Sur l'homologie des espaces d'immersions.

Jean-François Le Borgne[1]
avec David Chataur[1]

[1]Laboratoire Paul Painlevé
Université de Lille 1.

31 octobre 2008 - Exposé GDR.

Théorème de D.Gromoll et W.Meyer (1969).
Soit M une variété riemannienne compacte simplement connexe, si les nombres de Betti de $H^*(\mathcal{L}M, \mathbb{Q})$ forment une suite non bornée, alors M admet une infinité de géodésiques fermées.

Remarque. Ces hypothèses sont satisfaites si $H^*(M, \mathbb{Q})$ ne peut être engendré par un seul générateur (M.Vigué-Poirrier et D.Sullivan).

notations préliminaires.

- M variété lisse compacte connexe sans bord de dimension finie d.
- $emb(S^1, M) =:$ espace des plongements du cercle dans M.
- $imm(S^1, M) =:$ espace des immersions du cercle dans M.
- $i : emb(S^1, M) \hookrightarrow imm(S^1, M)$.

notations préliminaires.

- M variété lisse compacte connexe sans bord de dimension finie d.
- $emb(S^1, M) =:$ espace des plongements du cercle dans M.
- $imm(S^1, M) =:$ espace des immersions du cercle dans M.
- $i : emb(S^1, M) \hookrightarrow imm(S^1, M)$.

notations préliminaires.

- M variété lisse compacte connexe sans bord de dimension finie d.
- $emb(S^1, M) =:$ espace des plongements du cercle dans M.
- $imm(S^1, M) =:$ espace des immersions du cercle dans M.
- $i : emb(S^1, M) \hookrightarrow imm(S^1, M)$.

notations préliminaires.

- M variété lisse compacte connexe sans bord de dimension finie d.
- $emb(S^1, M) =:$ espace des plongements du cercle dans M.
- $imm(S^1, M) =:$ espace des immersions du cercle dans M.
- $i : emb(S^1, M) \hookrightarrow imm(S^1, M)$.

notations préliminaires.

- M variété lisse compacte connexe sans bord de dimension finie d.
- $emb(S^1, M) =:$ espace des plongements du cercle dans M.
- $imm(S^1, M) =:$ espace des immersions du cercle dans M.
- $i : emb(S^1, M) \hookrightarrow imm(S^1, M)$.

Objectif de l'exposé.

Soit $n \geq 2$ un entier. Alors

$$\mathbb{H}_*(imm(S^1, S^{2n})) \simeq \mathbb{H}_*(\mathcal{L}US^{2n})$$

est isomorphe à

$$\mathbb{Z}[x_{-4n+1}, y_{-2n}, \alpha_{2n-2}, \beta_{4n-2}, k_{-1}]$$

quotienté par les relations

$$(x^2_{-4n+1}, x_{-4n+1}y_{-2n}, x_{-4n+1}k_{-1}, 2y_{-2n}, y^2_{-2n})$$

et

$$(y_{-2n}k_{-1} - x_{-4n+1}\alpha_{2n-2}, 2k_{-1}, 2\alpha_{2n-2}).$$

Objectif de l'exposé.

Soit $n \geq 2$ un entier. Alors

$$\mathbb{H}_*(imm(S^1, S^{2n+1})) \simeq \mathbb{H}_*(\mathcal{L}US^{2n+1}) \simeq \mathbb{H}_*(\mathcal{L}S^{2n+1}) \otimes \mathbb{H}_*(\mathcal{L}S^{2n})$$

est isomorphe à

$$\mathbb{Z}[x_{-2n-1}, v_{2n}, y_{-2n}, u_{4n-2}, \theta_{-1}]/(x^2_{-2n-1}, y^2_{-2n}, \theta^2_{-1}, 2y_{-2n}u_{4n-2}).$$

Plan

Hypothèses sur l'énergie.

Les points critiques de E forment des variétés. A la valeur critique λ_r est associée la variété critique Σ_r. Nous supposons que les variétés critiques sont compactes, sans bord, de dimension finie.
De plus, nous supposons que ces variétés satisfont la condition de non dégénérescence de Morse Bott : le Hessien de E n'est pas dégénéré dans la direction normale à Σ_r.

Suite spectrale de Morse.

Théorème 1 (Morse) : *La filtration de $C_*(\mathcal{L}M)$ par les niveaux d'énergie critiques mène à une suite spectrale $\{E^r_{*,*}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M)\}_{r\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $H_*(\mathcal{L}M)$.*

$$E^r_{p,q}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M) \Rightarrow H_{p+q}(\mathcal{L}M).$$

La page E^1 est donnée par
$E^1_{p,q}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M) = H_{p+q}(\mathcal{L}M^{\leq\lambda_p}, \mathcal{L}M^{\leq\lambda_{p-1}})$.

Calcul de la première page de la suite spectrale de Morse.

Lemme 2. *La première page de la suite spectrale est donnée par l'homologie de l'espace de Thom du fibré vectoriel* $\mathbb{R}^{\alpha_p} \to \mu^-(\lambda_p) \to \Sigma_p$. *Plus précisément,* $E^1_{p,q}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M)$ *est isomorphe à l'homologie réduite* $\tilde{H}_{p+q}(Th(\mu^-(\lambda_p)))$.

Calcul de la première page de la suite spectrale de Morse.

Lemme 3. *L'application*

$$C : \Sigma_r \to UM$$

$$\gamma \mapsto (\gamma(0), \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|})$$

est un difféomorphisme.

Corollaire. *Si $p \geq 1$, alors*

$$E^1_{p,q}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M) \simeq \tilde{H}_{p+q}(Th(\mu^-(\lambda_p)))$$

$$\simeq H_{p+q-\alpha_p}(UM)$$

L'homologie $H_*(\mathcal{L}S^n)$.

Théorème 4 (W.Ziller, 1977). *Si n est impair,*

$$H_k(\mathcal{L}S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

si $k = 0, m(n-1)$ *ou* $k = m(n-1)+1$, $m \geq 1$.

Si n est pair,

$$H_k(\mathcal{L}S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

si $k = 0, (2m+1)(n-1)+1, (2m+1)(n-1))$, $m \geq 0$.

$$H_k(\mathcal{L}S^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$$

si $k = 0, 2m(n-1)$, $m \geq 1$.

Définition du loop produit.

- $\delta_M : M \hookrightarrow M \times M,\ x \mapsto (x, x)$
- $\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M =: \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M / \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$
- $$\begin{tikzcd} \mathcal{L}M & \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M \arrow[l, "comp"'] \arrow[r, hook, "\tilde{\delta}_M"] \arrow[d, "ev_\infty"] & \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \arrow[d, "ev(0) \times ev(0)"] \\ & M \arrow[r, hook, "\delta_M"] & M \times M \end{tikzcd}$$
- $$\mu : H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \xrightarrow{\times} H_*(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{M!}}$$
$$H_{*-d}(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \xrightarrow{comp_{M*}} H_{*-d}(\mathcal{L}M).$$

Définition du loop produit.

- $\delta_M : M \hookrightarrow M \times M,\ x \mapsto (x, x)$
- $\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M =: \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M / \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$
- $$\begin{tikzcd} \mathcal{L}M & \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M \arrow[l, "comp"'] \arrow[r, hook, "\tilde{\delta}_M"] \arrow[d, "ev_\infty"] & \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \arrow[d, "ev(0)\times ev(0)"] \\ & M \arrow[r, hook, "\delta_M"] & M \times M \end{tikzcd}$$
- $$\mu : H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \xrightarrow{\times} H_*(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{M!}}$$
  $$H_{*-d}(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \xrightarrow{comp_{M*}} H_{*-d}(\mathcal{L}M).$$

Définition du loop produit.

- $\delta_M : M \hookrightarrow M \times M$, $x \mapsto (x, x)$
- $\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M =: \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M / \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$
- $$\begin{tikzcd} \mathcal{L}M & \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M \arrow[l, "comp"'] \arrow[r, hook, "\tilde{\delta}_M"] \arrow[d, "ev_\infty"] & \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \arrow[d, "ev(0)\times ev(0)"] \\ & M \arrow[r, hook, "\delta_M"] & M \times M \end{tikzcd}$$
- $$\mu : H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \xrightarrow{\times} H_*(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{M!}}$$
$$H_{*-d}(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \xrightarrow{comp_{M*}} H_{*-d}(\mathcal{L}M).$$

Définition du loop produit.

- $\delta_M : M \hookrightarrow M \times M, x \mapsto (x, x)$
- $\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M =: \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M / \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$
- $$\begin{tikzcd} \mathcal{L}M & \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M \arrow[l, "comp"'] \arrow[r, hook, "\tilde{\delta}_M"] \arrow[d, "ev_\infty"] & \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \arrow[d, "ev(0)\times ev(0)"] \\ & M \arrow[r, hook, "\delta_M"] & M \times M \end{tikzcd}$$
- $$\mu : H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \xrightarrow{\times} H_*(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{M!}}$$
$$H_{*-d}(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \xrightarrow{comp_{M*}} H_{*-d}(\mathcal{L}M).$$

Définition du loop produit.

- $\delta_M : M \hookrightarrow M \times M,\ x \mapsto (x, x)$
- $\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M =: \{(\gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M / \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$
- $$\begin{tikzcd} \mathcal{L}M & \mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M \arrow[l, "comp"'] \arrow[r, hook, "\tilde{\delta}_M"] \arrow[d, "ev_\infty"] & \mathcal{L}M \times \mathcal{L}M \arrow[d, "ev(0)\times ev(0)"] \\ & M \arrow[r, hook, "\delta_M"] & M \times M \end{tikzcd}$$
- $$\mu : H_*(\mathcal{L}M) \otimes H_*(\mathcal{L}M) \xrightarrow{\times} H_*(\mathcal{L}M \times \mathcal{L}M) \xrightarrow{\tilde{\delta}_{M!}}$$
  $$H_{*-d}(\mathcal{L}M \times_M \mathcal{L}M) \xrightarrow{comp_{M*}} H_{*-d}(\mathcal{L}M).$$

Définition du loop produit.

Théorème 5 (M.Chas, D.Sullivan, 1999). *Le loop produit confère à l'homologie regraduée* $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}M) =: H_{*+d}(\mathcal{L}M)$ *une structure d'algèbre graduée commutative.*

L'algèbre de Chas et Sullivan des sphères.

Théorème 6 (R.Cohen, J.D.S Jones, J. Yan, 2002).
Si n est impair,

$$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}S^n) = \mathbb{Z}[x_{-n}, y_{n-1}]/(x_{-n}^2).$$

Si n est pair,

$$\mathbb{H}_*(\mathcal{L}S^n) = \mathbb{Z}[x_{-n}, t_{-1}, z_{2n-2}]/(x_{-n}^2, t_{-1}^2, 2x_{-n}z_{2n-2}).$$

Compatibilité du loop produit à la filtration de Morse.

Proposition 7 (D'après N.Hingston et M.Goresky, 2007). *Soit M variété riemannienne compacte connexe sans bord de dimension finie d.*
Supposons que les valeurs critiques de l'énergie E sur $\mathcal{L}M$ vérifient $\lambda_{r+r'} \leq \lambda_r + \lambda_{r'}$.
Alors le loop produit respecte la filtration de Morse et induit sur la suite spectrale de Morse regraduée une structure multiplicative.

Suite spectrale de Morse multiplicative.

Théorème 8 (D'après N.Hingston and M.Goresky, 2007). *Soit M vérifiant les hypothèses de la proposition précédente. La structure multiplicative sur la suite spectrale de Morse regraduée $\mathbb{E}^r_{p,q}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M) := E^r_{p,q+d}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M)$ est donnée au niveau E^1 par :*

$$\mathbb{E}^1_{*,*}(\mathcal{M})(\mathcal{L}M) = \mathbb{H}_*(M) \oplus \mathbb{H}_*(UM)[T].$$

Le bidegré de T est $(1, \alpha_1 - 1)$.

Le loop produit sur les immersions.

- $$ev_0 : Imm(S^1, M) \to UM$$
$$ev_0(\gamma) = (\gamma(0), \frac{\dot{\gamma}(0)}{\|\dot{\gamma}(0)\|})$$
- $$\begin{array}{ccc} imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) & \xrightarrow{\tilde{\delta}_{UM}} & imm(S^1, M) \times imm(S^1, M) \\ \downarrow & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ UM & \xrightarrow{\delta_{UM}} & UM \times UM \end{array}$$
- $comp : imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) \to imm(S^1, M)$
- $\mathbb{H}_*(imm(S^1, M)) := H_{*+2d-1}(imm(S^1, M))$.

Le loop produit sur les immersions.

- $$ev_0 : Imm(S^1, M) \to UM$$
  $$ev_0(\gamma) = (\gamma(0), \frac{\dot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0)\|})$$
- $$\begin{array}{ccc} imm(S^1,M) \times_{UM} imm(S^1,M) & \xrightarrow{\tilde\delta_{UM}} & imm(S^1,M) \times imm(S^1,M) \\ \downarrow & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ UM & \xrightarrow{\delta_{UM}} & UM \times UM \end{array}$$
- $comp : imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) \to imm(S^1, M)$
- $\mathbb{H}_*(imm(S^1, M)) := H_{*+2d-1}(imm(S^1, M))$.

Le loop produit sur les immersions.

- $$ev_0 : Imm(S^1, M) \to UM$$
  $$ev_0(\gamma) = (\gamma(0), \frac{\dot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0)\|})$$

- $$\begin{array}{ccc} imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) & \xrightarrow{\tilde\delta_{UM}} & imm(S^1, M) \times imm(S^1, M) \\ \downarrow & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ UM & \xrightarrow{\delta_{UM}} & UM \times UM \end{array}$$

- $comp : imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) \to imm(S^1, M)$
- $\mathbb{H}_*(imm(S^1, M)) := H_{*+2d-1}(imm(S^1, M))$.

Le loop produit sur les immersions.

- $$ev_0 : Imm(S^1, M) \to UM$$
$$ev_0(\gamma) = (\gamma(0), \frac{\dot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0)\|})$$

- $$\begin{array}{ccc} imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) & \xrightarrow{\tilde\delta_{UM}} & imm(S^1, M) \times imm(S^1, M) \\ \downarrow & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ UM & \xrightarrow{\delta_{UM}} & UM \times UM \end{array}$$

- $comp : imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) \to imm(S^1, M)$
- $\mathbb{H}_*(imm(S^1, M)) := H_{*+2d-1}(imm(S^1, M))$.

Le loop produit sur les immersions.

- $$ev_0 : Imm(S^1, M) \to UM$$
  $$ev_0(\gamma) = (\gamma(0), \frac{\dot\gamma(0)}{\|\dot\gamma(0)\|})$$
- $$\begin{array}{ccc} imm(S^1,M) \times_{UM} imm(S^1,M) & \xrightarrow{\tilde\delta_{UM}} & imm(S^1,M) \times imm(S^1,M) \\ \downarrow & & \downarrow ev_0 \times ev_0 \\ UM & \xrightarrow{\delta_{UM}} & UM \times UM \end{array}$$
- $comp : imm(S^1, M) \times_{UM} imm(S^1, M) \to imm(S^1, M)$
- $\mathbb{H}_*(imm(S^1, M)) := H_{*+2d-1}(imm(S^1, M))$.

Théorème de Hirsh-Smale

Théorème 9 (Hirsh, Smale). *L'application*

$$D : imm(S^1, M) \to \mathcal{L}UM$$

$$\gamma \mapsto (\gamma, \dot{\gamma})$$

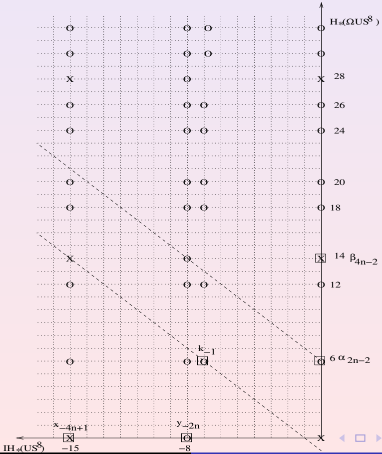
est une équivalence d'homotopie.

Lemme 10. *Le morphisme D_* induit en homologie par D est un isomorphisme d'algèbre entre $\mathbb{H}_*(imm(S^1, M))$ et $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}UM)$.*

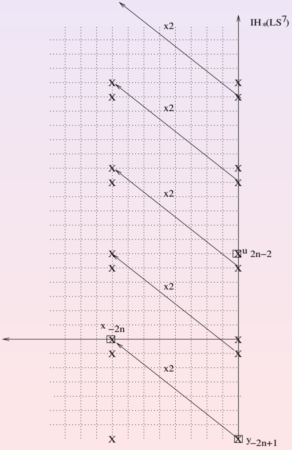
Suite spectrale de Morse-Serre multiplicative.

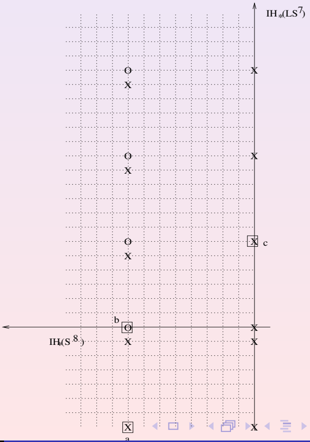
Théorème 11 (D.Chataur, J.F. Le Borgne, 2008). *La filtration par l'énergie de $C_*(\mathcal{L}X)$ induit une suite spectrale notée $\{\mathbb{E}^r_{*,*}(\mathcal{MS})(\mathcal{L}\pi)\}_{r\in\mathbb{N}}$. Elle converge vers $\mathbb{H}_*(\mathcal{L}X)$. Le loop produit induit sur cette suite spectrale une structure multiplicative.*

Suite spectrale de Cohen-Jones-Yan de $\Omega US^{2n} \to \mathcal{L}US^{2n} \to US^{2n}$.

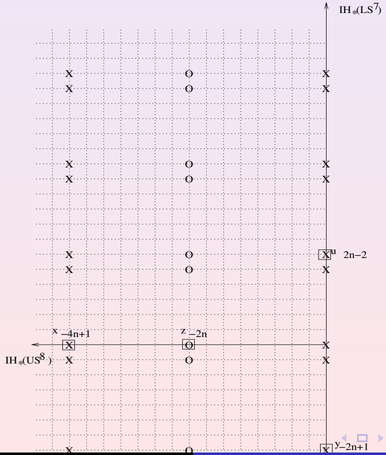


Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n-1} \to \mathcal{L}US^{2n} \to \mathcal{L}S^{2n}$, colonne 0.

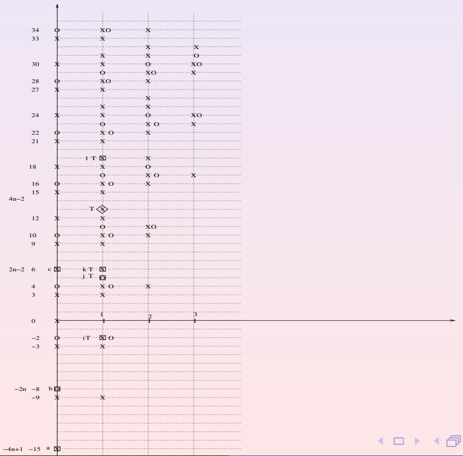




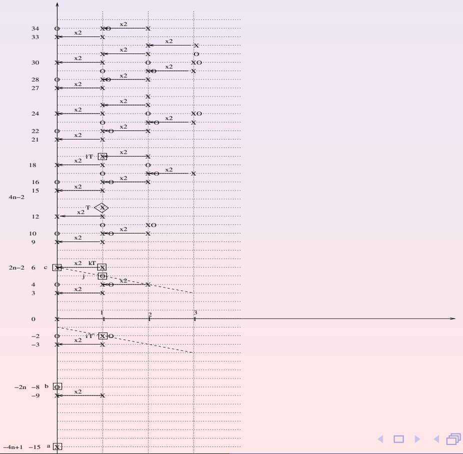
Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n-1} \to \mathcal{L}US^{2n} \to \mathcal{L}S^{2n}$, colonne 1.



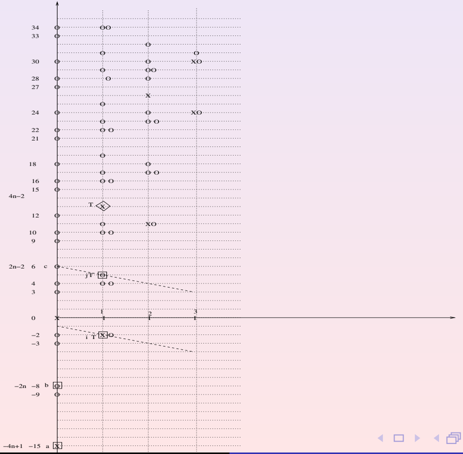
Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n-1} \to \mathcal{L}US^{2n} \to \mathcal{L}S^{2n}$.



Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n-1} \to \mathcal{L}US^{2n} \to \mathcal{L}S^{2n}$.



Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n-1} \to \mathcal{L}US^{2n} \to \mathcal{L}S^{2n}$.



$\mathbb{H}_*(imm(S^1, S^{2n}))$

Théorème 12 (D.Chataur, J.F. Le Borgne, 2008). *Soit $n \geq 2$ un entier. Alors*

$$\mathbb{H}_*(imm(S^1, S^{2n})) \simeq \mathbb{H}_*(\mathcal{L}US^{2n})$$

est isomorphe à

$$\mathbb{Z}[x_{-4n+1}, y_{-2n}, \alpha_{2n-2}, \beta_{4n-2}, k_{-1}]$$

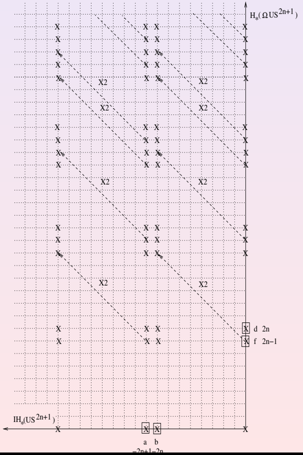
quotienté par les relations

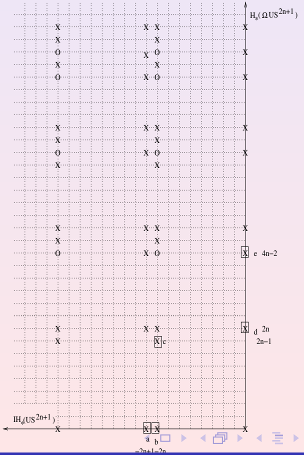
$$(x^2_{-4n+1}, x_{-4n+1}y_{-2n}, x_{-4n+1}k_{-1}, 2y_{-2n}, y^2_{-2n})$$

et

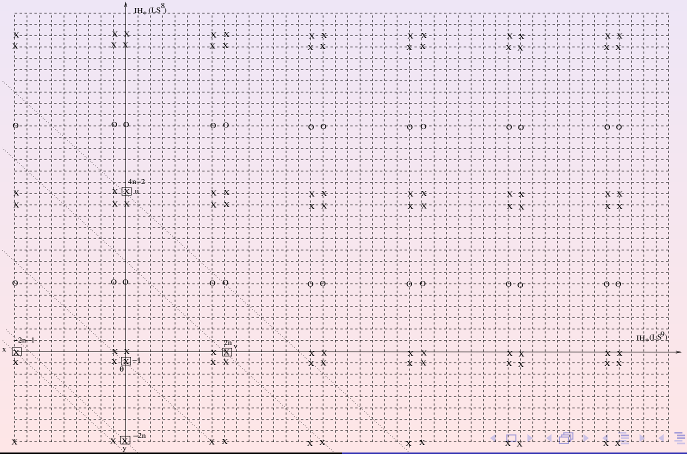
$$(y_{-2n}k_{-1} = x_{-4n+1}\alpha_{2n-2}, 2k_{-1}, 2\alpha_{2n-2}).$$

Suite spectrale de Cohen-Jones-Yan de $\Omega US^{2n+1} \to LUS^{2n+1} \to US^{2n+1}$.

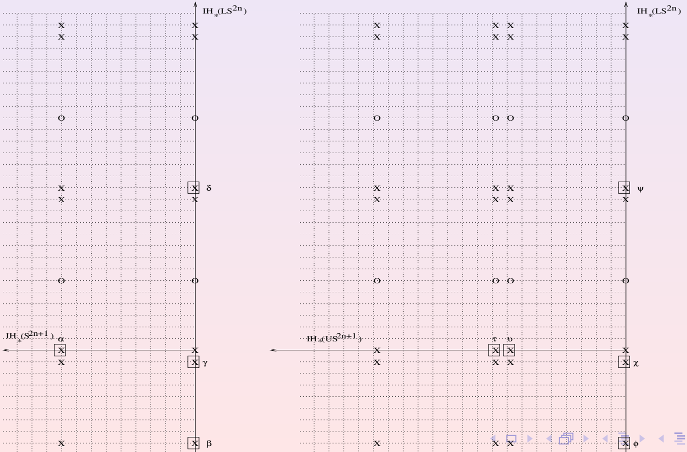




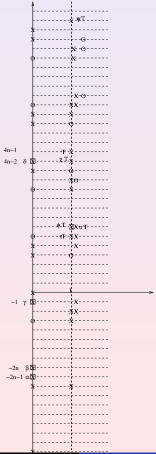
Suite spectrale de Serre de $LS^{2n} \to LUS^{2n+1} \to LS^{2n+1}$.



Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n} \rightarrow \mathcal{L}US^{2n+1} \rightarrow \mathcal{L}S^{2n+1}$, colonne 0 et 1.



Suite spectrale de Morse-Serre de $\mathcal{L}S^{2n} \to \mathcal{L}US^{2n+1} \to \mathcal{L}S^{2n+1}$.



$\mathbb{H}_*(imm(S^1, S^{2n+1}))$

Théorème 12 (suite).
Soit $n \geq 2$ un entier. Alors

$$\mathbb{H}_*(imm(S^1, S^{2n+1})) \simeq \mathbb{H}_*(\mathcal{L}US^{2n+1}) \simeq \mathbb{H}_*(\mathcal{L}S^{2n+1}) \otimes \mathbb{H}_*(\mathcal{L}S^{2n})$$

est isomorphe à

$$\mathbb{Z}[x_{-2n-1}, v_{2n}, y_{-2n}, u_{4n-2}, \theta_{-1}]/(x^2_{-2n-1}, y^2_{-2n}, \theta^2_{-1}, 2y_{-2n}u_{4n-2}).$$