infty$), alors l'orientation de e est telle qu'elle pointe vers \mathcal{F}' ; par ailleurs, les arêtes de \mathcal{F}' sont orientées aléatoirement avec probabilité $\frac{1}{2}$ dans chaque sens, de façon indépendante entre les arêtes (voir figure 5).

Etant donnée une orientation ζ , envoyons la masse 1 le long de chaque arête orientée. On note $F(x, y; \zeta)$ la fonction indicatrice de l'événement $\{\{x, y\} \text{ est dans } \mathcal{F} \text{ avec l'orientation de } x \text{ vers } y\}$. Puisque ζ est invariante (i.e. sa loi est invariante), on peut appliquer le principe du transport de masse à $f(x, y) = \mathbb{E}[F(x, y; \zeta)]$ pour conclure que, si $o \in V$:

$$\sum_x f(o, x) = \sum_x f(x, o).$$

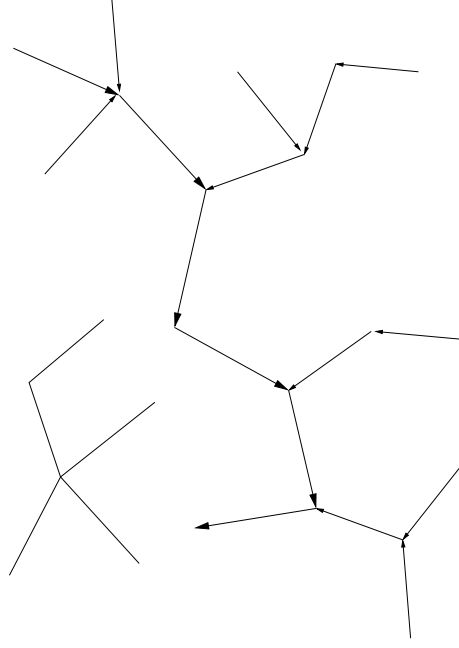


FIG. 5 – Orientation de \mathcal{F}

De plus, $f(o, x) + f(x, o) = \mathbb{E}[F(o, x; \zeta) + F(x, o; \zeta)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\{o, x\} \in \mathcal{F}\}} \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}}]$ car chaque arête est orientée dans un sens ou dans l'autre sauf celles contenues dans une composante finie. On en déduit :

$$\sum_x f(o, x) + \sum_x f(x, o) = \mathbb{E}[(\deg_{\mathcal{F}} o) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}}].$$

On a alors :

$$\frac{1}{2} \mathbb{E}[(\deg_{\mathcal{F}} o) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}}] = \sum_x f(o, x) = \mathbb{E} \left[\sum_{x \sim o} F(o, x; \zeta) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \right]. \quad (1)$$

Évaluons le dernier terme :

- Si $o \notin \mathcal{F}'$ alors il y a exactement un x voisin de o tel que l'arête $\{o, x\}$ pointe vers x (et vers \mathcal{F}'), donc la somme vaut 1, d'où :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \sim o} F(o, x; \zeta) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \mathbf{1}_{\{o \notin \mathcal{F}'\}} \right] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \mathbf{1}_{\{o \notin \mathcal{F}'\}}] = \mathbb{P}(o \notin \mathcal{F}', |K(o)| = \infty).$$

- Si $o \in \mathcal{F}'$, alors par construction, il y a pour tout $x \in \mathcal{F}'$ voisin de o exactement une chance sur deux pour que $\{o, x\}$ soit orientée de o vers x , et pour tout $x \in \mathcal{F}' \setminus \mathcal{F}$ voisin de o , $\{o, x\}$ est orientée vers o , d'où l'on déduit que :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \sim o} F(o, x; \zeta) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \mathbf{1}_{\{o \in \mathcal{F}'\}} \right] = \frac{1}{2} \mathbb{E}[(\deg_{\mathcal{F}'} o) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \mathbf{1}_{\{o \in \mathcal{F}'\}}];$$

et $\deg_{\mathcal{F}'} o$ est toujours supérieur à deux, et vaut au moins 3 dès que o est une multifurcation, ce qui par hypothèse arrive avec une probabilité strictement positive, donc cela donne :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \sim o} F(o, x; \zeta) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \mathbf{1}_{\{o \in \mathcal{F}'\}} \right] > \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \mathbf{1}_{\{o \in \mathcal{F}'\}}] = \mathbb{P}(o \in \mathcal{F}', |K(o)| = \infty).$$

On peut maintenant faire la somme des deux termes. Il vient :

$$\mathbb{E} \left[\sum_{x \sim o} F(o, x; \zeta) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \right] > \mathbb{P}(|K(o)| = \infty).$$

Par l'égalité (1), on a donc :

$$\mathbb{E} [(\deg_{\mathcal{F}} o) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}}] = 2 \mathbb{E} \left[\sum_{x \sim o} F(o, x; \zeta) \mathbf{1}_{\{|K(o)| = \infty\}} \right] > 2 \mathbb{P}(|K(o)| = \infty),$$

ce qui se réécrit :

$$\mathbb{E}[\deg_{\mathcal{F}} o \mid |K(o)| = \infty] > 2.$$

On a donc montré (iii).

◇ Supposons maintenant (iii). On note \mathcal{F}' la percolation obtenue à partir de \mathcal{F} en conservant seulement les arêtes appartenant à une composante infinie. Alors on a $\mathbb{E}[\deg_{\mathcal{F}'} o \mid o \in \mathcal{F}'] > 2$ (conséquence immédiate de (iii)). De plus il existe, par convergence dominée, un réel $p \in]0, 1[$ suffisamment proche de 1 pour que la percolation de Bernoulli de paramètre p sur \mathcal{F}' donne une configuration \mathcal{F}'' vérifiant toujours $\mathbb{E}[\deg_{\mathcal{F}''} o \mid o \in \mathcal{F}''] > 2$. En vertu du lemme 24, on déduit que \mathcal{F}'' contient une composante connexe infinie avec une probabilité strictement positive. On vient de montrer (ii).

◇ Il reste à montrer (ii) \Rightarrow (i) (cette implication n'intervient pas dans la suite, et on ne donne qu'une «idée» de la preuve). Ceci résulte du fait qu'un arbre dont la probabilité critique est < 1 possède une multifurcation. En effet, on peut voir qu'un arbre sans multifurcation est une branche infinie ou biinfinie sur laquelle sont greffées des branches finies, et pour qu'un sous-graphe connexe d'un tel arbre soit infini, il faut qu'il contienne une infinité d'arêtes consécutives de la branche infinie, si bien qu'on ne peut avoir de composante connexe infinie dans ω que si le paramètre de la percolation de Bernoulli est $p = 1$. \square

On en arrive au théorème annoncé :

THÉORÈME 26. – Soit $G = (V, E)$ le graphe de Cayley d'un groupe non moyennable. Alors $\theta_{p_c(G)}(G) = 0$: $\mathbb{P}_{p_c(G)}$ -presque sûrement, il n'y a pas de composante connexe infinie dans ω .

DÉMONSTRATION. On notera dans la suite p_c pour $p_c(G)$.

Le théorème 18 nous permet de dire qu'il n'y a que trois possibilités : soit aucune composante infinie, soit une, soit une infinité. On veut donc éliminer les cas «une» et «une infinité».

On effectue le couplage standard (voir proposition 5) : on définit une variable aléatoire U sur $[0, 1]^E$ dont la loi est la probabilité produit $\mathbb{P} = \bigotimes_{e \in E} \mu$, μ étant la loi uniforme sur $[0, 1]$, ce qui permet de définir le processus de percolation :

$$\omega_p = \{e \in E \mid U(e) \leq p\},$$

qui suit la loi \mathbb{P}_p .

◇ Supposons qu'il y ait exactement une composante connexe infinie dans ω_{p_c} , que l'on note ω' .

Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit un nouveau processus de percolation noté ξ_ε en ne conservant que les arêtes $\{x, y\} \in E$ vérifiant les trois conditions suivantes :

- a. $d_G(x; \omega') < \frac{1}{\varepsilon}$;

b. $d_G(y; \omega') < \frac{1}{\varepsilon}$;

c. Pour tout $x' \in \omega'$ tel que $d_G(x', x) = d_G(x; \omega')$, et tout $y' \in \omega'$ tel que $d_G(y', y) = d_G(y; \omega')$, x' et y' sont dans une même composante connexe de $\omega_{p_c - \varepsilon}$.

Pour $\varepsilon > \varepsilon'$, on a $\xi_\varepsilon \subset \xi_{\varepsilon'}$: les hypothèses a. et b. restent clairement vérifiées, et ω_p est croissante en p , donc si z est dans $\omega_{p_c - \varepsilon}$, il est dans $\omega_{p_c - \varepsilon'}$, ce qui montre que l'hypothèse c. est donc vérifiée.

On a également

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \xi_\varepsilon = E.$$

En effet, prenons $\{x, y\} \in E$. Les conditions a. et b. sont évidemment remplies pour ε assez petit. De plus, l'ensemble $E_{x,y}$ des sommets x' et y' tels que $d_G(x', x) = d_G(x; \omega')$ et $d_G(y', y) = d_G(y; \omega')$ est fini (car le groupe est finiment engendré), et ω' est connexe, donc on peut trouver un sous-graphe fini connexe \mathcal{C} de ω' reliant tous les points de $E_{x,y}$, et en posant $r = \sup_{e \in \mathcal{C}} U(e)$, on a presque-sûrement $r < p_c$, si bien que c. est réalisée pour tout ε choisi dans $]0, p_c - r[$. Ainsi, $\{x, y\} \in \xi_\varepsilon$ pour ε assez petit. Le théorème de convergence dominée fournit alors le résultat suivant :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{P}(\{x, y\} \in \xi_\varepsilon) = 1.$$

On a donc :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbb{E}[\deg_{\xi_\varepsilon} o] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{x \sim o} \mathbb{P}(\{o, x\} \in \xi_\varepsilon) = \sum_{x \sim o} 1 = d_G.$$

Or on se trouve dans le cas d'un graphe non moyennable donc $d_G > d_G - \iota_E(G)$, si bien que la conclusion du théorème 23 (appliqué à la percolation ξ_ε) est mise en défaut pour ε suffisamment petit ; pour ε suffisamment petit, il existe donc avec une probabilité strictement positive une composante connexe infinie dans ξ_ε .

Soit η une composante connexe infinie de ξ_ε . On définit alors η' par :

$$\eta' = \{x' \in \omega' \mid \text{il existe } x \in \eta \text{ tel que } d_G(x, x') = d_G(x; \omega')\}.$$

Par c., on sait que η' est connexe et incluse dans $\omega_{p_c - \varepsilon}$. De plus, η' est infinie car, par a. et b., pour tout x' , le nombre de $x \in \eta$ tels que $d_G(x, x') = d_G(x; \omega')$ est fini.

Il y a donc, avec une probabilité strictement positive, une composante connexe infinie dans $\omega_{p_c - \varepsilon}$, ce qui est en *contradiction* avec la définition de p_c . On vient de montrer qu'il ne peut pas y avoir exactement une composante connexe infinie dans ω_{p_c} .

◇ Supposons maintenant qu'il y a une infinité de composantes connexes infinies dans ω_{p_c} .

On note alors \mathcal{F} l'ensemble des $\{x, y\} \in E$ vérifiant $U(\{x, y\}) \leq p_c$ (i.e. $\{x, y\} \in \omega_{p_c}$) et tels qu'il n'existe pas de chemin de x à y utilisant exclusivement des arêtes e pour lesquelles $U(e) < U(\{x, y\})$. Montrons que \mathcal{F} est une forêt couvrante de ω_{p_c} qui ne contient qu'un arbre dans chacune de ses composantes connexes (c'est donc une réunion d'arbres couvrants des différentes composantes connexes de ω_{p_c}).

a) Presque-sûrement, \mathcal{F} ne contient pas de cycle : si on avait un cycle \mathcal{C} dans \mathcal{F} , l'arête e qui maximise U sur le cycle ne peut pas être dans \mathcal{F} , d'où une contradiction. (Remarque : on a $\mathbb{P}(U(e) = p) = 0$, à p fixé, donc les inégalités sont strictes presque-sûrement).

b) Maintenant, supposons que les arêtes de \mathcal{F} donnent plus d'un arbre dans une composante connexe de ω_{p_c} , en incluant la possibilité d'un sommet isolé. Alors il existe une arête $\{x, y\} \in \omega_{p_c}$ dont les extrémités x et y sont dans différents arbres de \mathcal{F} (sinon, tous les sommets voisins seraient dans un même arbre,

donc on aurait un seul arbre puisque dans ω_{p_c} tout était connecté), d'où un chemin dans ω_{p_c} allant de x à y utilisant seulement des arêtes e telles que $U(e) < U(\{x, y\})$. Comme x et y ne sont pas reliés dans \mathcal{F} , un tel chemin contient une arête $e' \notin \mathcal{F}$, qui peut à son tour être remplacée par un chemin joignant ses extrémités, et utilisant seulement des arêtes de ω_{p_c} avec des valeurs de U strictement inférieures à $U(e')$. Ceci implique qu'il y a dans ω_{p_c} une composante connexe infinie constituée d'arêtes e telles que

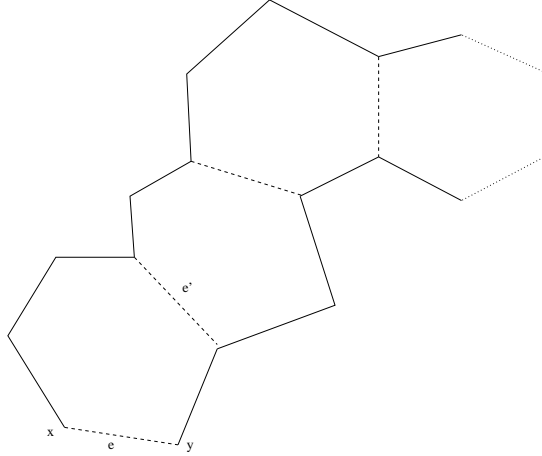


FIG. 6 – On montre qu'il existe une composante infinie

$U(e) < U(\{x, y\})$ (en réitérant le processus indéfiniment, voir figure 6). Cela contredit $U(\{x, y\}) < p_c$. Nous venons de prouver qu'il y a un seul arbre dans chacune des composantes connexes de ω_{p_c} , et que cet arbre est couvrant.

Or, par tolérance d'insertion, comme dans la démonstration du théorème 19, une composante connexe infinie de ω_{p_c} a au moins une multifurcation avec une probabilité strictement positive. Et une multifurcation d'une composante connexe de ω_{p_c} est également une multifurcation de l'arbre de \mathcal{F} qu'elle contient, si bien que le processus de percolation \mathcal{F} , qui est une forêt presque-sûrement, vérifie l'hypothèse (i) du théorème 25. Par suite, \mathcal{F} vérifie (ii) : il existe, avec une probabilité strictement positive, un arbre de \mathcal{F} dont la probabilité critique est strictement inférieure à 1. Mais ceci implique qu'avec une probabilité strictement positive, il existe une composante connexe de ω_{p_c} dont la probabilité critique est strictement inférieure à 1, en contradiction avec la définition de ω_{p_c} . \square

Références

- [1] R. LYONS, Y. PERES. *Probability on trees and networks*. Non édité, 2004.
- [2] I. BENJAMINI, R. LYONS, Y. PERES, O. SCHRAMM. *Critical percolation on any nonamenable group has no infinite clusters*. Ann. Probab. Vol. 27, no. 3, 1347-1356, 1999.
- [3] I. BENJAMINI, O. SCHRAMM. *Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers*. Electron. Comm. Probab., 1 (no. 8), 71-82 (electronic), 1996.