

Classes universelles pour les groupes algébriques et engendrement fini des algèbres de cohomologie

Refs: [T, VdK] ArXiv 0809.1014
 [T] ArXiv 0809.0989

Th: k corps, G type alg lin sur k , réductif
 $G \curvearrowright A$ alg comm de type fini
 Alors $H^*(G, A)$ alg de type fini.

Intro

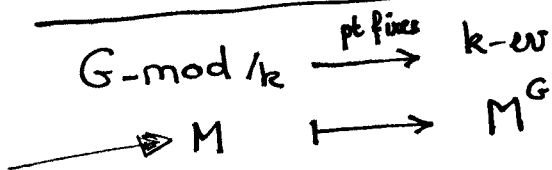
1. Groupes alg. et cohomologie.

①

groupes algébriques linéaires
 G

ex: sous-groupes de matrices $G \subset M_n(k)$ définis par des eqns polynomiales

k ker M moni de une adm lin de G



le foncteur des pts fixes est exact à gauche

le foncteur H^i repare ce défaut d'exactitude

$$H^i(G, -) = R^i(-G)$$

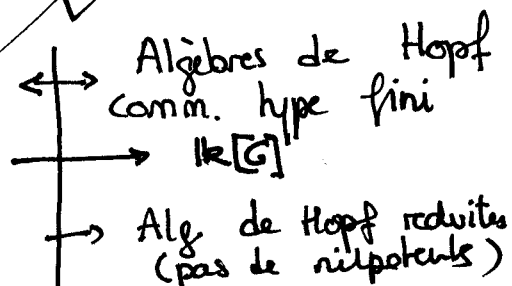
② Type réductif:
 radical unipotent $R_u(G) \subset G$ est trivial

ex: types semi-simples SL_n, SO_n, \dots
 types finis

③ caract > 0
 cohom de G spe alg
 ↓
 cohom du spe fini $G(\mathbb{F}_q)$
 q gal, coeff q eq

[CPSWK, 1977]

?



comod M sur $k[G]$

$$H^*_{\text{Hochschild}}(k[G], M)$$

2. Origine pb

* Hilbert 1890 : $A^{SL_n(\mathbb{C})}$ hype fini
14^e pb de Hilbert : comment ce resultat se generalise ?

* Def : G a prop (FG) si $\forall A \curvearrowright^G$ comm hype fini, A^G hype fini
motivation GIT, Mumford.
(1960^{es})

[Nagata - Haboush - Popov (1964-1975-1979)
 G verifie (FG) \iff G groupe reductif

* Def : G a prop (CFG) si $\forall A \curvearrowright^G$ comm hype fini, $H^*(G, A)$ hype fini
motivation : support varietes

Q : quels G ont (CFG) ?

Rq : (CFG) \implies (FG). Quelles hyp supplementaires ?

[Evens - Ventevou (1961-1959)
Gps finis ont (CFG)

[Friedlander - Suslin (1997)
les groupes tq $k[G]$ de dim finie ont (CFG)

Conj de UdK (2001) : il n'y a pas besoin d'hypothese suppl.

Reformulation

Thm [k corps, G spec algebre sur k .
 G verifie (FG) \iff G verifie (CFG).

Principe de la démonstration et intervention des classes universelles

V court.

Rq1: on peut se restreindre à $G = GL_n$
 $H^*(G, A) \cong H^*(GL_n, \underbrace{\text{Ind}_G^{GL_n} A}_{\text{alg type fini comm.}})$

Rq2: en caract 0, $H^*(G, A) = 0$ pour $n > 0 \Rightarrow$ rien à prouver
 on regarde caract $p > 0$.

* On approxime A par une algèbre B qui n'a pas de cohomologie supérieure.

$$E_1^{ij} \Rightarrow H^{i+j}(G, A). \quad \text{s.s. Algèbres.}$$

en utilisant théorie invariants, $E_k^{ij} =$ algs de type fini.

Si on arrive à montrer que s.s. dégénère, c'est gagné.

* Méthode std pour montrer qu'une s.s. dégénère: (Evens, FS)

trouver un anneau \mathcal{O} d'opérateurs

$$\mathcal{O} \curvearrowright E^{ij}, \quad E_k^{ij} \quad \mathcal{O} \text{-mod noeth. APCR } k.$$

Pb pour construire cet anneau d'opérateurs:
 Ik corps caract $p > 0$, $n \geq 2$ un entier.

Trouver des classes universelles $c[m] \in H^*(GL_n, \Gamma^m(\mathfrak{gl}_n^{(n)}))$

$$\text{tg} : \begin{cases} \bullet c[i] \neq 0 & (i) \\ \bullet \Delta_{i,j} c[i+j] = c[i] \cup c[j] & (ii) \end{cases}$$

[T] Thm Soit k un corps de caract $p > 0$, $n \geq 2$
 Les classes universelles existent

Construction des classes universelles

4

• Rq1 : c'est un calcul de cohom stable, i.e. $n \gg 0$.

si $c[m]$ pour n_0 . \rightarrow classes $c[m]$ pour $n \leq n_0$
 (ii) conservées
 (i) $H^2(GL_n, \mathfrak{gl}_n^{(n)}) \simeq \mathbb{R}$

Cohom stable \rightarrow cadre naturel pour les calculs :
 (bi) foncteurs polynomiaux.

Foncteur polyn. =

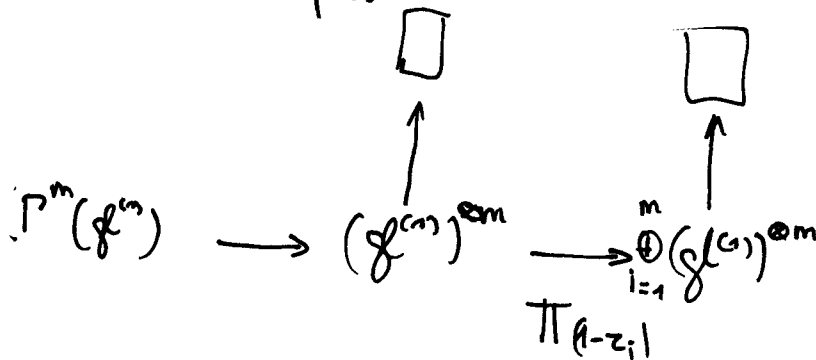
$$H_{\mathcal{P}}^*(B) = \text{Ext}^*(\Gamma_{\mathcal{P}}^*(B), B)$$

$$\begin{aligned} V &\mapsto \Gamma^d(V) \\ W &\mapsto W^{(d)} \\ \mathfrak{gl}(V, W) &= \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W). \end{aligned}$$

• Rq2 : Calcul complet de cohom $H_{\mathcal{P}}^*(\Gamma_{\mathcal{P}}^*(\mathfrak{gl}^{(n)}))$ \dots \hat{m} stable
 - inaccessible

\rightarrow construire une inj explicite de $\Gamma^n(\mathfrak{gl}^{(n)})$
 et calculer des cycles explicites de cette resolution

$$c[m] = \underbrace{c[1] \cup \dots \cup c[1]}_{m \text{ fois}} \in H_{\mathcal{P}}^*(\mathfrak{gl}^{(n) \otimes m})$$



$z[1]$ cycle qui repres $c[1]$
 $z[1] \cup \dots \cup z[1]$ $\underbrace{\hspace{10em}}_{m \text{ fois}}$ ferait l'affaire