1

Cohomologie des $\mathcal{Z}(K)$

rappel : si K est un complexe simplicial sur $[m] = \{1, \cdots, m\}$ et si (X, A) est une paire de Top, alors :

$$(X, A)^K := \bigcup_{I \in K} \underbrace{(X, A)^I}_{= \prod_{i \in I} X \times \prod_{i \notin I} A}$$

Si (X, A) est une ~~paire~~ CW-paire, alors $(X, A)^K$ est manifestement un sous CW-complexe de X^m.

En particulier :

$$(D^2, S^1)^K =: \mathcal{Z}(K)$$

est un sous CW-complexe de $(D^2)^m$.

Objectif : calculer l'anneau de cohomologie des $\mathcal{Z}(K)$.

Rq : Le groupe topologique S^1 agit sur (D^2, S^1), donc $\underbrace{(S^1)^m}_{T^m}$ agit sur $\mathcal{Z}(K)$.

I Cohomologie T^m-équivariante

L'action $T^m \curvearrowright \mathcal{Z}(K)$ permet de considérer le quotient homotopique

$$DJ(K) := ET^m \times_{T^m} \mathcal{Z}(K) \qquad (T^m \text{ agit diagonalement})$$

↑ espace de Davis - Januszkiewicz

Le but de cette section est de calculer la cohomologie de cet espace.

Rq : $S^\infty = \operatorname{colim}_n \underbrace{S^{2n-1}}_{= \partial(D^{2n}) \subset \mathbb{C}^n}$ est muni d'une action de S^1 (propre et libre)

et $S^\infty / S^1 = \mathbb{C}P^\infty = BS^1$. En particulier $\boxed{ET^m \simeq (S^\infty)^m}$ et $\boxed{BT^m \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^m}$.

Ainsi :

stable sous T^m, donc réunion d'orbites

$$DJ(K) \simeq (S^\infty)^m \times_{T^m} \overbrace{\bigcup_{I \in K} (D^2, S^1)^I}$$

$$\simeq \bigcup_{I \in K} \underbrace{(S^\infty)^m \times_{T^m} (D^2, S^1)^I}_{\simeq (S^\infty \times_{S^1} D^2,\ S^\infty \times_{S^1} S^1)^I}$$

$\simeq S^\infty$ (car l'action de S^1 sur S^∞ est libre)

car $T^m = (S^1)^m$ et les actions de chaque S^1 sont "découplées"

d'où :

$$\boxed{DJ(K) \simeq (S^\infty \times_{S^1} D^2,\ S^\infty)^K}$$

Lemme : On a une équivalence d'homotopie :

$$(S^\infty \times_{S^1} D^2,\ S^\infty) \simeq (\mathbb{C}P^\infty, *)$$

entre paires d'espaces topologiques.

dém : JE NE SAIS PAS, LA PREUVE DU LIVRE EST INCORRECTE

Comme corollaire, on obtient une éq. d'homotopie

$$\boxed{DJ(K) \simeq (\mathbb{C}P^\infty)^K}$$

et on se ramène à calculer la cohomologie de ce deuxième espace. Elle s'exprime à l'aide de la notion suivante :

déf : L'anneau des faces du complexe simplicial K sur $[m]$ est :

$$\mathbb{Z}[K] := \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / I_K$$

où I_K est l'idéal engendré par les $(v_I)_{I \notin K}$

$\mathbb{N}$ - graduation.

Rq: $\mathbb{Z}[K]$ est manifestement une $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ - algèbre graduée, où $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ est gradué par le degré.
(car I_K est engendré par des éléments homogènes)

Rq: Comme $\mathbb{Z}$-module, $\mathbb{Z}[K]$ est libre et une base est donnée par les

$$v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_n}^{\alpha_n} \quad \text{avec } \alpha_j \geq 1 \text{ et } \{i_1, \dots, i_n\} \in K$$

ex: $\cdot\ \mathbb{Z}[\Delta^{[m]}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$

$\cdot\ \mathbb{Z}[\partial \Delta^{[m]}] = \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] / (v_1 \cdots v_m)$

Thm: On a un isomorphisme d'anneaux :

$$\boxed{H^*((\mathbb{C}P^\infty)^K) \simeq \mathbb{Z}[K]}$$

En particulier $H((\mathbb{C}P^\infty)^m) \simeq \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$. L'inclusion $(\mathbb{C}P^\infty)^K \subseteq (\mathbb{C}P^\infty)^m$ induit un morphisme en cohom.:

$$\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[K]$$

qui n'est autre que la projection.

dém: $\mathbb{C}P^\infty = e_0 \cup e_2 \cup e_4 \cup \cdots \cup e_{2n} \cup \cdots$

$$(\mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^{n-1} \cup D^{2n})$$

donc $H^{2i}(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}$ $\forall i$, $H^{2i+1}(\mathbb{C}P^\infty) = 0$
$\leftarrow$ $\mathbb{Z}$-mod. libre de t.f.

On en déduit :

$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^m) \simeq \underbrace{H^*(\mathbb{C}P^\infty)}_{\simeq \mathbb{Z}[v]}{}^{\otimes m} \simeq \mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$$

(v de deg. 2)

et le noyau de la projection:

$$H^*((\mathbb{C}P^\infty)^m) \twoheadrightarrow H^*((\mathbb{C}P^\infty)^K) \text{ (admis)}$$

est engendré par les $v_{i_1} \cdots v_{i_n}$ avec $\{i_1, \dots, i_n\} \notin K$
ce qui est exactement I_K

Corollaire : Si K est un complexe simplicial sur $[m]$, alors :

$$\underbrace{\boxed{H^{\circ}_{T^m}(Z(K)) \simeq \mathbb{Z}[K]}}_{:= H^{\circ}(DJ(K))}$$

ex : pas d'exemple.

II Cohomologie de $Z(K)$

On munit D^2 de la structure cellulaire suivante :

(3 cellules de dim 0, 1, 2 respectivement)

→ les cellules du complexe produit $(D^2)^m$ sont déterminées par deux parties disjointes

I, J de $[m]$ $(I \cap J = \emptyset)$

On note $e(I, J)$ la cellule correspondante, qui est dans $Z(K)$ ssi $I \in K$

facteurs D facteurs T

OPS le complexe cellulaire de D^2 étant :

$$\cdots \to 0 \to \underset{2}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{id} \underset{1}{\mathbb{Z}} \xrightarrow{0} \underset{0}{\mathbb{Z}} \to 0 \cdots$$

car $H_0(D^2) = \mathbb{Z}$ ...

or :

$$C_\bullet((D^2)^m) \simeq C_\bullet(D^2)^{\otimes m} \quad \text{(quasiment par déf.)}$$

d'où ($I \cap J = \emptyset$) :

$$d\,e(I, J) = \sum_{i \in I} (-1)^{|J|_{<i} + 2|I|_{<i}} e(I - \{i\}, J \cup \{i\})$$

$$= \sum_{i \in I} (-1)^{|J|_{<i}} e(I - \{i\}, J \cup \{i\})$$

On peut alors exprimer la différentielle δ de $C^{\circ}(Z(K))$:

si $I \in K$ et $J \subseteq [m] - I$:

$$\delta e(I, J)^* = e(I, J)^* \circ d = \sum_{\substack{j \in J \text{ t.q. } I \cup \{j\} \in K}} (-1)^{|J|_{<j}} e(I \cup \{j\}, J - \{j\})^*$$

En particulier si $J = \{j_1 < \dots < j_n\}$, alors :

$$\boxed{\delta e(I,J)^* = \sum_{\substack{k \text{ t.q.} \\ I \cup \{j_k\} \in K}} (-1)^{k-1} e(I \cup \{j_k\}, \{j_1, \dots, \hat{j_k}, \dots, j_n\})^*}$$

Si $i \geq 0$, on munit $C^i(Z(K))$ de la $\mathbb{N}$-graduation :

$$\left| \begin{array}{l} C^{i,n}(Z(K)) := \bigoplus_{|I|+|J|=n} e(I,J)^* \mathbb{Z} \\ n \geq 0 \end{array} \right.$$

manifestement préservée par la différentielle.

Conséquence : la cohomologie $H(Z(K))$ est bigraduée

But : calculer $H^{\cdot,\cdot}(Z(K))$ comme $\mathbb{Z}$-module bigradué, puis comme anneau.

1) Un premier modèle algébrique pour les cochaînes cellulaires

On note $\Lambda[u_1, \dots, u_m] := \Lambda(\mathbb{Z}^m)$ l'alg. extérieure (à coeffs entiers) sur m générateurs, graduée sur $\mathbb{N}$:

$$\Lambda[u_1, \dots, u_m] = \bigoplus_{i \geq 0} \underbrace{\Lambda^i[u_1, \dots, u_m]}_{\mathbb{Z}\text{-module libre}}$$

déf : Si M est un $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-module gradué, on définit le $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-module :

$$E(M) := \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes_{\mathbb{Z}} M$$

bigradué par :

$$E(M)_{i,n} := \Lambda^i[u_1, \dots, u_m] \otimes_{\mathbb{Z}} M_{n-i}$$

($\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$ est $0 \oplus \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{N} \oplus \mathbb{N}$ gradué)

et une différentielle,

$$d : E(M) \longrightarrow E(M)$$

il faut vérifier le passage au quotient, car on ne suppose pas les i_k ordonnés.

$$u_{i_1} \cdots u_{i_n} m \longmapsto \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} u_{i_1} \cdots \hat{u}_{i_k} \cdots u_{i_n} (v_{i_k} m)$$

manifestement $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-linéaire, et qui se restreint en $d : E(M)_{i,n} \to E_{i-1,n}(M)$

Rq : 1) Un calcul immédiat donne

$$\boxed{d^2 = 0}$$

si bien que l'on a un complexe gradué :

$$0 \to E_m(M) \xrightarrow{d} E_{m-1}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} E_0(M) \simeq M \to 0$$

dont l'<u>homologie</u> est un <u>$\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-module bigradué</u>

$$H_{\bullet,\bullet}(E(M))$$

2) Si M est une $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-<u>algèbre graduée</u>, alors $E(M)$ est une $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-alg. <u>bigraduée</u>.

Dans ce cas, la différentielle

$$d : E(M) \to E(M)$$

vérifie manifestement la <u>formule de Leibniz</u> :

$$d(xy) = (dx)y + (-1)^i x(dy)$$

pour $x \in E_i(M)$ et $y \in E(M)$.

En particulier $H_{\bullet,\bullet}(E(M))$ hérite d'une structure d'algèbre bigraduée.

3) Si M et N sont des $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$- et $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_n]$-modules gradués respectivement, alors on a une identification de <u>$\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_{m+n}]$-modules</u> bigradués munis de leur différentielle :

$$E(M) \otimes_{\mathbb{Z}} E(N) \simeq E(M \otimes_{\mathbb{Z}} N)$$

$$uv \otimes u'v' \mapsto uu'vv'$$

différentielle $d(x \otimes y) := dx \otimes y + (-1)^i x \otimes dy$
pour $x \in E_i(M)$ et $y \in E(N)$.

Si M et N sont des alg., alors c'est une <u>identification</u> de $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_{m+n}]$-algèbres bigraduées.

déf : K complexe simplicial sur $[m]$

On définit une $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-alg. bigraduée à partir de l'anneau des faces :

$$\mathcal{R}(K) := E(\mathbb{Z}[K]) \big/ (v_i^2,\ u_i v_i)_{1 \leq i \leq m}$$

La différentielle $d : E(\mathbb{Z}[K]) \to E(\mathbb{Z}[K])$ passe au quotient et induit une différentielle :

$$d : \mathcal{R}(K) \to \mathcal{R}(K)$$

manifestement $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-linéaire, respectant la grad. par le degré, et vérifiant la règle de Leibniz.

dém : L'idéal $(v_i^2,\ u_i v_i)$ est engendré par des éléments $(\mathbb{N} \oplus \mathbb{N})$-homogènes donc la bigraduation passe au quotient.

Aussi :

$$d(v_i^2) = 0 \quad \text{et} \quad d(u_i v_i) = v_i^2$$

donc la règle de Leibniz assure que la diff. passe au quotient.

Rq : L'alg. $\mathcal{R}(K)$ est un $\mathbb{Z}$-module libre, une base étant donnée par la famille

$$(u_J v_I)_{I \in K,\ I \cap J = \emptyset}$$

Prop : Si j est un entier fixé, on a un isomorphisme de complexes de chaînes (de $\mathbb{Z}$-mod) :

$$R_{\bullet, j}(K) \simeq C^{2j - \bullet, j}(\mathbb{Z}(K))$$

$$u_J v_I \longmapsto e(I, J)^*$$

produit dans le bon ordre (i.e. croissant)

(car $2|I| + |J| = 2(|I| + |J|) - |J|$)

dém : Cette formule induit manifestement des isos $\mathbb{Z}$-linéaires :

$$\phi : R_{i,j}(K) \simeq C^{2j-i, j}(\mathbb{Z}(K))$$

(comparer les bases)

Il reste à vérifier la compatibilité aux différentielles :
pour $I \in K$ et $J = \{j_1 < \dots < j_n\} \subseteq [m] - I$:

$$\delta\phi(u_J v_I) = \sum_{\substack{k \text{ t.q.} \\ I \cup \{j_k\} \in K}} (-1)^{k-1} e(I \cup \{j_k\}, \{j_1, \dots, \hat{j_k}, \dots, j_n\})^*$$

$$= \phi\left(\sum_{\dots} (-1)^{k-1} u_{j_1} \cdots \hat{u_{j_k}} \cdots u_{j_n} v_{j_k} v_I\right)$$

$$= \phi d(u_J v_I)$$

on peut ajouter les termes "fantômes" dans la somme, qui sont nuls de toute manière.

$\to$ ok.

Corollaire : On a des isos. $\mathbb{Z}$-linéaires :

$$\boxed{H^{i,j}(Z(K)) \simeq H_{2j-i,j}(R(K))}$$

pour tous i,j.

En particulier le produit sur $H(R(K))$ fournit un nouveau produit sur $H(Z(K))$, que l'on veut comparer au produit cup.

Si X est un espace topologique, alors le produit cup se décompose par naturalité :

$$\smile : H^\bullet(X) \otimes H^\bullet(X) \xrightarrow{pr_1^* \otimes pr_2^*} H^\bullet(X \times X) \otimes H^\bullet(X \times X)$$

$$\xrightarrow{\smile} H^\bullet(X \times X) \xrightarrow{\Delta^*} H(X)$$

morphisme de Künneth.

où $\Delta : X \to X \times X$ est l'application diagonale.

Si X est un CW-complexe, Künneth s'exprime directement au niveau des cochaînes cellulaires :

$$C^\bullet(X) \otimes C^\bullet(X) \longrightarrow C^\bullet(X \times X)$$

$$\alpha \otimes \beta \in C^i \otimes C^j \longmapsto \pm(pr_1^*\alpha)\cdot(pr_2^*\beta) \in C^{i+j}(X \times X)$$

Problème : pour remonter Δ^* au niveau des cochaînes cellulaires, il faudrait une approximation cellulaire de $\Delta : X \to X \times X$.

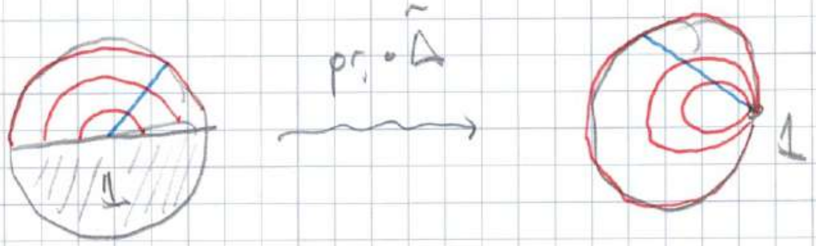
Il n'y a pas de choix de naturel, ~~or~~ or on veut un modèle alg. et donc des formules.

$\to$ Remarquablement, une approximation cellulaire "canonique" existe lorsque $X = Z(K)$.

2) Approximation cellulaire.

On approxime déjà la diag. de (D^2, S^1) par l'application cellulaire :

$$\tilde{\Delta} : D^2 \longrightarrow D^2 \times D^2$$
$$\rho e^{i\phi} \longmapsto \begin{cases} (1-\rho+\rho e^{2i\phi}, 1) & \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi \\ (1, 1-\rho+\rho e^{2i\phi}) & \text{si } \pi \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$



La formule explicite :

$$(\rho e^{i\phi}, t) \longmapsto \begin{cases} ((1-\rho)t + \rho e^{i(1+t)\phi}, (1-\rho)t + \rho e^{i(1-t)\phi}) & \text{si } 0 \leq \phi \leq \pi \\ ((1-\rho)t + \rho e^{i(1-t)\phi + 2\pi i t}, (1-\rho)t + \rho e^{i(1+t)\phi - 2i\pi t}) & \text{sinon} \end{cases}$$

fournit manifestement une homotopie $\Delta \sim \tilde{\Delta}$ rel. au bord.

$\rightsquigarrow$ on en déduit une approximation cellulaire :

$$\tilde{\Delta} : Z(K) \times Z(K) \to Z(K)$$

(par produit) de la diagonale de $Z(K)$, puis un relèvement du produit cup. à $C^*(Z(K))$

Prop : Les isos $C^{-i,j}(\mathcal{Z}(K)) \simeq R_{2j-i,j}(K)$ linéaires induisent un isomorphisme d'anneaux :

$$\boxed{C(\mathcal{Z}(K)) \simeq R(K)}$$

dém :

- cas $K = \Delta^{[m]}$: (i.e. $\mathcal{Z}(K) = (D^2)^m$)

L'approximation de la diagonale de $(D^2)^m$ n'est autre que $\tilde{\Delta}^m$, ~~i.e. bien~~ et ~~que le carré suivant commute manifestement~~ :

$$\begin{tikzcd}
C^\cdot(D^2 \times D^2)^{\otimes m} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "(\tilde{\Delta}^*)^{\otimes m}"'] & C^\cdot((D^2)^m \times (D^2)^m) \arrow[d, "\tilde{\Delta}^*"] \\
C^\cdot(D^2)^{\otimes m} \arrow[r, "\sim"] & C^\cdot((D^2)^m)
\end{tikzcd}$$

on peut mq pour ce produit cup sur $(D^2)^m$, l'identification

$$C^\cdot((D^2)^m) \simeq C^\cdot(D^2)^{\otimes m}$$

est un morphisme d'anneaux.

Or $R(\Delta^{[m]}) = E(\mathbb{Z}[\Delta^{[m]}]) / (v_i^2, u_i v_i)$

cf. $E(\mathbb{Z}[\Delta^{[m]}]) \simeq E(\mathbb{Z}[\Delta^{[1]}])^{\otimes m}$ $\simeq \Big(\underbrace{E(\mathbb{Z}[\Delta^{[1]}])}_{= \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v]} / (v^2, uv) \Big)^{\otimes m} \simeq R(\Delta^{[1]})^{\otimes m}$

et le carré d'identifications :

$$\begin{tikzcd}
R(\Delta^{[1]})^{\otimes m} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\sim"'] & R(\Delta^{[m]}) \arrow[d, "\sim"] \\
C^\cdot(D^2)^{\otimes m} \arrow[r, "\sim"] & C^\cdot((D^2)^m)
\end{tikzcd}$$

morphismes d'anneaux

commute, si bien qu'il suffit de montrer le résultat pour $m = 1$.

Déjà $R(\Delta^{[1]}) = \Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v] / (v^2, uv)$ (dim. 3)

d'où :

$\times$	1	v	u
1	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
v	$\cdot$	0	0
u	$\cdot$	0	0

or pour $C^\cdot(D^2)$:

$\cup$	$*$	T^*	D^*
$*$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
T^*	$\cdot$	0	0
D^*	$\cdot$	0	0

car $\hat{\Delta}$ envoie
- $*$ sur $* \times *$
- T sur $T \times 1 \cup 1 \times T$
- D sur $D \times 1 \cup 1 \times D$

(modulo les signes)

• cas général : si K est quelconque, on a un diagramme commutatif de $\mathbb{Z}$-mod.

$$\begin{tikzcd} R(\Delta^{[m]}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "p"'] & C^\bullet((D^2)^m) \arrow[d, "i^*"] \\ R(K) \arrow[r, "\sim", "\phi"'] & C^\bullet(Z(K)) \end{tikzcd}$$

↑ morphismes d'anneaux ← → cellulaire.

où p est le quotient de $R(\Delta^{[m]}) = \Lambda[u_1,\dots,u_m] \otimes \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m] / (v_i^2, u_iv_i)$

par $\underbrace{\Lambda[u_1,\dots,u_m]}_{\text{libre comme } \mathbb{Z}\text{-module.}} \otimes\, \mathcal{I}_K\,(v_i^2, u_iv_i)$

(vérifier sur une base)

Or p est surjective, donc ϕ est un morphisme d'anneaux...

3) Algèbre Tor

On donne un autre modèle alg. pour la cohomologie de $Z(K)$.

On note $E(m) := E(\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m])$
on a un complexe de $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$-mod. gradués :

$$E_\bullet(m) : \quad 0 \to E_m(m) \to \dots \to E_0(m) \simeq \mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m] \to 0$$

puis un morphisme gradué

$$\varepsilon : E_\bullet(m) \longrightarrow \mathbb{Z}$$ induit par le quotient $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m] \to \mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$-linéaire.

Prop : ε est une équivalence d'homotopie.

En particulier $E_\bullet(m)$ est une résolution libre du $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$-module $\mathbb{Z}$
→ résolution de Koszul

dém : par récurrence sur m :

• si $m = 0$, rien à faire

•

• si $m=1$, on note $\eta : \mathbb{Z} \hookrightarrow E_\bullet(1)$ l'inclusion canonique

but : construire une homotopie $s : \eta\varepsilon \sim id$ (car $\varepsilon\eta = id$)

i.e. un morphisme $s : \mathbb{Z}[v] \to E_1(1) = \Lambda^1[u] \otimes \mathbb{Z}[v]$ t.q. :

$$\begin{tikzcd} E_1(1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "id"'] & \mathbb{Z}[v] \arrow[d, "f \mapsto f - f(0)"] \arrow[dl, dashed, "s"'] \\ E_1(1) \arrow[r, "d"] & \mathbb{Z}[v] \end{tikzcd}$$

$id - \eta\varepsilon$ verticalement

On prend :

bien $\mathbb{Z}[v]$-linéaire.

$$s(f) := u \otimes \frac{f - f(0)}{v}$$

• cas $m \geq 2$: si le cas $(m-1)$ est traité, on utilise le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} E_\bullet(m-1) \otimes E_\bullet(1) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "\varepsilon\otimes\varepsilon"'] & & E_\bullet(m) \arrow[dl, "\varepsilon"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

et $\varepsilon \otimes \varepsilon$ est une éq. d'homotopie par récurrence.

Rq : si Γ est un monoïde commutatif, et si M et N sont deux A-modules gradués, alors (A : anneau Γ-gradué commutatif)

$$M \underset{A}{\otimes} N$$

est encore Γ-gradué.

Si Γ est simplifiable, alors une résolution projective Γ-graduée est unique à éq. d'homotopie graduée près.

Si M et N sont deux modules Γ-gradués (Γ simplifiable) et si

$$P_\bullet \xrightarrow{\sim} M \quad \text{et} \quad Q_\bullet \xrightarrow{\sim} N$$

sont des résolutions projectives graduées, alors les morphismes :

$$(M \underset{A}{\otimes} Q)_\bullet \leftarrow (P \underset{A}{\otimes} Q)_\bullet \rightarrow (P \underset{A}{\otimes} N)_\bullet$$

sont gradués (par $\otimes$)

induisant des isos gradués en homologie :

$$H_i(M \underset{A}{\otimes} Q) \xleftarrow{\sim} H_i(P \underset{A}{\otimes} Q) \xrightarrow{\sim} H_i(P \underset{A}{\otimes} N)$$

En particulier :

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) := H_i(P \otimes Q)$$

est canoniquement Γ-gradué.

L'iso. canonique $P \otimes Q \simeq Q \otimes P$ est Γ-gradué, d'où un iso.
$x \otimes y \mapsto \pm y \otimes x$

$$\mathrm{Tor}_i^A(M,N) \simeq \mathrm{Tor}_i^A(N,M)$$

de modules Γ-gradués.
$\leadsto$ ne dépend pas des choix de résolutions car Γ simplifiable.

En mettant bout à bout ce qui précède :
si M est un $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-module $\mathbb{N}$-gradué, alors on a des isomorphismes canoniques gradués

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(M, \mathbb{Z}) \simeq H_i(E_\bullet(m) \underset{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}{\otimes} M)$$

$$\simeq H_i(E(M))$$

En particulier, on a des identifications

$$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(M, \mathbb{Z}) := \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{Tor}_i(M, \mathbb{Z})$$

$$\simeq \bigoplus_i H_i(E(M))$$

ie

$$\boxed{\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(M, \mathbb{Z}) \simeq H(E(M))}$$

isomorphisme de $\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]$-modules bigradués.

Corollaire : Si M est une $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-alg. graduée, alors

$$\mathrm{Tor}(M, \mathbb{Z})$$

est canoniquement une M-alg. bigraduée

(Ω graduée par $\mathbb{N} = 0 \oplus \mathbb{N}$)

---

déf : L'algèbre Tor d'un complexe simplicial K (sur $[m]$) est la $\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]$-alg. bigraduée :

$$\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{Z}[K], \mathbb{Z}) \simeq H(E(\mathbb{Z}[K]))$$

contient la "cohomologie $\mathbb{Z}(K)$"

But : comparer cette alg. à $R(K)$.

On définit un morphisme $\mathbb{Z}$-linéaire (section du quotient)

$$\iota : R(K) \longrightarrow E(\mathbb{Z}[K]) = \Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes \mathbb{Z}[K]$$

$$\left| \begin{array}{l} u_J v_I \longmapsto u_J v_I \\ I \in K, \ I \cap J = \emptyset \end{array} \right.$$

qui respecte manifestement les bigraduations et les différentielles.

⚠ $\iota \neq$ morphisme d'alg. (mais ok en homologie)

Prop : La proj. $p : E(\mathbb{Z}[K]) \twoheadrightarrow R(K)$ induit un iso. bigradué d'alg. :

$$H(E(\mathbb{Z}[K])) \simeq H(R(K))$$

en homologie.

dém : · cas $K = \Delta^{[m]}$: ici $E(\mathbb{Z}[K]) = E(m)$

Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E(\Delta)^{\otimes m} & \xrightarrow{\sim} & E(m) \\ {\scriptstyle p^{\otimes m}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle p} \\ R(\Delta^{[1]})^{\otimes m} & \xrightarrow{\sim} & R(\Delta^{[m]}) \end{array} \qquad R(\Delta^{[1]}) = \frac{\Lambda[u] \otimes \mathbb{Z}[v]}{(uv, v^2)}$$

mq. il suffit de faire le cas $m = 1$.

~~remarque~~ On cherche $s : cp \sim id$, i.e.

$$s : \mathbb{Z}[v] \to E_1(1) \qquad (s\ \mathbb{Z}\text{-linéaire})$$

qui fait commuter :

$$\begin{tikzcd}
E_1(1) \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\substack{u \mapsto 0 \\ uv^k \mapsto uv^k \\ (k \geq 1)}"'] & \mathbb{Z}[v] \arrow[d, "\substack{1 \mapsto 0 \\ v \mapsto 0 \\ v^k \mapsto v^k\ (k \geq 2)}"] \arrow[dl, dashed, "s"'] \\
E_1(1) \arrow[r, "d"'] & \mathbb{Z}[v]
\end{tikzcd}$$

On prend :

$$s(v^k) := \begin{cases} 0 & \text{si } k \leq 1 \\ uv^{k-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

- dans le <u>cas général</u> : K quelconque

On veut que l'homotopie $\tilde{s} : cp \sim id$ sur $E(m)$ passe au quotient par $\Lambda[u_1, \dots, u_m] \otimes I_K$.

On peut choisir $\tilde{s}$ t.q :

$$\tilde{s} = \sum_{i=1}^{m} \pm (cp)^{\otimes(i-1)} \otimes s \otimes id^{\otimes(m-i)}$$

$$(\text{modulo } E(m) \simeq E(1)^{\otimes m})$$

En particulier :

$$\tilde{s}(u_J v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_n}^{\alpha_n}) = \sum_{\substack{r \text{ t.q.} \\ \alpha_r \geq 2 \text{ et } \left[\forall k < r,\ \alpha_k \geq 2 \text{ ou } (\alpha_k \geq 1 \text{ et } k \in J)\right]}} \pm u_{J_{\leq i_r}} u_{i_r} u_{J_{> i_r}} v_{i_1}^{\alpha_1} \cdots v_{i_r}^{\alpha_r - 1} \cdots v_{i_n}^{\alpha_n}$$

$\rightsquigarrow$ si $\{i_1, \dots, i_n\} \notin K$, alors <u>chaque terme de la somme est dans I_K</u>

(car $\alpha_r - 1 \geq 1$ si $\alpha_r \geq 2$...)

$\Rightarrow \tilde{s}$ <u>passe au quotient</u> en une homotopie $\widetilde{cp} \sim id$

passage au quotient de cp $\boxed{E(\mathbb{Z}[K])}$

Or on peut vérifier sur les vecteurs de base que $\boxed{\widetilde{cp} = cp}$ sur

Thm : les iso. linéaires $H^{i,j}(Z(K)) \simeq R_{2j-i,j}(K)$ s'assemblent en un isomorphisme d'anneaux :

$$\boxed{H(Z(K)) \simeq \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}[v_1,\dots,v_m]}(\mathbb{Z}[K],\mathbb{Z})}$$