Classes universelles pour les groupes algebriques et engendrement fini des algèbres de cohomologie

Refs : [T, VdK] Arkiv 0809.1014
[T] ArXiv 0809.0989

Th : [T, VdK] k corps, G gpe alg lin sur k, reductif
$G \curvearrowright A$ alg comm de type fini
Alors $H^*(G, A)$ alg de type fini.

Intro

1. Groupes alg. et cohomologie.

1

groupes algebriques linéaires
G

ex : sous-groupes de matrices $G \subset M_n(k)$ definis par des eqns polynomiales

---

$$\text{G-mod}/k \xrightarrow{\text{pt fixes}} k\text{-ev}$$
$$M \longmapsto M^G$$

k-ev M muni d'une action lin de G

le fcteur des pts fixes est exact à gauche seulement

le ~~hyper~~cohom repare ce defaut d'exactitude

$$H^i(G, -) = R^i(-^G)$$

3

caract > 0

cohom de G gpe alg
↓
cohom du gpe fini $G(\mathbb{F}_q)$
q grd, coeffs qcq

[CPSVdK, 1977]

2

Algèbres de Hopf comm. type fini
$k[G]$
Alg de Hopf reduites (pas de nilpotents)

comod M sur $k[G]$

$H^*(k[G], M)$
hochschild

4

Gpe reductif : radical unipotent $R_u(G) \subset G$ est trivial

ex : {gpes semi-simples $Sl_n, SO_n, \ldots$
{gpes finis

2. Origine pb

* Hilbert 1890 : $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ type fini
  14^e pb de Hilbert : comment ce résultat se généralise ?

* Def : G a prop (FG) si $\forall A \circlearrowleft G$ comm type fini, A^G type fini
  motivation (1960es) GIT, Mumford.

[Nagata - Haboush - Popov (1964-1975-1979)
G vérifie (FG) $\Longleftrightarrow$ G groupe réductif

* Def : G a prop (CFG) si $\forall A \circlearrowleft G$ comm type fini, $H^*(G,A)$ type fini
  motivation : support variétés

Q : quels G ont (CFG) ?
Rq : (CFG) $\Rightarrow$ (FG). Quelles hyp supplémentaires ?

[Evens - Venkov (1961-1959)
Gpes finis ont (CFG)

[Friedlander - Suslin (1997)
Les groupes tq $k[G]$ de dim finie ont (CFG)

Conj de VdK (2001) : il n'y a pas besoin d'hypothèse suppl.

Reformulation Thm. [k corps, G gpe alg /sur k.
G vérifie (FG) $\Longleftrightarrow$ G vérifie (CFG).

Principe de la demonstration
et intervention des classes universelles

V courti.

Rq1 : on peut se restreindre à $G = Gl_n$

$$H^*(G, A) \simeq H^*(Gl_n, \underbrace{\mathrm{ind}_G^{Gl_n} A}_{\text{alg type fini comm.}})$$

Rq2 : en caract 0, $H^*(G, A) = 0$ pour $* > 0$ $\Rightarrow$ rien à prouver

on regarde caract $p > 0$.

* On approxime A par une algèbre B qui n'a pas de cohomologie supérieure.

$$E_1^{ij} \Rightarrow H^{i+j}(G, A).$$ s.s Algèbres.

en utilisant theorie invariants, E_k^{ij} = algs de type fini.

Si on arrive à montrer que s.s. degénère, c'est gagné.

* Methode std pour montrer qu'une s.s. dégénère : (Evens, FS)

trouver un anneau $\mathcal{O}$ d'operateurs

$$\mathcal{O} \curvearrowright E^{ij} \quad , \quad E_k^{ij} \quad \mathcal{O}\text{-mod noeth.}$$ APCR k.

Pb pour construire cet anneau d'operateurs :
k corps caract $p > 0$, $n \geq 2$ un entier.

Trouver des "classes universelles" $c[m] \in H^{2m}(GL_n, \Gamma^m(gl_n^{(1)}))$

tq : $\begin{cases} \bullet\ c[1] \neq 0 & \text{(i)} \\ \bullet\ \Delta_{i,j*} c[i+j] = c[i] \cup c[j]. & \text{(ii)} \end{cases}$

[T] Thm Soit k un corps de caract $p > 0$, $n \geq 2$
Les classes universelles existent

Construction des classes universelles

- Rq1 : c'est un calcul de cohom stable, i.e $n \gg 0$.

si $c[m]$ pour n_0. $\longrightarrow$ classes $c'[m]$ pour $n \leq n_0$

(ii) conservées

(i) $H^2(Gl_n, gl_n^{(1)}) \simeq \Bbbk$

Cohom stable $\longrightarrow$ cadre naturel pour les calculs : (bi) foncteurs polynomiaux.

Foncteur polyn.$=$

$$H^*_{\mathcal{P}}(B) = \mathrm{Ext}^*(\Gamma^* gl, B)$$

$V \mapsto \Gamma^d(V)$
$W \mapsto W^{(1)}$
$gl(V,W) = \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(V,W)$.

- Rq2 : Calcul complet de cohom $H^*_{\mathcal{P}}(\Gamma^*(gl^{(1)}))$ inaccessible

$\hat{m}$ stable

$\longrightarrow$ construire une rés inj explicite de $\Gamma^n(gl^{(1)})$ et calculer des cycles explicites de cette résolution

$$c[m] = \underbrace{c[1] \cup \ldots \cup c[1]}_{m \text{ fois}} \in H^*_{\mathcal{P}}(gl^{(1)\otimes m})$$

$$\Gamma^m(gl^{(1)}) \longrightarrow (gl^{(1)})^{\otimes m} \xrightarrow[\Pi(1-\tau_i)]{} \bigoplus_{i=1}^{m} (gl^{(1)})^{\otimes m}$$

$Z[1]$ cycle qui repres $c[1]$

$\underbrace{Z[1] \cup \ldots \cup Z[1]}_{m \text{ fois}}$ ferait l'affaire