

Solutions globales pour des systèmes de chimiotactisme

Hatem Zaag

CNRS École Normale Supérieure

En collaboration avec L. Corrias (Université d'Evry) et B. Perthame
(Paris 6 et ENS).

Monastir, 7 janvier 2004

Plan :

- Réflexion : Pourquoi les équations aux dérivées partielles interviennent-elles en biologie?
- Technique mathématique : Régularité L^p pour deux systèmes de chimiotactisme.

Utiliser les maths en biologie : est-ce efficace ou pas?

Dans son éditorial à *Mathematical slices of molecular biology* de A. Carbone et M. Gromov, G. Besson cite (en sortant les paroles de leur contexte) :

Utiliser les maths en biologie : est-ce efficace ou pas?

Dans son éditorial à *Mathematical slices of molecular biology* de A. Carbone et M. Gromov, G. Besson cite (en sortant les paroles de leur contexte) :

1- Wigner qui a écrit un article qui s'intitule: *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* [Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 1–14]

Utiliser les maths en biologie : est-ce efficace ou pas?

Dans son éditorial à *Mathematical slices of molecular biology* de A. Carbone et M. Gromov, G. Besson cite (en sortant les paroles de leur contexte) :

1- Wigner qui a écrit un article qui s'intitule: *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* [Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 1–14]

2- Gelfand qui a écrit : "... the equally unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology" .

Utiliser les maths en biologie : est-ce efficace ou pas?

Dans son éditorial à *Mathematical slices of molecular biology* de A. Carbone et M. Gromov, G. Besson cite (en sortant les paroles de leur contexte) :

1- Wigner qui a écrit un article qui s'intitule: *The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences* [Comm. Pure Appl. Math. 13 (1960), 1–14]

2- Gelfand qui a écrit : "... the equally unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology" .

Qui croire?

Spécificité de la biologie : multiplication et imbrication des niveaux d'organisation et des échelles

1. Échelle moléculaire et cellulaire: étude de l'ADN et du génome, les propriétés physico-chimiques, la cellule.

Spécificité de la biologie : multiplication et imbrication des niveaux d'organisation et des échelles

- 1. Échelle moléculaire et cellulaire:** étude de l'ADN et du génome, les propriétés physico-chimiques, la cellule.
- 2. Échelle de l'organisme:** embryologie, développement, morphologie, physiologie (e.g. modélisation du fonctionnement cardiaque, ou de la circulation du sang), relation organe-fonction, comportement, immunologie, cancer.

Spécificité de la biologie : multiplication et imbrication des niveaux d'organisation et des échelles

- 1. Échelle moléculaire et cellulaire:** étude de l'ADN et du génome, les propriétés physico-chimiques, la cellule.
- 2. Échelle de l'organisme:** embryologie, développement, morphologie, physiologie (e.g. modélisation du fonctionnement cardiaque, ou de la circulation du sang), relation organe-fonction, comportement, immunologie, cancer.
- 3. Échelle des communautés:** c'est du domaine de l'écologie, et se ramène souvent à des modèles de dynamique des populations.

Exemple : une maladie virale

1. Échelle moléculaire et cellulaire: virus (séquence d'ADN) et cellules du système immunitaire.

Exemple : une maladie virale

1. Échelle moléculaire et cellulaire: virus (séquence d'ADN) et cellules du système immunitaire.

2. Échelle de l'organisme: organes touchés.

Exemple : une maladie virale

- 1. Échelle moléculaire et cellulaire:** virus (séquence d'ADN) et cellules du système immunitaire.
- 2. Échelle de l'organisme:** organes touchés.
- 3. Échelle des communautés:** contagion.

Deux axes majeurs en math-bio :

1. Analyse de données, statistiques, probabilités.

Deux axes majeurs en math-bio :

- 1. Analyse de données, statistiques, probabilités.**
- 2. Modélisation par systèmes dynamiques, équations différentielles ou équations aux dérivées partielles (non linéaires)**

Les systèmes dynamiques et les EDPs interviennent à toutes les échelles d'organisation des sciences du vivant.

Un exemple de chimiotactisme (ou chimiotaxie) : cas de l'amibe Dictyostellium discoideum

Chimiotaxie (définition) : mouvement de bactéries, amibes, cellules, sous l'influence d'une substance chimique, le chimioattracteur..

Film 1 (source : dictybase.org)

Agrégation d'amibes *D. discoideum* vers un point source du chimioattracteur cAMP (cyclo Adénosine Monophosphate).

Temps en minutes et secondes.

D'après G. Gerisch, Max Planck Institut für Biochemie, Martinsried, Allemagne.

Film 2 (source : dictybase.org)

Chimiotaxie d'une seule cellule vers un point source de cAMP.

Temps en minutes et secondes.

D'après G. Gerisch, Max Planck Institut für Biochemie, Martinsried, Allemagne.

Film 3 (source : dictybase.org)

Agrégation d'amibes.

Intervalle de temps entre étapes: 6 minutes.

D'après P. Devreotes, Johns Hopkins Medical Institutions,
Baltimore, États-Unis.

Explication (d'après D. Horstmann)

1- D. Discoideum est un organisme unicellulaire qui se reproduit par division cellulaire tant que les ressources du milieu en nourriture sont suffisantes.

Explication (d'après D. Horstmann)

- 1- D. Discoideum est un organisme unicellulaire qui se reproduit par division cellulaire tant que les ressources du milieu en nourriture sont suffisantes.
- 2- Lorsque les ressources sont épuisées, les amibes occupent tout l'espace disponible.

Explication (d'après D. Horstmann)

- 1- D. Discoideum est un organisme unicellulaire qui se reproduit par division cellulaire tant que les ressources du milieu en nourriture sont suffisantes.
- 2- Lorsque les ressources sont épuisées, les amibes occupent tout l'espace disponible.
- 3- Une amibe secrète cAMP qui attire les autres.

Explication (d'après D. Horstmann)

- 1- D. Discoideum est un organisme unicellulaire qui se reproduit par division cellulaire tant que les ressources du milieu en nourriture sont suffisantes.
- 2- Lorsque les ressources sont épuisées, les amibes occupent tout l'espace disponible.
- 3- Une amibe secrète cAMP qui attire les autres.
- 4- Les amibes bougent en direction de l'amibe fondatrice, et sécrètent le cAMP (film 3).

5- Agrégation et début de différenciation.

- 5- Agrégation et début de différenciation.
- 6- Formation d'un pseudoplasmoïd (multicellulaire).

- 5- Agrégation et début de différenciation.
- 6- Formation d'un pseudoplasmoïd (multicellulaire).
- 7- Le pseudoplasmoïd bouge en direction des sources de lumière.

- 5- Agrégation et début de différenciation.
- 6- Formation d'un pseudoplasmoïd (multicellulaire).
- 7- Le pseudoplasmoïd bouge en direction des sources de lumière.
- 8- Formation d'un corps fructifiant et émission de spores

- 5- Agrégation et début de différenciation.
- 6- Formation d'un pseudoplasmoïd (multicellulaire).
- 7- Le pseudoplasmoïd bouge en direction des sources de lumière.
- 8- Formation d'un corps fructifiant et émission de spores et le cycle recommence (naissance d'amibes...)

Intérêt du D. Discoideum pour la recherche médicale

C'est un modèle simple pour l'étude du chimiotactisme, qui intervient chez des organismes supérieurs aussi (différentiation, cancer, etc...)

Exemple : Angiogénèse autour d'une tumeur cancéreuse

Au début, la tumeur puise ses ressources dans le milieu ambiant.

Exemple : Angiogénèse autour d'une tumeur cancéreuse

Au début, la tumeur puise ses ressources dans le milieu ambiant.

À un certain point, elle envoie un signal chimique dans le milieu extérieur pour attirer les cellules endothéliales (cellules qui tapissent l'intérieur des vaisseaux sanguins), et ainsi former des vaisseaux sanguins capillaires qui la fournissent en nutriments.

Exemple : Angiogénèse autour d'une tumeur cancéreuse

Au début, la tumeur puise ses ressources dans le milieu ambiant.

À un certain point, elle envoie un signal chimique dans le milieu extérieur pour attirer les cellules endothéliales (cellules qui tapissent l'intérieur des vaisseaux sanguins), et ainsi former des vaisseaux sanguins capillaires qui la fournissent en nutriments.

Collaboration avec L. Corrias (Évry) et Benoît Perthame (DMA).

Modélisation (simplifiée) de la chimiotaxie

x est la variable d'espace.

t est le temps.

$n(x, t)$ densité des amibes.

$c(x, t)$ densité du signal chimique.

Accroissement de $n(x, t)$:

$\frac{\partial n}{\partial t}$ est la somme de trois termes :

Accroissement de $n(x, t)$:

$\frac{\partial n}{\partial t}$ est la somme de trois termes :

1- diffusion : $\text{div}(K\nabla n)$.

Accroissement de $n(x, t)$:

$\frac{\partial n}{\partial t}$ est la somme de trois termes :

- 1- diffusion : $\text{div}(K\nabla n)$.
- 2- division cellulaire αn .

Accroissement de $n(x, t)$:

$\frac{\partial n}{\partial t}$ est la somme de trois termes :

- 1- diffusion : $\text{div}(K \nabla n)$.
- 2- division cellulaire αn .
- 3- chimiotactisme $\text{div}(-n \chi(c) \nabla c)$ où $\chi(c)$ est la sensibilité.

Accroissement de $n(x, t)$:

$\frac{\partial n}{\partial t}$ est la somme de trois termes :

1- diffusion : $\text{div}(K\nabla n)$.

2- division cellulaire αn .

3- chimiotactisme $\text{div}(-n\chi(c)\nabla c)$ où $\chi(c)$ est la sensibilité.

Bilan (avec $K = 1$ et $\alpha = 0$) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \Delta n - \text{div}(-n\chi(c)\nabla c)$$

Comme c est produit par l'amibe elle-même, il vérifie une équation du genre

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \Delta c + f(n).$$

avec $f(n) \geq 0$. Le signe positif de $f(n)$ traduit le fait que la substance chimique est créée par les amibes.

Questions intéressantes

- Existence et l'unicité de solutions (avec la régularité bien entendu).

Questions intéressantes

- Existence et l'unicité de solutions (avec la régularité bien entendu).
- Comportement asymptotique. Peut on prédire qu'il y aura agrégation en temps fini ? Peut on décrire la façon dont l'agrégation se fait ? (vitesse ?)

Questions intéressantes

- Existence et l'unicité de solutions (avec la régularité bien entendu).
- Comportement asymptotique. Peut on prédire qu'il y aura agrégation en temps fini ? Peut on décrire la façon dont l'agrégation se fait ? (vitesse ?)

Pour l'instant, un seul résultat, dû à Herrero, Medina et Velázquez, dans le cas où le problème a une symétrie radiale.

Questions intéressantes

- Existence et l'unicité de solutions (avec la régularité bien entendu).
- Comportement asymptotique. Peut on prédire qu'il y aura agrégation en temps fini ? Peut on décrire la façon dont l'agrégation se fait ? (vitesse ?)

Pour l'instant, un seul résultat, dû à Herrero, Medina et Velázquez, dans le cas où le problème a une symétrie radiale.

- Résolution numérique : une mine inépuisable!

Plan :

- Réflexion : Pourquoi les équations aux dérivées partielles interviennent-elles en biologie?
- Technique mathématique : Régularité L^p pour deux systèmes de chimiotactisme.

Le système classique de la chimiotaxie

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n = \nabla \cdot [\kappa(n, c) \nabla n - \chi(n, c) \nabla c], \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \partial_t c = \eta \Delta c + \beta(n, c) n - \gamma(n, c) c, \quad t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), \quad c(0, x) = c_0(x). \end{array} \right.$$

+ conditions au bord, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$,

n est la densité de la population,

c est la densité du chimio-attracteur,

χ est la sensibilité du chimio-attracteur.

Un premier modèle : Système (parabolique-elliptique) de la chimiotaxie :

$\chi(n, c) = \chi n$ où la “sensibilité” χ est constante.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \chi \nabla \cdot [n \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ -\Delta c = n - \alpha c, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Un 2e modèle : Système (parabolique-dégénéré) de l'angiogénèse. Modèle de croissance de vaisseaux sanguins autour d'une tumeur cancéreuse.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \nabla \cdot [n \chi(c) \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial t} c = -c^m n, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), \quad c(0, x) = c_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

où $m > 0$ et (par exemple) $\chi(c) = c^{-\alpha}$.

Un premier modèle : Système (parabolique-elliptique) de la chimiotaxie :

$\chi(n, c) = \chi n$ où la “sensibilité” χ est constante.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \chi \nabla \cdot [n \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ -\Delta c = n - \alpha c, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Un premier modèle : Système (parabolique-elliptique) de la chimiotaxie :

$\chi(n, c) \equiv \chi n$ où la “sensibilité” χ est constante.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \chi \nabla \cdot [n \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ -\Delta c = n - \alpha c, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) \equiv n_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Conservation de la masse : $\int_{\Omega} n(x, t) dx \equiv \int_{\Omega} n_0(x) dx.$

Comment obtenir des solutions faibles globales?

Idée classique : (par exemple), contrôler la norme L^p de n pour tout t . Le calcul donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^p + 4\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 = \chi p(p-1) \int_{\Omega} n^{p-1} \nabla n \cdot \nabla c .$$

Comment obtenir des solutions faibles globales?

Idée classique : (par exemple), contrôler la norme L^p de n pour tout t . Le calcul donne :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^p + 4\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 = \chi p(p-1) \int_{\Omega} n^{p-1} \nabla n \cdot \nabla c .$$

Si le courant $\nabla c(x, t)$ est uniformément borné en x et en t , alors c'est gagné (technique de Nagai et Hortsman). En effet,

on estime simplement le membre de gauche par :

$$\begin{aligned}
 & \chi^{p(p-1)} \int_{\Omega} n^{p-1} \nabla n \cdot \nabla c = 2\chi(p-1) \int_{\Omega} n^{p/2} \nabla n^{p/2} \cdot \nabla c \\
 & \leq 2\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 + \frac{\chi^2 p(p-1)}{2\kappa} \|\nabla c\|_{L_{t,x}^{\infty}}^2 \int_{\Omega} n^p,
 \end{aligned}$$

on estime simplement le membre de gauche par :

$$\begin{aligned} & \chi^p(p-1) \int_{\Omega} n^{p-1} \nabla n \cdot \nabla c = 2\chi(p-1) \int_{\Omega} n^{p/2} \nabla n^{p/2} \cdot \nabla c \\ & \leq 2\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 + \frac{\chi^2 p(p-1)}{2\kappa} \|\nabla c\|_{L_{t,x}^{\infty}}^2 \int_{\Omega} n^p, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^p + 2\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 \leq \frac{\chi^2 p(p-1)}{2\kappa} \|\nabla c\|_{L_{t,x}^{\infty}}^2 \int_{\Omega} n^p,$$

on estime simplement le membre de gauche par :

$$\begin{aligned} & \chi^p(p-1) \int_{\Omega} n^{p-1} \nabla n \cdot \nabla c = 2\chi(p-1) \int_{\Omega} n^{p/2} \nabla n^{p/2} \cdot \nabla c \\ & \leq 2\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 + \frac{\chi^2 p(p-1)}{2\kappa} \|\nabla c\|_{L_{t,x}^{\infty}}^2 \int_{\Omega} n^p, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^p + 2\kappa \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla n^{p/2}|^2 \leq \frac{\chi^2 p(p-1)}{2\kappa} \|\nabla c\|_{L_{t,x}^{\infty}}^2 \int_{\Omega} n^p,$$

\Rightarrow contrôle de toutes les normes L^p de n , $1 \leq p \leq +\infty$.

- La machine a tourné uniquement en dimension 1, ou dans le cas radial en dimension 2, pour Nagai (qui a obtenu la borne L^∞ sur ∇c).

- La machine a tourné uniquement en dimension 1, ou dans le cas radial en dimension 2, pour Nagai (qui a obtenu la borne L^∞ sur ∇c).

- Généralisation à d'autres fonctions sensibilités (non convexes dans notre système) par Biler.

Nouvelle idée. $\Omega = \mathbb{R}^d$, dimension $d \geq 2$. Je rappelle le système...

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \chi \nabla \cdot [n \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ -\Delta c = n - \alpha c, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Nouvelle idée. $\Omega = \mathbb{R}^d$, dimension $d \geq 2$. Je rappelle le système...

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \chi \nabla \cdot [n \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ -\Delta c = n - \alpha c, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

... et l'équation sur la norme L^p :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int n^p + 4\kappa \frac{p-1}{p} \int |\nabla n^{p/2}|^2 &= \chi(p-1) \int \nabla n^p \cdot \nabla c \\ &= -\chi(p-1) \int n^p \cdot \Delta c. \end{aligned}$$

Or, $-\Delta c \equiv n - \alpha c$, donc

$$\frac{d}{dt} \int n^p + 4\kappa \frac{p-1}{p} \int |\nabla n^{p/2}|^2 \leq \chi(p-1) \int n^{p+1}.$$

Or, $-\Delta c = n - \alpha c$, donc

$$\frac{d}{dt} \int n^p + 4\kappa \frac{p-1}{p} \int |\nabla n^{p/2}|^2 \leq \chi(p-1) \int n^{p+1}.$$

Gagliardo-Nirenberg (condition : $p \geq \max\left(1, \frac{d}{2} - 1\right)$) :

$$\int n^{p+1} \leq C(d, p) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \|n\|_{L^{\frac{d}{2}}},$$

Or, $-\Delta c = n - \alpha c$, donc

$$\frac{d}{dt} \int n^p + 4\kappa \frac{p-1}{p} \int |\nabla n^{p/2}|^2 \leq \chi(p-1) \int n^{p+1}.$$

Gagliardo-Nirenberg (condition : $p \geq \max\left(1, \frac{d}{2} - 1\right)$) :

$$\int n^{p+1} \leq C(d, p) \leq C(d) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \|n\|_{L^{\frac{d}{2}}},$$

et

$$\frac{d}{dt} \int n^p \leq (p-1) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\chi \tilde{C}(d) \|n\|_{L^{\frac{d}{2}}} - \frac{4\kappa}{p} \right].$$

Dimension $d = 2$: $\|n\|_{L^2}^d = \|n\|_{L^1} \equiv \|n_0\|_{L^1}$, donc

$$\frac{d}{dt} \int n^p \leq (p-1) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\chi \tilde{C}(d) \|n_0\|_{L^1} - \frac{4\kappa}{p} \right].$$

Dimension $d = 2$: $\|n\|_{L^2}^d = \|n\|_{L^1} \equiv \|n_0\|_{L^1}$, donc

$$\frac{d}{dt} \int n^p \leq (p-1) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\chi \tilde{C}(d) \|n_0\|_{L^1} - \frac{4\kappa}{p} \right].$$

Ainsi, si

$$\chi \tilde{C}(d) \|n_0\|_{L^1} - \frac{4\kappa}{p^*} \leq 0,$$

alors pour tout $p \leq p^*$, $\int n^p$ décroît et reste donc bornée.

Dimension $d = 3$: $\|n\|_{L^2}^{\frac{d}{2}}$ n'est pas conservée, mais avec

$p = \frac{d}{2}$, on écrit

$$\frac{d}{dt} \int n^{\frac{d}{2}} \leq \left(\frac{d}{2} - 1\right) \|\nabla n^{\frac{d}{4} - \frac{1}{2}}\|_{L^2}^2 \left[\chi_{\tilde{C}}(d) \|n\|_{L^2}^{\frac{d}{2}} - \frac{4\kappa}{2} \right].$$

Dimension $d = 3$: $\|n\|_{L^{\frac{d}{2}}}$ n'est pas conservée, mais avec

$p = \frac{d}{2}$, on écrit

$$\frac{d}{dt} \int n^{\frac{d}{2}} \leq \left(\frac{d}{2} - 1\right) \|\nabla n^{\frac{d}{4} - \frac{1}{2}}\|_{L^2}^2 \left[\chi \tilde{C}(d) \|n\|_{L^{\frac{d}{2}}} - \frac{4\kappa}{2} \right].$$

Ainsi, si

$$\chi \tilde{C}(d) \|n_0\|_{L^{\frac{d}{2}}} - \frac{4\kappa}{2} \leq 0,$$

alors $\|n\|_{L^{\frac{d}{2}}}$ décroît, et on écrit

$$\frac{d}{dt} \int n^p \leq (p-1) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\chi_{\tilde{C}}(d) \|n_0\|_{L^2}^{\frac{d}{2} - \frac{4\kappa}{p}} \right].$$

$$\frac{d}{dt} \int n^p \leq (p-1) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\chi \tilde{C}(d) \|n_0\|_{L^{\frac{d}{2}}} - \frac{4\kappa}{p} \right].$$

Ainsi, (comme en dimension 2, mais avec la norme $L^{\frac{d}{2}}$ au lieu de la masse), si

$$\chi \tilde{C}(d) \|n_0\|_{L^{\frac{d}{2}}} \leq \min \left(\frac{4\kappa}{\frac{d}{2}}, \frac{4\kappa}{p^*} \right)$$

alors, pour tout $p \leq p^*$, $\int n^p$ décroît et reste donc bornée.

On voudrait une condition uniforme

pour tout $p \in [\max(1, \frac{d}{2} - 1), +\infty)$ sans restriction $p \leq p^*$.

On voudrait une condition uniforme

pour tout $p \in [\max\left(1, \frac{d}{2} - 1\right), +\infty)$ sans restriction $p \leq p^*$.

Pour cela, on travaille avec $(n - K)_+$ au lieu de n , et on prend K suffisamment large.

On voudrait une condition uniforme

pour tout $p \in [\max(1, \frac{d}{2} - 1), +\infty)$ sans restriction $p \leq p^*$.

Pour cela, on travaille avec $(n - K)_+$ au lieu de n , et on prend K suffisamment large.

Ensuite, on régularise le système en introduisant

$$-\Delta c_\varepsilon = n_\varepsilon \star \rho_\varepsilon - \alpha c_\varepsilon$$

où ρ_ε est un noyau régularisant.

On voudrait une condition uniforme

pour tout $p \in [\max(1, \frac{d}{2} - 1), +\infty)$ sans restriction $p \leq p^*$.

Pour cela, on travaille avec $(n - K)_+$ au lieu de n , et on prend K suffisamment large.

Ensuite, on régularise le système en introduisant

$$-\Delta c_\varepsilon = n_\varepsilon \star \rho_\varepsilon - \alpha c_\varepsilon$$

où ρ_ε est un noyau régularisant. On obtient le théorème suivant (Je rappelle le système d'abord) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \chi \nabla \cdot [n \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ -\Delta c = n - \alpha c, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

Théorème (Existence pour le système du chimiotactisme) *On suppose $d \geq 2$ et on considère $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $n_0 \geq 0$. Alors, il existe une constante $K_0(\kappa, \chi, d)$ telle que si $\|n_0\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq K_0$, alors le système a une solution faible (n, c) globale en temps telle que pour tout $t > 0$*

$$\|n(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \|n_0\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

$$\|n(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \|n_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}, \quad \max\{1; \frac{d}{2} - 1\} \leq p \leq \frac{d}{2},$$

et

$$\|n(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C(t, K_0, \|n_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}) \quad \frac{d}{2} < p \leq \infty.$$

Le système classique de la chimiotaxie

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n = \nabla \cdot [\kappa(n, c) \nabla n - \chi(n, c) \nabla c], \quad t > 0, x \in \Omega, \\ \partial_t c = \eta \Delta c + \beta(n, c) n - \gamma(n, c) c, \quad t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), \quad c(0, x) = c_0(x). \end{array} \right.$$

+ conditions au bord, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$,

n est la densité de la population,

c est la densité du chimio-attracteur,

χ est la sensibilité du chimio-attracteur.

Un 2e modèle : Système (parabolique-dégénéré) de l'angiogénèse. Modèle de croissance de vaisseaux sanguins autour d'une tumeur cancéreuse.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \nabla \cdot [n \chi(c) \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial t} c = -c^m n, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), \quad c(0, x) = c_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

où $m > 0$ et (par exemple) $\chi(c) = c^{-\alpha}$.

Conservation de la masse : $\int n(x, t) dx = \int n_0(x) dx .$

Conservation de la masse : $\int n(x, t) dx = \int n_0(x) dx$.

Principe du maximum : $n(x, t) \geq 0$ et $0 \leq c(x, t) \leq \|c_0\|_{L^\infty}$.

Conservation de la masse : $\int n(x, t) dx = \int n_0(x) dx$.

Principe du maximum : $n(x, t) \geq 0$ et $0 \leq c(x, t) \leq \|c_0\|_{L^\infty}$

Forme divergence : Soit $v = \frac{n}{\phi(c)}$, où ϕ est définie par

$$\phi'(c) = \frac{1}{\kappa} \phi(c) \chi(c) \quad c > 0, \quad \phi(0) = 1.$$

Alors,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n}{\phi(c)} \right) = \kappa \frac{1}{\phi(c)} \nabla \cdot \left[\phi(c) \nabla \left(\frac{n}{\phi(c)} \right) \right] + \frac{1}{\kappa} \left(\frac{n}{\phi(c)} \right)^2 \phi(c) \chi(c) c^m.$$

Inégalité différentielle fondamentale ($\Omega = \mathbb{R}^d$) :

Pour tout $p \geq \max(1, \frac{d}{2} - 1)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left(\frac{n}{\phi(c)} \right)^p \phi(c) \\ & \leq (p - 1) \|\nabla \left(\frac{n}{\phi(c)} \right)^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\frac{1}{\kappa} \tilde{C}(d) K_1 \|\phi^{2/d}(c)\|_{L^2} \left(\frac{n}{\phi(c)} \right) \right]^{\frac{d}{2} - \frac{4\kappa}{p}}, \end{aligned}$$

Inégalité différentielle fondamentale ($\Omega = \mathbb{R}^d$) :

Pour tout $p \geq \max(1, \frac{d}{2} - 1)$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int \left(\frac{n}{\phi(c)} \right)^p \phi(c) \\ & \leq (p - 1) \|\nabla \left(\frac{n}{\phi(c)} \right)^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\frac{1}{\kappa} \tilde{C}(d) K_1 \|\phi^{2/d}(c)\|_{L^{\frac{d}{2} - \frac{4\kappa}{p}}} \right], \end{aligned}$$

analogue à l'inégalité du système parabolique-elliptique :

$$\frac{d}{dt} \int n^p \leq (p - 1) \|\nabla n^{p/2}\|_{L^2}^2 \left[\chi \tilde{C}(d) \|n\|_{L^{\frac{d}{2} - \frac{4\kappa}{p}}} \right].$$

On fait donc de même, et on obtient le théorème suivant (je rappelle le système d'abord) :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} n = \kappa \Delta n - \nabla \cdot [n \chi(c) \nabla c], & t > 0, x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial t} c = -c^m n, & t > 0, x \in \Omega, \\ n(0, x) = n_0(x), \quad c(0, x) = c_0(x), & x \in \Omega. \end{array} \right.$$

où $m > 0$.

Théorème (Existence pour le système de l'angiogénèse).

On suppose que $d \geq 2$, $m \geq 1$ et χ est une fonction positive définie sur $[0, \infty)$. On considère $n_0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $c_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que $n_0 \geq 0$ et $c_0 \geq 0$. Alors, il existe une constante $K_0(\kappa, \chi, d, \|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)})$ telle que si $\|n_0\|_{L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq K_0$, alors le système de l'angiogénèse a une solution faible (n, c) globale en temps telle que $n \in L^\infty(\mathbb{R}^+, L^1 \cap L^{\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d))$, $c \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d)$ et pour tout $p^ \geq \max\{1; \frac{d}{2} - 1\}$,*

$$\|n(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq C(t, K_0, p^*, \|n_0\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}),$$

$$\forall \max\{1; \frac{d}{2} - 1\} \leq p \leq p^*.$$