



Université Paris XIII
Ecole d'ingénieurs SUP GALILEE

RAPPORT DE STAGE DE FIN D'ÉTUDES

Maître de stage : Santiago CARRILLO MENÉNDEZ
Tuteur universitaire : Marc WOUTS

APPLICATIONS DE LA FORMULE DE PYKHTIN À L'OPTIMISATION DES PORTEFEUILLES DE CRÉDIT EN TERME DE BÉNÉFICE/VAR

Mehdi KHALLOUFI

Villetaneuse, le 29 septembre 2011

Table des matières

1	Présentation de Quantitative Risk Research	7
1.1	Risklab Madrid et Quantitative Risk Research	7
1.2	Le déroulement du stage	7
1.3	Objectifs du stage	7
2	Mesures de risque	8
2.1	De l'utilité des mesures de risque	8
2.2	Quelques définitions	8
2.3	Volatilité	8
2.4	Value-at-Risk	8
2.4.1	Présentation	8
2.4.2	Méthodes de calcul de la VaR	9
2.4.3	Limites	9
3	Revue des modèles de risque de crédit	10
3.1	Le risque de crédit	10
3.2	Modèles structurels	10
3.3	Modèles à intensité	11
4	Formule analytique pour les modèles structurels	12
4.1	Présentation du modèle	12
4.2	Dérivées de la VaR	13
4.3	Approximation par le modèle à un facteur	14
4.4	Minimisation de la différence des quantiles dans le modèle multi-facteurs 15	
4.5	Ajustement pour le modèle multi-facteurs	16
5	Domaines d'applications de la formule de Pykhtin	18
5.1	Présentation des tests	18
5.2	Résultats de référence ou résultats "exacts"	19
5.2.1	Cas d'un nombre infini d'emprunteurs	19
5.2.2	Cas d'un nombre fini d'emprunteurs	20
5.3	Tests préliminaires	20
5.3.1	Nombre infini d'emprunteurs, portefeuille homogène	20
5.3.2	Nombre infini d'emprunteurs, portefeuille non homogène	22
5.3.3	Nombre fini d'emprunteurs, portefeuille homogène	24
5.3.4	Nombre fini d'emprunteurs, portefeuille non homogène	26
5.4	Tests de la granularité	27
5.5	Tests contributions	32
5.5.1	Portefeuille infiniment granulaire	32
5.5.2	Portefeuille non granulaire	33
5.6	Conclusion des tests	34

6	Améliorations	34
6.1	Calcul de la troisième dérivée de la VaR	34
6.1.1	Première approche	34
6.1.2	Deuxième approche	35
6.2	Coefficients c_i	36
7	Allocation optimale de portefeuille de crédit	39
7.1	Présentation du problème	39
7.2	Utilité de la formule de Pykhtin dans l'allocation de portefeuille	40
8	Conclusion	42
8.1	Sur le travail effectué	42
8.2	Sur le plan personnel	42
A	Calculs des dérivées de la VaR	43
A.1	D'après les travaux de Gourieroux, Laurent, Scaillet (2000)	43
A.2	D'après les travaux de Richard Martin (2002)	47
B	Minimisation de la différence des quantiles dans le modèle multi-facteurs	68
C	Dérivées de fonctions de répartition de lois normales multivariées	69
D	Calcul des contributions à la VaR	74

Résumé

Les modèles multi-facteurs utilisés dans la modélisation du risque de crédit, n'ayant pas de solution analytique, nécessitaient l'utilisation de simulations de Monte Carlo afin de calculer des mesures de risque basées sur des quantiles telles que la Value-at-Risk. Dans le présent rapport nous présenterons la formule analytique de Pykhtin permettant d'approximer la Value-at-Risk grâce à un ajustement granulaire. Nous montrerons le champ d'application de cette formule et tenterons d'améliorer sa précision. Nous montrerons finalement son utilité dans un contexte d'allocation optimale de risque dans un portefeuille de crédit.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier sincèrement M. Santiago Carrillo de m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce stage et de m'avoir accueilli au sein de Risklab Madrid. Son accueil fut chaleureux et cela a contribué grandement au bon déroulement de mon stage.

Je tiens à remercier toute l'équipe de QRR qui a facilité mon intégration au sein de leur entreprise. Je tiens particulièrement à remercier Lorenzo Hernández, avec qui j'ai eu le plaisir de travailler quotidiennement durant mon stage. Mes questions et nos débats permirent de grandes avancées dans mon travail.

Je tiens aussi à remercier M. Olivier Lafitte de m'avoir mis en contact avec M. Carrillo et m'a donc permis de saisir cette opportunité professionnelle. Ses conseils et son soutien m'ont été d'une grande utilité.

1 Présentation de Quantitative Risk Research

1.1 Risklab Madrid et Quantitative Risk Research

Risklab-Madrid est une unité de recherche de l'Université Autonome de Madrid créée en automne 1998. Son principal thème de recherche est la gestion des risques financiers. Risklab est un réseau de laboratoire présent en Allemagne, au Canada et en Suisse. En juin 2006, M. Carrillo, qui dirige Risklab-Madrid, décide de fonder Quantitative Risk Research, une société qui conçoit des logiciels à destination des principales banques espagnoles et effectue des missions de consulting et de formation au sein de celles-ci.

QRR est actuellement composée de 17 personnes, dont 9 associés. Son chiffre d'affaire annuel s'élève à environ 600 000 euros. Forte de son expérience dans le domaine de la gestion des risques financiers et de son partenariat avec la deuxième banque espagnole, QRR organise chaque année la "Journée des Risques Financiers". Cet événement, durant lequel sont présents de nombreux interlocuteurs reconnus, issus du monde académique et du monde professionnel, permet de présenter les principales avancées dans le domaine de la gestion des risques financiers et de confronter les différents points de vue.

1.2 Le déroulement du stage

Le stage a eu lieu au sein de Risklab et non QRR afin d'avoir accès à toutes les ressources universitaires et afin de ne pas être restreint dans les domaines d'étude par la nature des projets de QRR. Ainsi les thématiques abordées durant un stage peuvent ne pas être en lien direct avec les outils développés au sein de QRR tout en bénéficiant d'un encadrement de personnes hautement qualifiées en prise avec l'industrie bancaire. J'ai effectué mon stage au sein de l'équipe des Quants et notamment auprès de Lorenzo Hernández.

1.3 Objectifs du stage

Le point de départ de ce stage est un article de Michael Pykhtin publié en 2004. Cet article traite d'une méthode analytique de calcul de la Value-at-Risk dans un cadre où seules des simulations de Monte Carlo pouvaient être utilisées. Le premier objectif de ce stage fut donc d'étudier les limites de la formule que Pykhtin présente dans son article et de définir le plus précisément son champ d'application. Cette formule étant actuellement utilisée dans le milieu bancaire, le second objectif fut d'améliorer ce modèle. Aucune direction particulière n'étant privilégiée par l'équipe, je fus donc libre d'explorer celles qui me paraissaient être pertinentes au vue de l'utilisation qui en est faite dans les banques.

2 Mesures de risque

2.1 De l'utilité des mesures de risque

Une entreprise intervenant sur les marchés financiers se doit de connaître les pertes qu'elle est susceptible de subir en cas de mouvement de marché défavorable. Avec la multiplication des produits financiers de plus en plus complexes et donc une incompréhension croissante des risques induits par les différentes activités de ces entreprises, il était nécessaire de créer des outils de mesure de risque, compréhensibles par les directions et donnant une indication sur le risque global encouru. Avec l'avènement de mesures de risque comme la Value-at-Risk et autres mesures cohérentes, une solution semblait avoir été trouvée. Cependant, la crise de 2007-2009 a mis en évidence une confiance excessive en ces outils et une mauvaise compréhension de leur utilisation par une bonne partie des acteurs des marchés financiers.

2.2 Quelques définitions

Définition 1 On appelle espace probabilisé tout triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où Ω est un ensemble non vide appelé univers des possibles, \mathcal{F} une tribu sur Ω appelée tribu des événements et \mathbb{P} une probabilité sur l'espace mesurable (Ω, \mathcal{F}) , c'est-à-dire une mesure positive de masse 1 sur (Ω, \mathcal{F}) .

Définition 2 On dit que ρ est une mesure de risque monétaire si :

- ρ est croissante : $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- ρ est invariante par translation : $\forall m \in \mathbb{R}, \rho(X + m) = \rho(X) + m$

Définition 3 On dit que ρ est une mesure de risque homogène si $\forall \lambda \geq 0, \rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$

Définition 4 Une mesure de risque homogène ρ est dite cohérente si et seulement si elle est sous-additive, c'est-à-dire qu'elle vérifie $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

2.3 Volatilité

La volatilité est l'écart-type d'une distribution donnée. Un des principaux reproches faits à cette mesure de risque est que les écarts à la moyenne, qu'ils soient positifs ou négatifs sont pris en compte de la même manière. En effet, étant donné que la plupart des distributions de P&L ne sont pas symétriques, cela est problématique. On peut trouver deux distributions ayant la même moyenne et le même écart type mais dont le risque de perte est bien différent.

2.4 Value-at-Risk

2.4.1 Présentation

La Value-at-Risk a été créée au début des années 1990 par JP Morgan dans les outils RiskMetrics (pour les risques de marchés) et CreditMetrics (pour le risque de crédit). Choisie en 1996 par le Comité de Bâle comme mesure de risque de référence, la Value-at-Risk (valeur sous risque en français) est la mesure de risque la plus utilisée dans le milieu bancaire. Elle est définie comme la perte la plus

importante à un niveau de confiance donné (en %), à un horizon donné (en jours). La VaR est très populaire car elle peut être calculée pour tout type de distribution, elle est facile à implémenter et elle représente un concept simple à expliquer aux profanes.

Définition 5 *La Value-at-Risk est définie comme le quantile de la loi de distribution*

$$\mathbb{P}(X \leq \text{VaR}) = \alpha$$

où α est le niveau de confiance (99% par exemple).

2.4.2 Méthodes de calcul de la VaR

Méthode historique

La méthode historique est une méthode qui se base sur des données historiques. On compte sur le fait que le comportement passé d'un portefeuille peut être utilisé pour connaître ce qu'il peut se passer dans l'avenir. Ici nul besoin est de connaître la distribution de profits et de pertes du portefeuille puisqu'on suppose que les rendements journaliers seront les mêmes que dans le passé. On définit les variables qui ont le plus d'influence et pertinentes dans le calcul de la VaR. On obtient autant de scénarios que de jours pris en compte.

Méthode paramétrique

La méthode se base sur la connaissance de la distribution de P&L ou sur une approximation de celle-ci par une distribution connue. Dans le cas d'une distribution normale, on définit la $\text{VaR}_{99\%}$ à 1 jour comme :

$$\text{VaR}_{99\%} = V \cdot \mathcal{N}^{-1}(0.01) \cdot \sigma_{1j}$$

où V est la valeur du portefeuille et σ_{1j} est l'écart type journalier.

Méthode de Monte Carlo

La méthode de Monte Carlo consiste à simuler un grand nombre de scénarios pour le rendement des actifs du portefeuille et ainsi obtenir une distribution empirique du P&L. On définit la VaR comme le quantile de cette distribution simulée. Cette méthode requiert une puissance de calcul important car la précision de cette méthode augmente avec le nombre de simulations.

2.4.3 Limites

Le principal reproche fait à la VaR est le fait que cette mesure de risque ne prend pas en compte les événements extrêmes tels que des krachs. De plus, la VaR n'est pas sous-additive. Ce n'est donc pas une mesure de risque cohérente et contredit donc le principe de diversification. En effet, on peut trouver des portefeuilles comportant plusieurs actifs plus risqués qu'un portefeuille comportant un seul de ces actifs. L'horizon de temps pour le calcul de la VaR pose problème car cela suppose que le portefeuille reste inchangé durant cette période. Or, dans des conditions de marché normales, pour un portefeuille important, cela n'est pas possible. Ainsi, une trop grande confiance en cette mesure de risque peut être catastrophique.

Une fois la VaR connue, on aimerait connaître la perte potentielle en cas de perte supérieure à la VaR. En effet, en cas de scénario extrême, l'important n'est plus de savoir si la perte dépassera la VaR mais de savoir à combien cette perte se chiffrera. C'est en cherchant à répondre à cette question que l'on se rend compte que la prise en compte d'un seul quantile atteint ses limites.

Finalement, la VaR peut être sujette à manipulation. En effet, en ayant recours à des options, il est possible de modifier la distribution du P&L pour diminuer la VaR.

Du fait des défauts de la VaR, d'autres mesures de risque, dites "cohérentes" ont fait leur apparition et se substitue de plus en plus à la VaR.

3 Revue des modèles de risque de crédit

3.1 Le risque de crédit

Le risque de crédit est le risque de pertes en cas de défaut d'un emprunteur face à ses obligations de remboursement ou en cas de dégradation de sa note de crédit à cause d'une situation financière perçue comme risquée en terme de remboursement à venir.

Le risque de crédit n'a pas bénéficié avant les années 1990 du même traitement que les autres types de risque. En effet, entre le modèle de risque de crédit de Merton de 1974 et le développement des mesures de risque, il s'est passé presque 20 ans. Cela est étonnant puisque le risque de crédit est peut être le risque le plus important au sein des établissements bancaires.

Dans ce chapitre seront présentés succinctement les principaux modèles de risque de crédit utilisés actuellement. Le modèle nous intéressant sera exposé en détail dans le prochain chapitre.

3.2 Modèles structurels

Les modèles structurels sont des modèles qui s'appuient sur la valeur ou le rendement d'un actif et qui les utilisent comme facteur définissant le défaut. Le premier modèle a été défini par Merton en 1974.

On valorise l'entreprise comme étant la somme de la valeur de ses actifs et de ses dettes. On déclare le défaut quand il y a cessation de paiement. Cette cessation intervient lorsque la valeur de l'entreprise est égale à la valeur de ses dettes. La valeur totale de l'entreprise suit un processus de Black et Scholes :

$$dV = \mu V dt + \sigma V dW$$

La dette de l'entreprise est constituée d'un titre zéro-coupon de maturité T . A cette échéance, le titre devrait payer une somme D . La valeur de l'action dépend de la valeur de l'entreprise.

A l'échéance T , si la valeur V de l'entreprise est supérieure à sa dette D , les actions valent $V-D$ et la dette est remboursée donc le titre zéro-coupon rembourse D . Si au contraire la valeur de l'entreprise est inférieure à la dette alors les actions valent 0 et le titre zéro-coupon paye la valeur V de l'entreprise. Les actions valent donc $\max(V-D, 0)$ et peuvent être considérées comme des calls de strike D et d'échéance T . Les créances valent $\min(V, D) = D - \max(D-V, 0)$ et peuvent être considérées comme à la détention d'une obligation zéro-coupon et à la vente d'un put de strike D , de maturité T , sur les actifs de l'entreprise.

La probabilité de défaut est définie comme un processus continu analogue à celui que l'on trouve dans le pricing d'une option dans le modèle de Black & Scholes puisque les actions sont équivalentes à un call.

La valeur des actions vaut

$$V_A(t) = V(0)\mathcal{N}(d_1) - De^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

avec

$$d_2 = \frac{\ln(V(0)/D) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$$

r est le taux d'intérêt supposé constant

On calcule la probabilité de défaut et l'on trouve :

$$\mathbb{P}(V_A \leq D) = 1 - \mathcal{N}(d_2)$$

3.3 Modèles à intensité

Les modèles à intensité expliquent le défaut par un phénomène exogène. On ne cherche à représenter la cause du défaut mais uniquement à définir une probabilité de défaut basé sur la survenance d'événement causant le défaut. Pour cela on utilise des processus à sauts et notamment le processus de Poisson défini par

$$\mathbb{P}(N(t) = k) = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

L'avantage du modèle à intensité est que les sauts et donc les événements causant le défaut sont observables à tout instant alors que dans le modèle structurel, les probabilités de défaut sur les premières périodes sont très faibles.

4 Formule analytique pour les modèles structuels

4.1 Présentation du modèle

On va définir dans cette partie le modèle multi-facteurs de Merton. On considère un portefeuille de prêts de M différents emprunteurs ayant chacun emprunté un nominal A_i . On définit le poids ω_i d'un prêt dans le portefeuille comme le ratio entre son nominal et le nominal du portefeuille entier $\omega_i = A_i / \sum_{j=1}^M A_j$. L'emprunteur i fait défaut dans un certain horizon de temps avec une probabilité p_i . Il y a défaut quand une variable continue notée X_i qui définit la santé de l'emprunteur i à un horizon de temps descend sous un seuil. On suppose que les variables X_i (qui peuvent être vues comme le rendement des actifs) ont une distribution normale standard. Dans ce cas, le seuil de défaut est donné par $\mathcal{N}^{-1}(p_i)$.

On suppose que les rendements dépendent linéairement de N facteurs de risque systématique normalement distribués avec une matrice de corrélation pleine. Ces facteurs, que l'on note Y_i , représentent des indices qui affectent le défaut des emprunteurs de manière systématique. Ces indices peuvent être reliés à l'industrie de l'emprunteur, à sa localisation géographique, à la conjoncture macro-économique, etc. Le rendement des prêts est la combinaison spécifique à chacun des emprunteurs de ces facteurs systématiques, aussi connus sous le nom de facteur composite :

$$X_i = r_i Y_i + \sqrt{1 - r_i^2} \xi_i \quad (1)$$

où ξ_i est le choc idiosyncrasique, normalement distribué. Les coefficients r_i appelés "sensibilités" mesurent la dépendance d'un emprunt à un facteur donné.

Etant donné qu'il est plus simple de travailler avec des facteurs indépendants, on suppose que les N facteurs systématiques sont décomposés en N facteurs indépendants normalement distribués Z_k . La relation entre $\{Z_k\}$ et le facteur composite est :

$$Y_i = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} Z_k \quad (2)$$

où les coefficients α_{ik} vérifient la relation $\sum_{k=1}^N \alpha_{ik}^2 = 1$ pour garantir une variance égale à 1 pour Y_i . La corrélation entre deux emprunteurs distincts i et j est donnée par $\rho_{ij} = r_i r_j \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} \alpha_{jk}$.

En cas de défaut de l'emprunteur i , la perte qui lui est associée est définie par la variable aléatoire LGD_i (Loss Given Default). Ces variables, ont une espérance μ_i et un écart-type σ_i . Nous supposons que les variables LGD sont indépendantes entre elles et avec toutes les autres variables du modèle.

La perte totale du portefeuille se définit comme la somme pondérée des pertes individuelles effectives des emprunteurs.

$$L = \sum_{i=1}^M \omega_i L_i = \sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \text{LGD}_i \quad (3)$$

Une approche traditionnelle pour estimer les quantiles de la loi de distribution du P&L d'un portefeuille dans le cadre multi-facteurs est la simulation Monte-Carlo. Si le portefeuille est suffisamment large pour être considéré granulaire, la plupart des risques idiosyncrasiques dans le portefeuille est diversifiée et les pertes du portefeuille sont dues aux facteurs systématiques. Dans ce cas, l'équation (3) peut être remplacée par la distribution de perte limite d'un portefeuille infiniment granulaire. La perte limite est donnée par l'espérance de la perte, conditionnelle aux facteurs systématiques, que l'on obtient en appliquant la loi des grands nombres conditionnellement aux facteurs.

$$L^\infty = \mathbb{E}[L|\{Z_k\}] = \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \mathcal{N} \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - r_i \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} Z_k}{\sqrt{1 - r_i^2}} \right] \quad (4)$$

En pratique, en dépit du fait que l'équation (4) soit plus simple que l'équation (3), elle requiert encore une simulation de Monte Carlo pour les facteurs $\{Z_k\}$ quand il y a plus d'un facteur. De plus, on ne voit pas très bien qu'elle doit être la taille du portefeuille pour que l'équation (4) devienne précise.

4.2 Dérivées de la VaR

Nous nous intéressons au calcul du quantile à un niveau de confiance q donné. On note le quantile $t_q(L)$. On définit une variable aléatoire \bar{L} telle que son quantile au niveau q , $t_q(\bar{L})$ puisse être calculé analytiquement et soit suffisamment proche de $t_q(L)$. On définit la perte totale du portefeuille comme la perte \bar{L} à laquelle on ajoute une perturbation U définie comme $U = L - \bar{L}$. Pour décrire l'ampleur de cette perturbation, on introduit la variable perturbée $L_\varepsilon = \bar{L} + \varepsilon U$. On peut montrer que pour un niveau de confiance q élevé, $t_q(L_\varepsilon)$ peut être calculé en utilisant un développement limité de variable ε au voisinage de $t_q(\bar{L})$. Le quantile s'écrit donc de la manière suivante :

$$t_q(L) = t_q(\bar{L}) + \left. \frac{dt_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \quad (5)$$

Gourieroux, Laurent et Scaillet(2000) ont calculé les deux premières dérivées de la VaR. La première dérivée est donnée par

$$\left. \frac{dt_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E}[U | \bar{L} = t_q(\bar{L})] \quad (6)$$

tandis que la seconde dérivée est donnée par :

$$\left. \frac{d^2 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{f_{\bar{L}}(l)} \frac{d}{dl} \left(f_{\bar{L}}(l) \text{var}[U | \bar{L} = l] \right) \Big|_{l=t_q(\bar{L})} \quad (7)$$

où $f_{\bar{L}}(\cdot)$ est la densité de \bar{L} . Le problème revient donc à trouver un \bar{L} approprié.

4.3 Approximation par le modèle à un facteur

On définit \bar{L} via la perte limite défini précédemment, mais uniquement pour un seul facteur :

$$\bar{L} = l(\bar{Y}) = \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{p}_i(\bar{Y}) \quad (8)$$

où \bar{Y} est le seul facteur de risque systématique, normalement distribué et $\hat{p}_i(y)$ est la probabilité de défaut de l'emprunteur i conditionnelle à $\bar{Y} = y$, qui est donnée par :

$$\hat{p}_i(y) = \mathcal{N} \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - a_i y}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right] \quad (9)$$

où a_i est la sensibilité effective. \bar{L} est une fonction décroissante de \bar{Y} , déterministe. De ce fait, le quantile de \bar{L} à un niveau de confiance q , peut être calculé analytiquement comme la valeur de la fonction en $\bar{Y} = \mathcal{N}^{-1}(1 - q)$:

$$t_q(\bar{L}) = l(\mathcal{N}^{-1}(1 - q)) \quad (10)$$

On l'utilise comme approximation d'ordre 0 du quantile $t_q(L)$.

On remarque que les dérivées de la VaR (équations 6 et 7) sont des expressions comportant des moments conditionnels à $\bar{L} = t_q(\bar{L})$. Ce conditionnement est équivalent au conditionnement à $\bar{Y} = \mathcal{N}^{-1}(1 - q)$. La première et la seconde dérivée s'écrivent donc :

$$\left. \frac{dt_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \mathbb{E} [U | \bar{Y} = \mathcal{N}^{-1}(1 - q)] \quad (11)$$

$$\left. \frac{d^2 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{n(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{n(y)}{\lambda'(y)} \text{Var} [U | \bar{Y} = y] \right) \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)} \quad (12)$$

Démonstration

$$\left. \frac{d^2 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{f_{\bar{L}(l)}} \frac{d}{dl} \left(f_{\bar{L}(l)} \text{Var} [U | \bar{L} = l] \right) \Big|_{l=t_q(\bar{L})}$$

$$f_Y(y) dy = f_L(l) dl$$

$$l = \lambda(y)$$

$$L = \lambda(Y)$$

$$f_L(l) dl = n(\lambda^{-1}(l)) \frac{dy}{dl} dl = n(\lambda^{-1}(l)) \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(l))} dl$$

$$\left. \frac{d^2 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{\frac{n(\lambda^{-1}(l))}{\lambda'(\lambda^{-1}(l))}} \frac{d}{dy} \left(\frac{n(\lambda^{-1}(l))}{\lambda'(\lambda^{-1}(l))} \text{Var} [U | \bar{Y} = y] \right) \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(l))}$$

$$\left. \frac{d^2 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} = -\frac{1}{n(y)} \frac{d}{dy} \left(\frac{n(y)}{\lambda'(y)} \text{Var} [U | \bar{Y} = y] \right) \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)}$$

Pour mettre en relation la variable \bar{L} à la perte L du portefeuille, on a besoin d'une relation entre le facteur systématique \bar{Y} et les facteurs $\{Z_k\}$. On suppose qu'il y a une relation linéaire donné par :

$$\bar{Y} = \sum_{k=1}^N b_k Z_k \quad (13)$$

où les coefficients doivent satisfaire $\sum_{k=1}^N b_k^2 = 1$ pour préserver une variance égale à 1 pour \bar{Y} . On voit la nécessité de définir les sensibilités $\{a_i\}$ et les coefficients $\{b_k\}$ afin de compléter la définition de \bar{L} .

Notre première étape pour définir $\{a_i\}$ et $\{b_k\}$ est l'exigence que \bar{L} soit égal à l'espérance de la perte conditionnée à \bar{Y} pour n'importe quelle composition de portefeuille. Cette exigence garantit que le premier ordre du développement limité du quantile (équation 11) converge pour n'importe quelle niveau de confiance q . Pour calculer $\mathbb{E}[L|\bar{Y}]$, on définit le facteur composite est :

$$Y_i = \bar{\rho}_i \bar{Y} + \sqrt{1 - \bar{\rho}_i^2} \eta_i \quad (14)$$

où η_i est une variable aléatoire normalement distribuée, indépendante de \bar{Y} et $\bar{\rho}_i$ est la corrélation entre Y_i et \bar{Y} donnée par

$$\bar{\rho}_i = \text{corr}(Y_i, \bar{Y}) = \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} b_k \quad (15)$$

Les rendements s'écrivent donc

$$X_i = r_i \bar{\rho}_i \bar{Y} + \sqrt{1 - (r_i \bar{\rho}_i)^2} \zeta_i \quad (16)$$

où ζ_i est une variable aléatoire normalement distribuée indépendants de \bar{Y} . En conséquent, l'espérance conditionnelle de L est :

$$\mathbb{E}[L|\bar{Y}] = \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \mathcal{N} \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - r_i \bar{\rho}_i \bar{Y}}{\sqrt{1 - (r_i \bar{\rho}_i)^2}} \right] \quad (17)$$

On voit que pour vérifier l'égalité $\bar{L} = \mathbb{E}[L|\bar{Y}]$ quelque soit la composition du portefeuille, les sensibilités doivent être définies par :

$$a_i = r_i \bar{\rho}_i = r_i \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} b_k \quad (18)$$

Si le choix des $\{a_i\}$ est clairement défini, les $\{b_k\}$ ne le sont pas.

4.4 Minimisation de la différence des quantiles dans le modèle multi-facteurs

On cherche ici à définir les coefficients $\{b_k\}$ tels que les facteurs de risque $\{Y_i\}$ et le facteur de risque \bar{Y} aient une corrélation maximale. Le problème s'écrit :

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{i=1}^M \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) \right) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k=1}^N b_k^2 = 1 \quad (19)$$

On peut cependant se demander si une pondération ne doit pas être introduite afin que certains facteurs de risque Y_i aient une corrélation plus prononcée avec \bar{Y} , notamment liée aux poids occupés par les prêts au sein du portefeuille. On ajoute donc une dimension au problème, qui devient :

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{i=1}^M c_i \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) \right) \quad \text{tel que} \quad \sum_{k=1}^N b_k^2 = 1 \quad (20)$$

On trouve la relation suivante :

$$b_k = \sum_{i=1}^M \frac{c_i}{\lambda} \alpha_{ik} \quad (21)$$

Les coefficients c_i restent inconnus à ce stade et il faut faire preuve d'intuition pour tenter de les déterminer. On peut par exemple faire en sorte que la variance conditionnelle de l'équation (7) soit minimale. Michael Pykhtin utilise une approximation de la fonction de distribution de la loi normale bivariée appelée "expansion tétrachorique" pour calculer la variance conditionnelle et fait une expansion de variable r_i (les sensibilités aux facteurs) en supposant qu'elles sont faibles (ce qui n'est pas le cas). Il obtient un premier résultat qui lui sert de point de départ. Il teste ensuite plusieurs formules et retient la plus efficace. Nous n'approfondirons pas plus ce point dans le présent mémoire mais comme nous le verrons plus tard, un choix judicieux permet d'accroître la précision des calculs. La solution retenue est la suivante

$$c_i = \omega_i \mu_i \mathcal{N} \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - r_i \mathcal{N}^{-1}(1-q)}{\sqrt{1-r_i^2}} \right] \quad (22)$$

4.5 Ajustement pour le modèle multi-facteurs

A partir de l'équation (12), on obtient la correction entre le modèle à un facteur et le modèle multi-facteurs. La correction à $t_q(\bar{L})$ due à la perturbation U est :

$$\Delta t_q = t_q(L) - t_q(\bar{L}) = -\frac{1}{2l'(y)} \left[v'(y) - v(y) \left(\frac{l''(y)}{l'(y)} + y \right) \right] \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)} \quad (23)$$

La première et la seconde dérivées de la fonction $l(y)$ sont obtenues en dérivant l'équation (8) :

$$l'(y) = \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{p}'_i(y) \quad (24)$$

et

$$l''(y) = \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{p}''_i(y) \quad (25)$$

où $\hat{p}'_i(y)$ et $\hat{p}''_i(y)$ sont les dérivées successives de la probabilité conditionnelle de défaut. Ces dernières sont données par les dérivations de l'équation (9) :

$$\hat{p}'_i(y) = -\frac{a_i}{\sqrt{1-a_i^2}} n \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - a_i y}{\sqrt{1-a_i^2}} \right] \quad (26)$$

et

$$\hat{p}_i''(y) = -\frac{\alpha_i^2}{1-\alpha_i^2} \frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - \alpha_i y}{\sqrt{1-\alpha_i^2}} n \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - \alpha_i y}{\sqrt{1-\alpha_i^2}} \right] \quad (27)$$

Puisque \bar{L} est une fonction déterministe de \bar{Y} , la variance conditionnelle de U est la même que la variance conditionnelle de L , $v(y)$. Si, conditionnellement à \bar{Y} , les contributions individuelles de perte sont indépendantes, l'équation (22) serait équivalente à l'ajustement granulaire de Wilde. Cependant, bien que le second terme dans l'équation des rendements (16) soit indépendant de \bar{Y} , il existe une corrélation non nulle entre deux emprunteur distincts i et j . On le voit clairement si on réécrit l'équation (16) :

$$X_i = \alpha_i \bar{Y} + \sum_{k=1}^N (r_i \alpha_{ik} - \alpha_i b_k) Z_k + \sqrt{1-r_i^2} \xi_i \quad (28)$$

Avec α_i défini dans l'équation (18), la somme dans l'équation précédente est indépendante de \bar{Y} . Cependant, c'est ce terme qui est responsable de la corrélation. Cette corrélation s'écrit :

$$\rho_{ij}^Y = \frac{r_i r_j \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} \alpha_{jk} - \alpha_i \alpha_j}{\sqrt{(1-\alpha_i^2)(1-\alpha_j^2)}} \quad (29)$$

Bien que cette équation ne soit valable que pour deux emprunteurs distincts, on étend la définition à cette corrélation au cas $i=j$. Néanmoins, conditionnellement à $\{Z_k\}$, les rendements sont indépendants et nous pouvons décomposer la variance conditionnelle comme la somme d'une partie idiosyncrasique et une partie systématique :

$$\text{Var}[L|\bar{Y}=y] = \text{Var}[\mathbb{E}(L|\{Z_k\})|\bar{Y}=y] + \mathbb{E}[\text{Var}(L|\{Z_k\})|\bar{Y}=y] \quad (30)$$

Le premier terme du côté droit de l'équation ci-dessus est la variance conditionnelle à $\bar{Y} = y$ de la perte limite du portefeuille donné par l'équation (4). Il quantifie la différence entre la distributions de perte limite dans le modèle à un facteur et celle du modèle multi-facteurs. Ce terme noté v_∞

$$v_\infty(y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \left[\mathcal{N}_2\left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)]\right) - \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \right] \quad (31)$$

La dérivation de ce terme nous donne

$$v'_\infty(y) = 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}'_i(y) \left[\mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1-(\rho_{ij}^Y)^2}} \right) - \hat{p}_j(y) \right] \quad (32)$$

Le second terme à droite de l'équation décrit l'effet d'un nombre fini de prêts dans le portefeuille. Ce terme, qui va être noté $v_{GA}(y)$, décrit l'ajustement granulaire et converge vers 0 quand le nombre de prêt tend vers l'infini.

$$v_{GA}(y) = \sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\mu_i^2 + \sigma_i^2) \hat{p}_i(y) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathcal{N}_2 \left[\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)] \right] \quad (33)$$

et sa dérivée est :

$$v'_{GA}(y) = \sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\mu_i^2 + \sigma_i^2) \hat{p}'_i(y) - 2 \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \left[\mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ii}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ii}^Y)^2}} \right) \right] \hat{p}'_i(y) \quad (34)$$

Puisque la variance conditionnelle $v(y)$ est linéaire tout comme sa première dérivée, la correction du quantile (que l'on appelle ajustement multi-facteurs) est aussi la somme d'un terme systématique et d'un terme représentant l'ajustement granulaire :

$$\Delta t_q = \Delta t_q^\infty + \Delta t_q^{GA} \quad (35)$$

Chaque terme est obtenue en substituant la variance conditionnelle correspondante et dérivée dans l'équation (22). Quand le nombre de prêts tend vers l'infini, le terme Δt_q^{GA} converge vers 0 et on peut interpréter $t_q(\bar{L}) + \Delta t_q^\infty$ comme le quantile de L^∞ .

5 Domaines d'applications de la formule de Pykhtin

5.1 Présentation des tests

Nous allons dans les tests suivants nous placer dans le cas d'un portefeuille scindé en deux sous-portefeuilles, identiques ou différents. Ces tests basiques servent de préalables à la suite de notre étude. Etant donné que la formule de Pykhtin se base sur l'ajustement granulaire, il serait intéressant de tester sa validité dans le cas d'un nombre infini et d'un nombre fini d'emprunteurs.

Nous définissons deux sous-portefeuilles A et B. Le sous-portefeuille A est caractérisé par :

- M_A : nombre d'emprunteurs identiques dans le sous-portefeuille A
- p_A : probabilité de défaut
- μ_A : espérance de la perte en cas de défaut
- σ_A : écart type de la perte en cas de défaut
- Y_A : facteur composite
- r_A : sensibilité au facteur composite
- ω_A : poids du sous-portefeuille A

Le sous-portefeuille B est défini de la même manière.

5.2 Résultats de référence ou résultats "exacts"

5.2.1 Cas d'un nombre infini d'emprunteurs

On a vu qu'avant la formule de Pykhtin, on utilisait des simulations de Monte Carlo pour obtenir la VaR. Dans le cas d'un nombre infini d'emprunteurs, on utilise la formule de Vasicek qui nous donne la perte limite L^∞ . En simulant L^∞ un nombre conséquent de fois, on construit une distribution de P&L. A partir de là, on classe par ordre croissant les pertes et la VaR correspond à la "q x Nbre de simulations" plus importante perte. Par exemple, pour 100 simulations, pour une VaR 99%, la VaR serait la 99ème plus grande perte.

On rappelle la formule suivante :

$$L^\infty = \mathbb{E}[L|\{Z_k\}] = \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \mathcal{N} \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - r_i \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} Z_k}{\sqrt{1 - r_i^2}} \right]$$

Toutes les données sont connues à l'exception des $\{Z_k\}$ que nous allons simuler suivant une loi normale standard et les α . Les α peuvent être choisis librement mais en y regardant de plus près, on voit qu'ils peuvent nous servir à déterminer la corrélation entre deux sous-portefeuilles. En effet, si on choisit deux facteurs systématiques Z_1 et Z_2 , indépendants et de distribution normale standard, les facteurs composites Y_1 et Y_2 s'écrivent :

$$Y_1 = \alpha_{11}Z_1 + \alpha_{12}Z_2$$

$$Y_2 = \alpha_{21}Z_1 + \alpha_{22}Z_2$$

On calcule la covariance entre Y_1 et Y_2 , sachant que leurs variances respectives sont égales à 1 :

$$\begin{aligned} \text{Cov}(Y_1, Y_2) &= \alpha_{11}\alpha_{21}\text{Var}(Z_1) + \alpha_{12}\alpha_{22}\text{Var}(Z_2) + \alpha_{11}\alpha_{22}\text{Cov}(Z_1, Z_2) + \alpha_{21}\alpha_{12}\text{Cov}(Z_1, Z_2) \\ &= \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} \end{aligned}$$

On introduit dès lors une variable de corrélation ρ représentant la corrélation entre Y_1 et Y_2 . Il nous suffit de réécrire :

$$\begin{aligned} Y_1 &= 1 \cdot Z_1 + 0 \cdot Z_2 \\ Y_2 &= \rho \cdot Z_1 + \sqrt{1 - \rho^2} \cdot Z_2 \end{aligned}$$

On définit donc la matrice α de la manière suivante

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \\ \vdots & \vdots \\ \rho & \sqrt{1 - \rho^2} \end{pmatrix}$$

de telle sorte que l'on puisse déterminer la corrélation entre les deux sous-portefeuilles A et B.

5.2.2 Cas d'un nombre fini d'emprunteurs

Dans le cas d'un nombre fini d'emprunteurs on utilise la formule suivante pour modéliser les pertes :

$$L = \sum_{i=1}^M \omega_i L_i = \sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \text{LGD}_i \quad (36)$$

L'indicatrice est une variable de Bernouilli. Il faudra donc tester pour tout rendement X_i si le seuil de défaut a été franchi. En ce qui concerne la variable aléatoire LGD_i , on lui donnera une valeur déterministe. La raison de ce choix tient au fait que ce sont généralement des variables centrées autour de leur espérance avec un écart-type faible. De plus, l'utilisation des simulations de Monte Carlo nous pousse à choisir une valeur précise pour cette variable, car sinon ces simulations ne nous serviraient plus de référence car n'ayant pas une perte en cas de défaut correspondante à celle utilisée dans la formule de Pykhtin.

5.3 Tests préliminaires

5.3.1 Nombre infini d'emprunteurs, portefeuille homogène

On se place dans le cadre d'un nombre infini d'emprunteurs car cela correspond à la théorie de l'ajustement granulaire vue dans le chapitre précédent. Il faut néanmoins remarquer que ce cas de figure ne peut se retrouver au sein d'un établissement bancaire. Ce test devrait donc correspondre au cas le plus favorable rencontré dans l'utilisation de la formule analytique de Pykhtin.

Dans le cas présent, les nombres d'emprunteurs M_A et M_B sont infinis. On définit les paramètres suivants.

- $M_A = M_B = \infty$
- $p_A = p_B = 0.5\%$
- $\mu_A = \mu_B = 40\%$
- $\sigma_A = \sigma_B = 20\%$
- $r_A = r_B = 0.5$
- $\omega_A = \omega_B = 0.5$

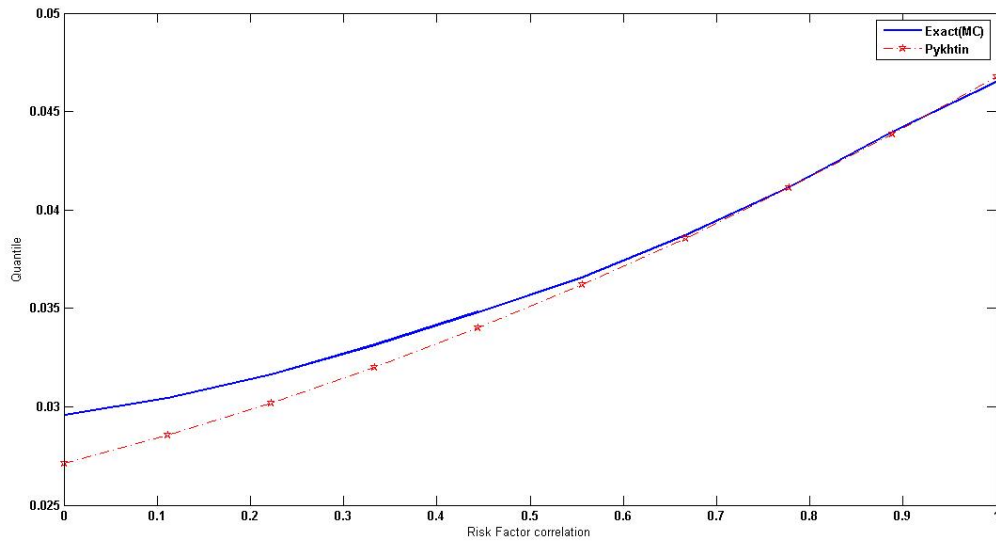


FIGURE 1 – PORTEFEUILLE HOMOGENÈNE - $\omega_A = 0.5$

On remarque que la précision augmente quand la corrélation entre les deux sous-portefeuilles augmente. On peut dès lors se demander qu'elle serait la précision dans le cas de sous-portefeuilles n'ayant pas le même poids.

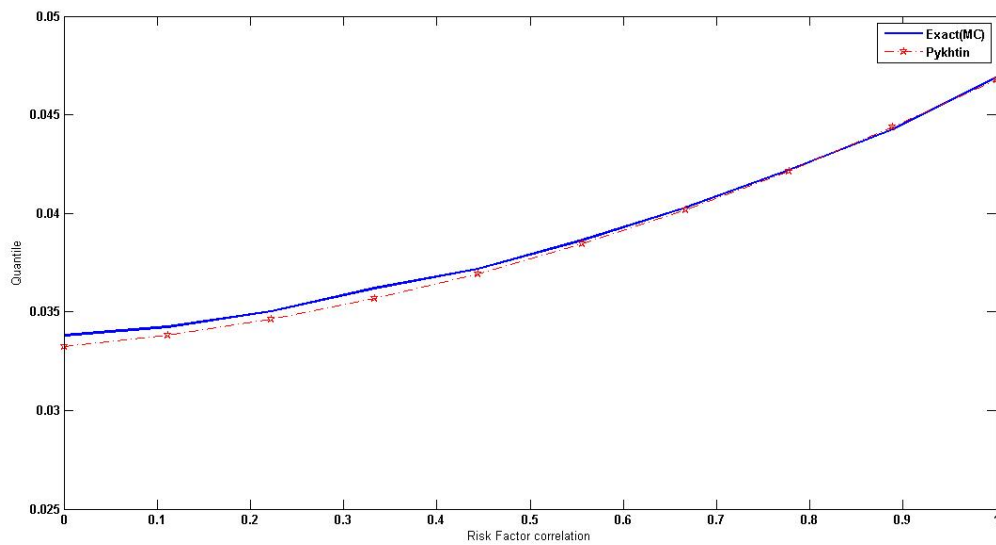


FIGURE 2 – PORTEFEUILLE HOMOGENÈNE - $\omega_A = 0.3$

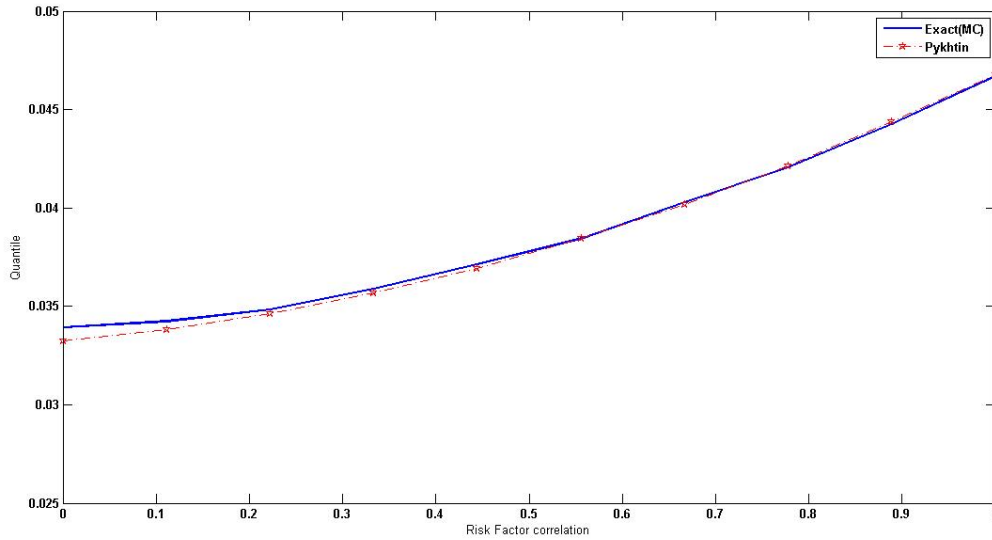


FIGURE 3 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.7$

La précision augmente lorsque les sous-portefeuilles ne sont pas équi-pondérés. Cela est compréhensible dans le sens où lorsque l'on s'éloigne de $\omega_A = \omega_B = 0.5$, on se rapproche par exemple de $\omega_A = 1$ et $\omega_B = 0$ qui correspond au cas du modèle à un facteur, pour lequel une formule exacte existe.

On remarque que lorsque les deux sous-portefeuilles ont une corrélation proche de 1, la VaR converge vers la même valeur quelque soit le poids des sous-portefeuille A et B. Cela est compréhensible car les sous-portefeuilles ont les mêmes paramètres et pour une corrélation élevée, ils se comportent de la même manière. Pour une corrélation égale à 1, il n'y a plus de différence entre eux et on a un unique portefeuille totalement homogène. Cela n'est pas vrai dans le cas d'un portefeuille non homogène.

5.3.2 Nombre infini d'emprunteurs, portefeuille non homogène

A l'inverse du test précédent, les paramètres des sous-portefeuilles ne seront pas égaux.

- $M_A = M_B = \infty$
- $p_A = 0.1\%$, $p_B = 2\%$
- $\mu_A = \mu_B = 40\%$
- $\sigma_A = \sigma_B = 20\%$
- $r_A = 0.5$, $r_B = 0.2$
- $\omega_A = \omega_B = 0.5$

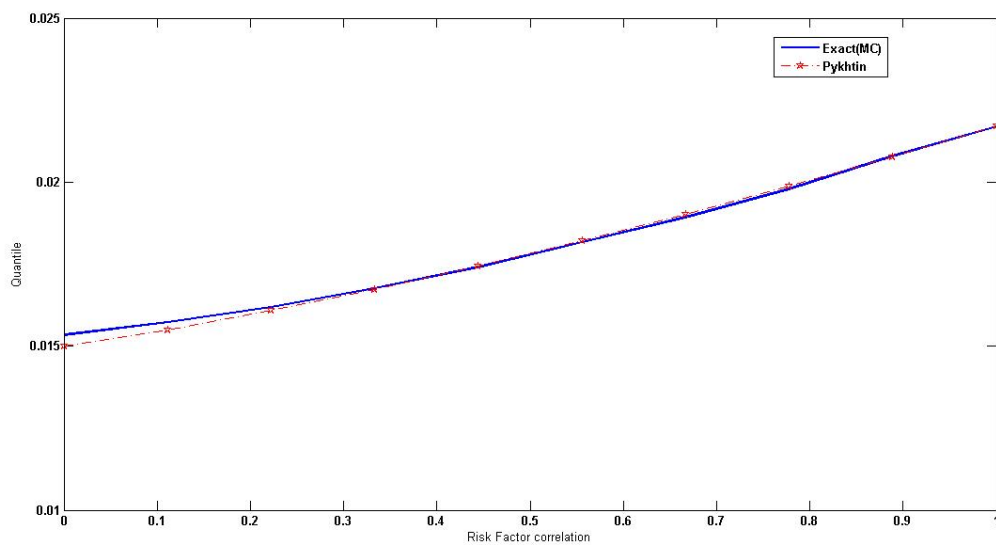


FIGURE 4 – PORTEFEUILLE NON HOMOGÈNE - $\omega_A = 0.5$

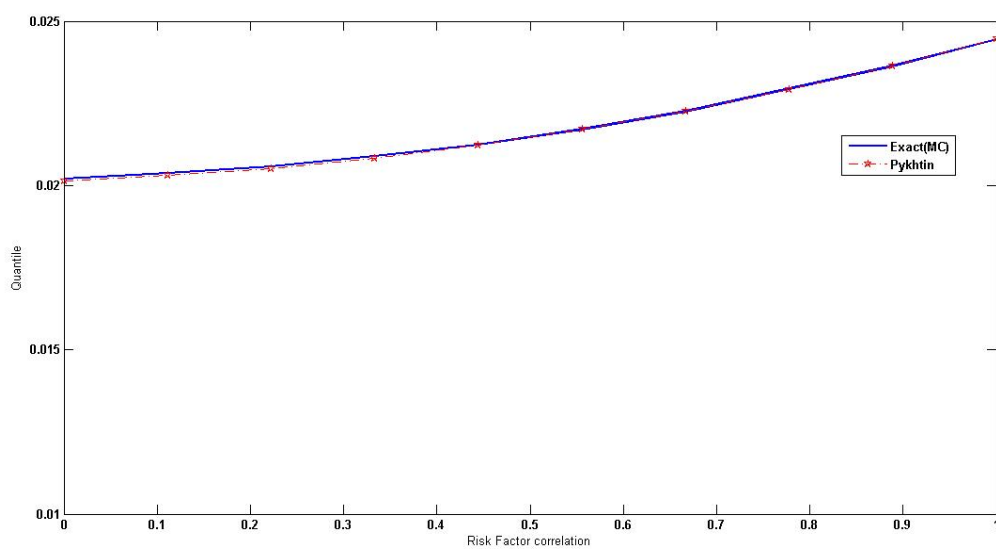


FIGURE 5 – PORTEFEUILLE NON HOMOGÈNE - $\omega_A = 0.3$

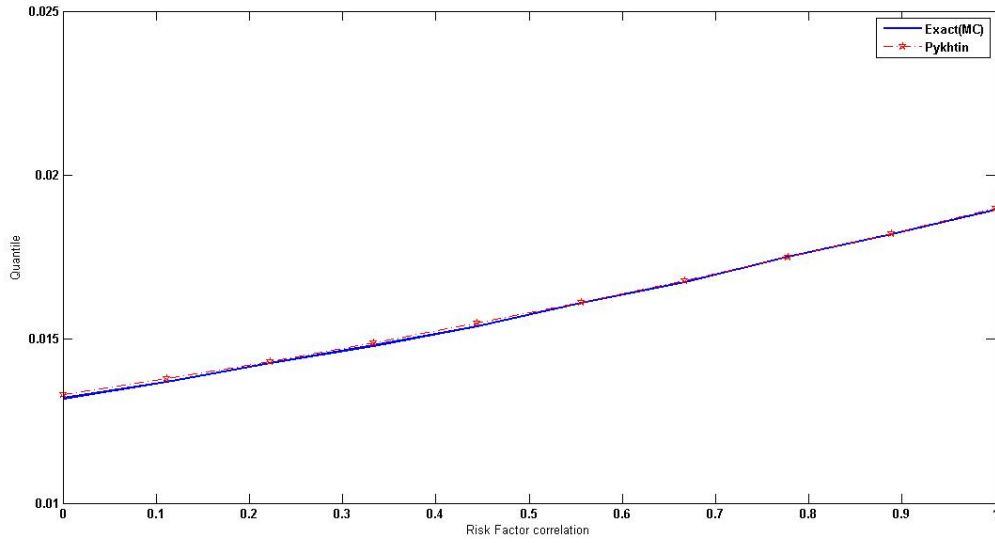


FIGURE 6 – PORTEFEUILLE NON HOMOGENE - $\omega_A = 0.7$

On note que la précision est supérieure dans le cas d'un portefeuille non homogène. En effet, même dans le cas du portefeuille équi-pondéré, on note que l'erreur entre le résultat de référence et la formule de Pykhtin n'est perceptible qu'en cas de corrélation très faible entre les deux sous-portefeuilles.

5.3.3 Nombre fini d'emprunteurs, portefeuille homogène

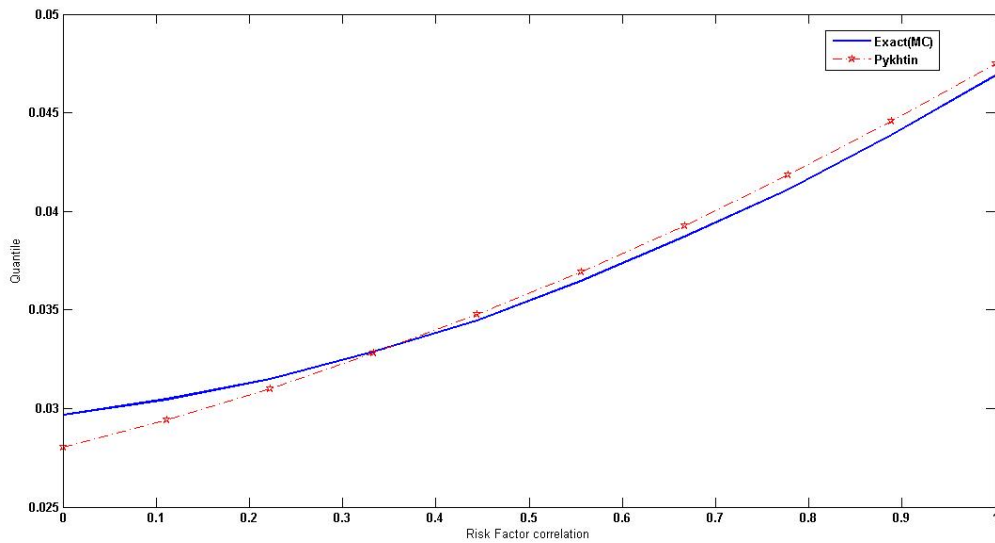


FIGURE 7 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.5$

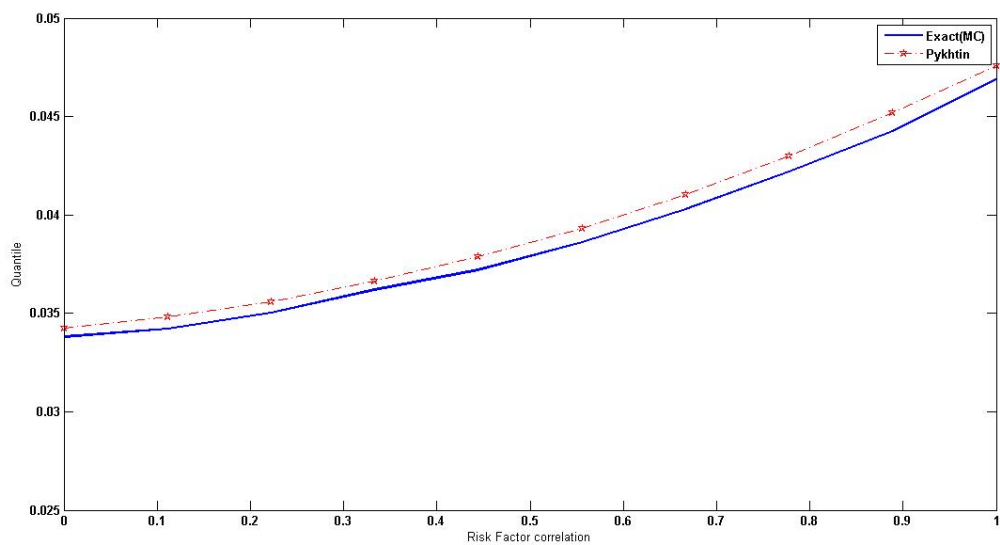


FIGURE 8 – PORTEFEUILLE HOMOGENÈ - $\omega_A = 0.3$

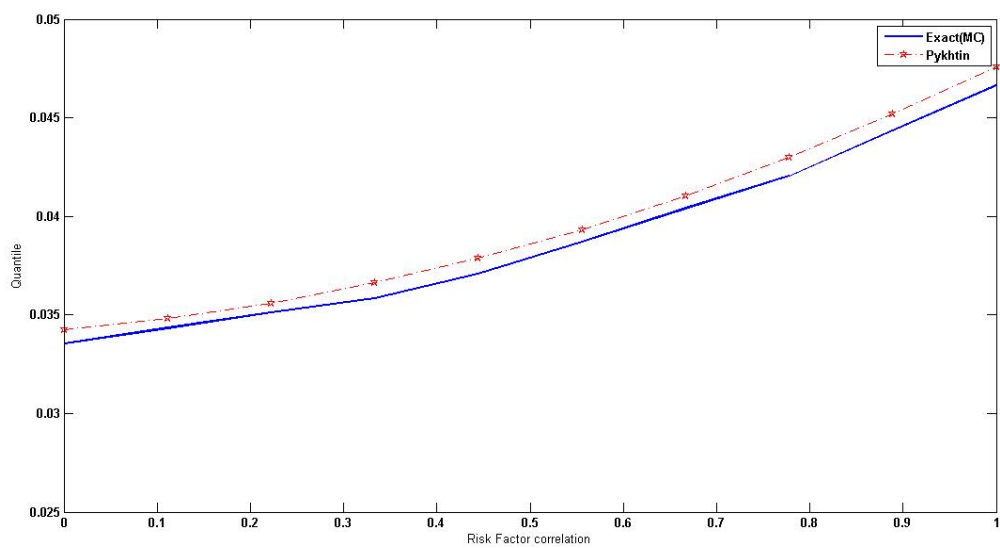


FIGURE 9 – PORTEFEUILLE HOMOGENÈ - $\omega_A = 0.7$

5.3.4 Nombre fini d'emprunteurs, portefeuille non homogène

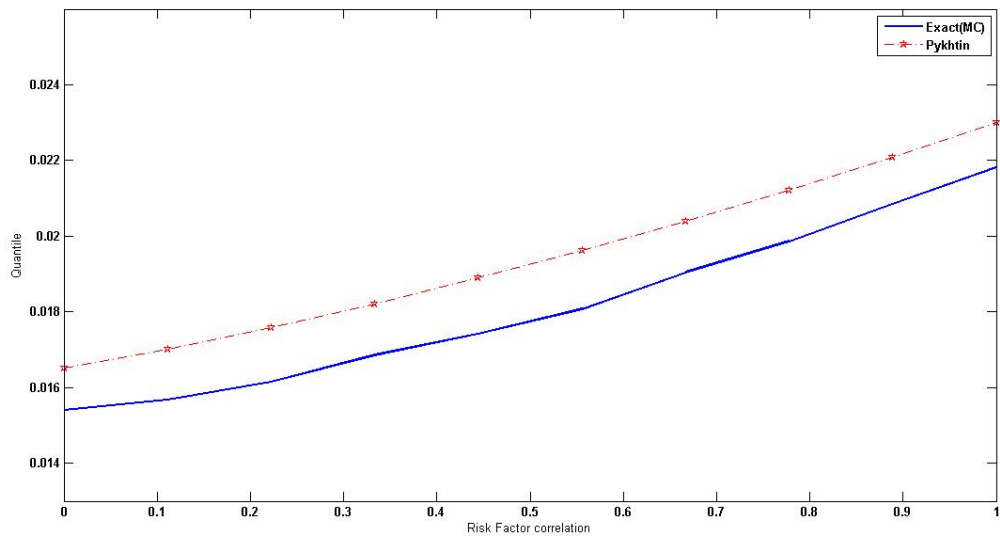


FIGURE 10 – PORTEFEUILLE NON HOMOGENE - $\omega_A = 0.5$

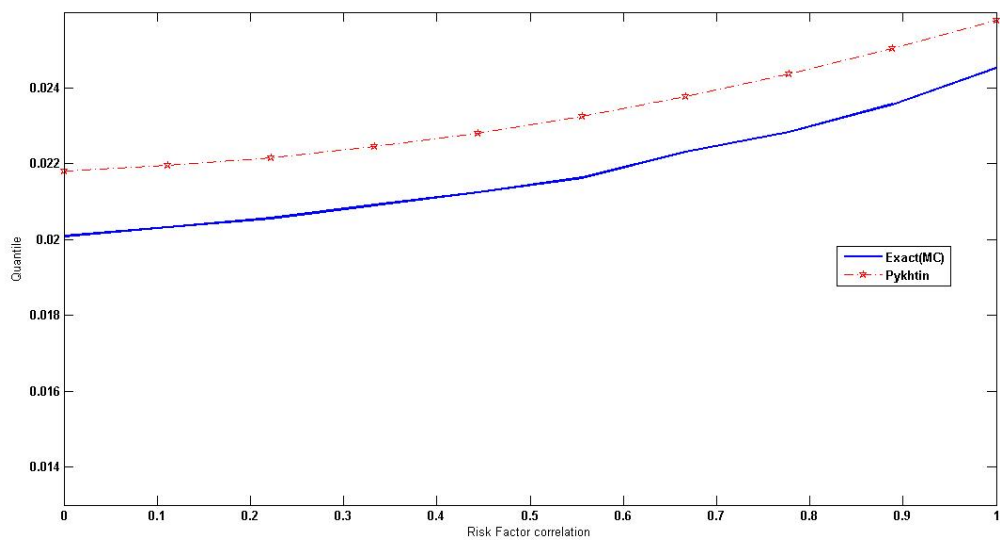


FIGURE 11 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.3$

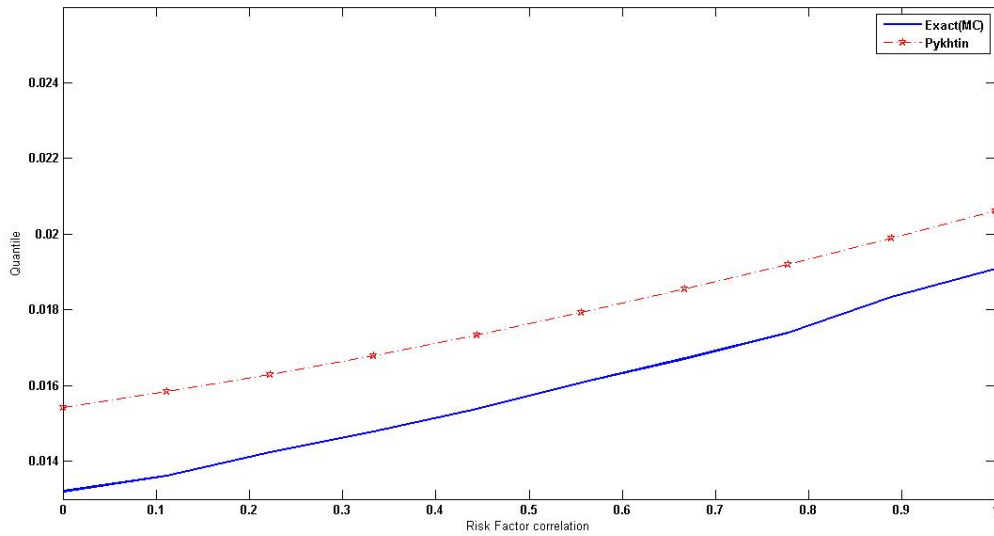


FIGURE 12 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.7$

En voyant de tels écarts entre la solution exacte et la formule de Pykhtin lorsque le sous-portefeuille contenant le moins de prêts a le poids le plus important du portefeuille, on peut se demander qu'elle est l'effet de la granularité dans la précision de la formule de Pykhtin.

5.4 Tests de la granularité

La formule de Pykhtin fonctionne mieux dans le cadre d'un portefeuille infiniment granulaire que dans celui, plus réaliste, d'un nombre fini d'emprunteurs. Afin de comprendre l'effet de la granularité, on peut essayer de prendre un portefeuille défini par un emprunteur d'un côté et d'une masse infiniment granulaire de l'autre. En faisant varier le poids de l'unique emprunteur au sein du portefeuille et en observant la précision de la formule de Pykhtin, on pourra déterminer une limite à partir de laquelle on pourra parler de portefeuille granulaire et donc d'un portefeuille qui se prêtera bien à l'utilisation de la formule.

La perte pour la masse infiniment granulaire est L^∞ et pour l'unique emprunteur, L , que nous avons vu précédemment. Pour obtenir le résultat de référence, on effectuera des simulations de Monte Carlo dans lesquels on testera en même temps le dépassement du seuil de défaut par la variable X_i relative à l'unique emprunteur et on appliquera en même temps la formule de Vasicek relative à la masse infiniment granulaire.

On commence par définir un poids proche de 0% pour l'unique emprunteur et on augmentera progressivement ce poids jusqu'à 100%. On déterminera aussi l'erreur relative entre la formule de Pykhtin et la solution de référence, afin de savoir jusqu'à quel pourcentage la formule peut s'appliquer.

On fera varier la corrélation entre les deux sous-portefeuilles afin de voir l'impact de la corrélation en fonction de la granularité.

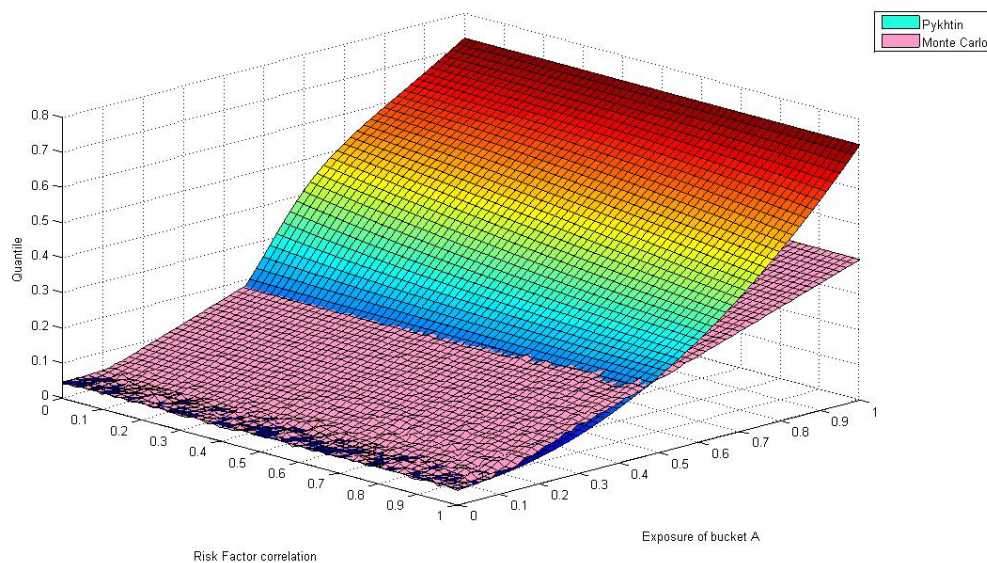


FIGURE 13 – VALEUR DE LA VAR EN FONCTION DU POIDS DE A ET DE LA CORRÉLATION ENTRE A ET B

La même figure vue de profil permet de voir la forme de la surface de la solution exacte (plane) et celle de la formule de Pykhtin (surface courbée)

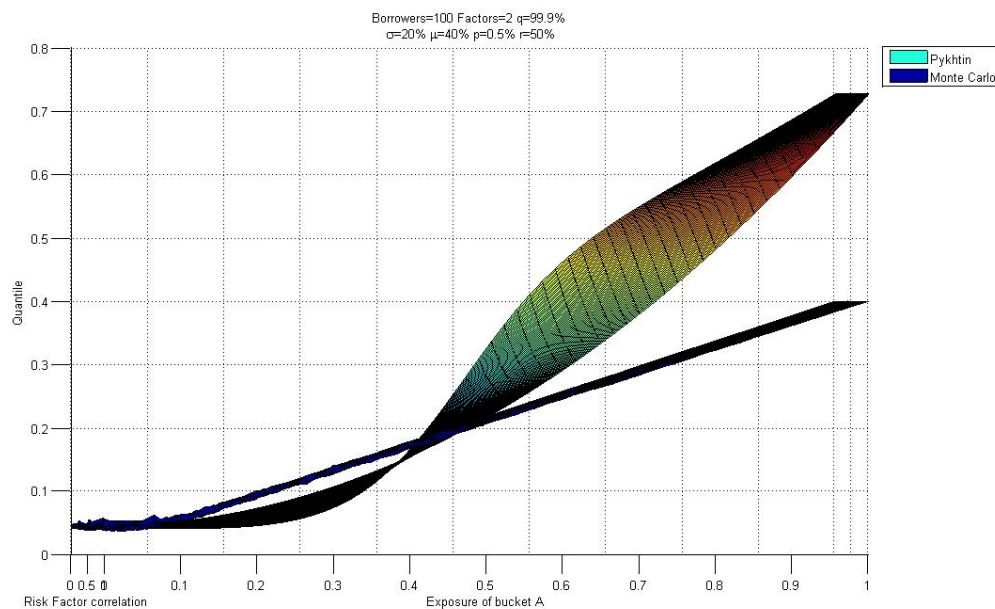


FIGURE 14 – VALEUR DE LA VAR EN FONCTION DU POIDS DE A ET DE LA CORRÉLATION ENTRE A ET B

L'erreur relative entre la solution exacte et la solution donnée par le formule de

Pykhtin nous permettra de connaître plus précisément dans quelle plage d'exposition du sous-portefeuille A et dans quelle plage de corrélation l'utilisation de la formule de Pykhtin est pertinente.

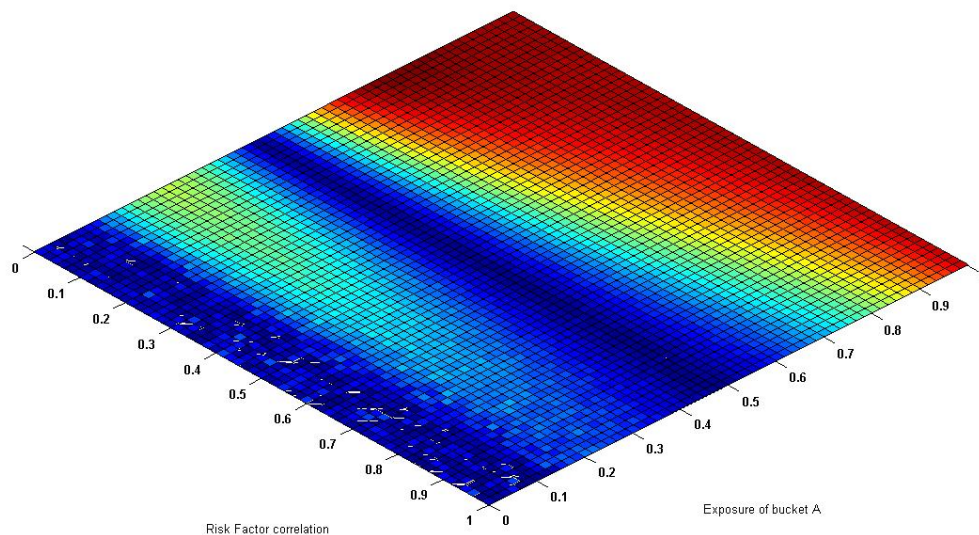


FIGURE 15 – ERREUR RELATIVE EN VALEUR ABSOLUE

On note qu'au delà de 10% environ, l'erreur relative devient importante. Il est donc inutile d'envisager utiliser la formule de Pykhtin lorsque le sous-portefeuille le plus important représente plus de 10% du portefeuille total.

On note également que pour une corrélation de 0.5, la formule redevient précise. Ce phénomène n'est pas expliqué pour le moment.

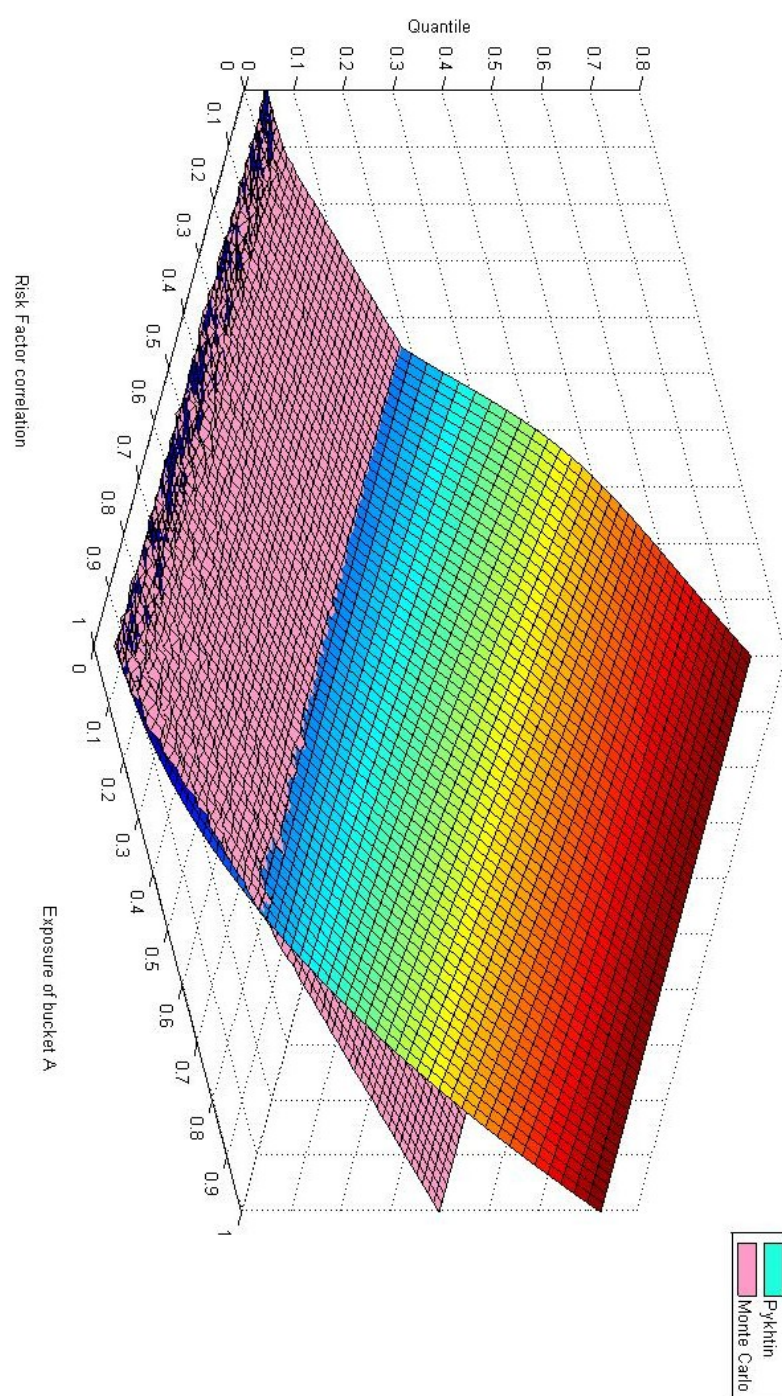


FIGURE 16 – VALEUR DE LA VAR EN FONCTION DU POIDS DE A ET DE LA CORRÉLATION ENTRE A ET B

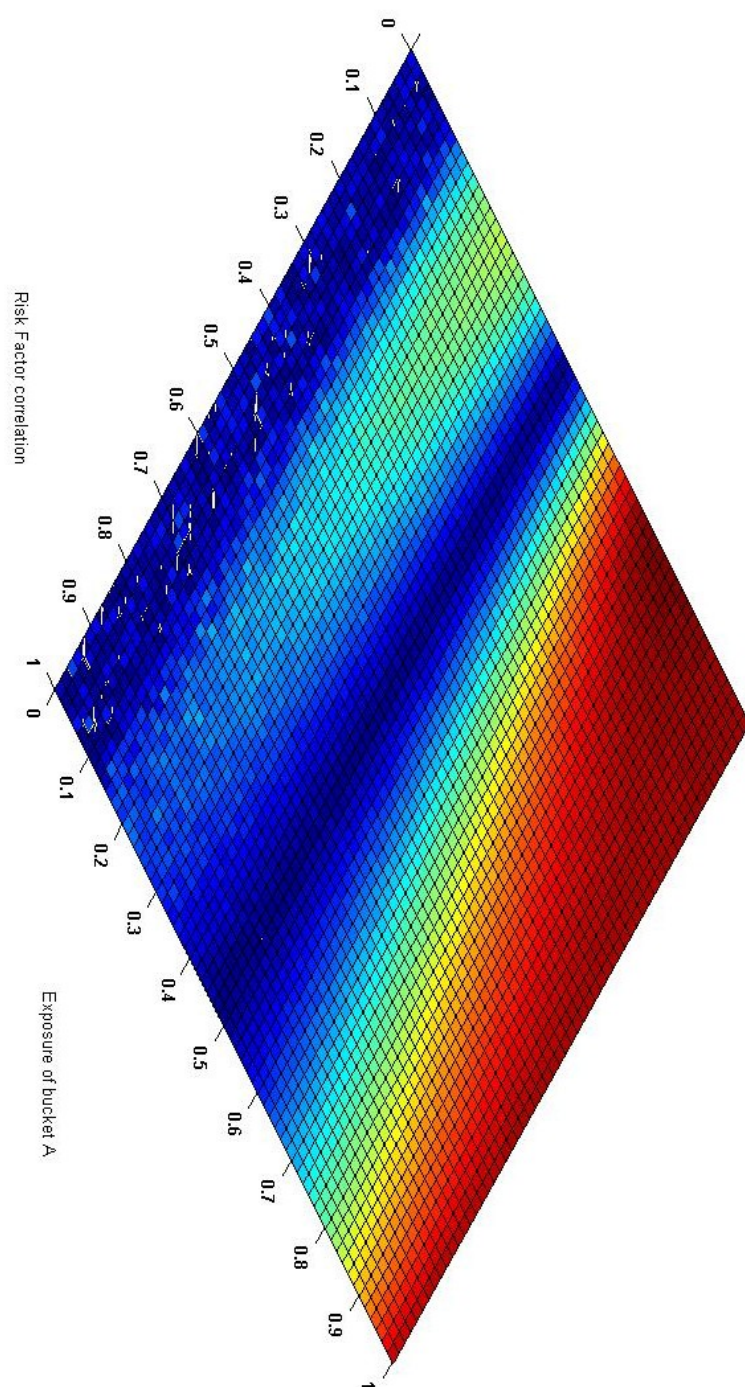


FIGURE 17 – ERREUR RELATIVE EN VALEUR ABSOLUE

5.5 Tests contributions

Après avoir vu l'effet de la granularité dans la précision, il serait intéressant de voir l'effet de l'ajustement granulaire et voir son importance par rapport à l'approximation faite par un modèle à un facteur. On rappelle la formule de Pykhtin :

$$t_q(L) = t_q(\bar{L}) - \frac{1}{2l'(y)} \left[v'(y) - v(y) \left(\frac{l''(y)}{l'(y)} + y \right) \right] \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)} = VaR_0 + VaR_1$$

L'ajustement granulaire correspond au deuxième terme dans la partie droite de l'équation. Comme on a pu le voir, $v(y)$ et $v'(y)$ sont des formules complexes nécessitant un nombre important d'opérations. Si l'ajustement granulaire n'a pas d'impact significatif sur le calcul de la VaR, on pourrait envisager de ne pas l'utiliser.

5.5.1 Portefeuille infiniment granulaire

On se place de nouveau dans le cadre d'un portefeuille composé de deux sous-portefeuilles infiniment granulaires et on représente la contribution de l'ajustement granulaire et du quantile du modèle à un facteur.

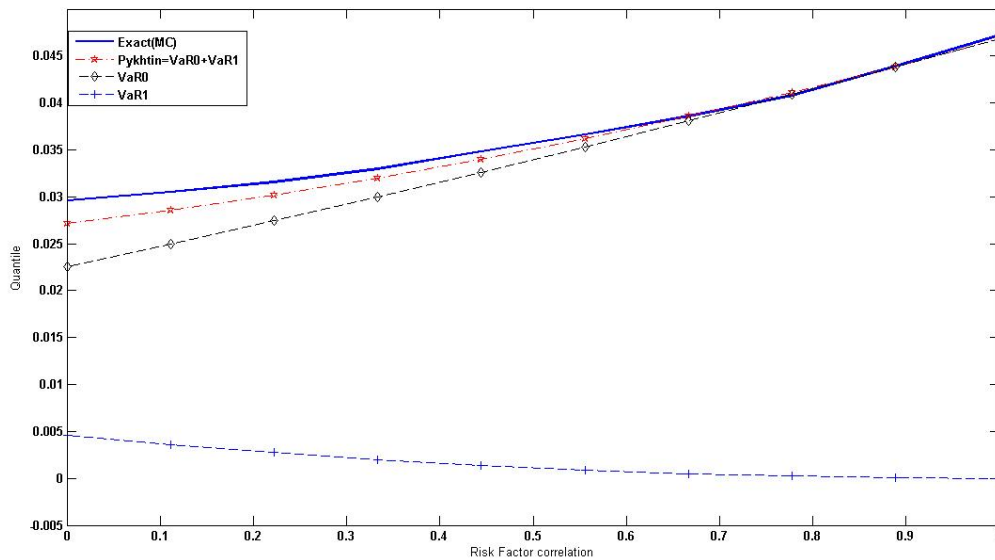


FIGURE 18 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.5$

On observe très bien l'effet de l'ajustement granulaire (ici VaR_1). On note que celui-ci décroît en fonction de la corrélation entre les sous-portefeuilles. La solution du problème à un facteur (VaR_0) est une bonne approximation de la VaR en cas de corrélation élevée. Sachant que ce cas ne se présente pas forcément au sein des établissements bancaires, il est nécessaire d'apporter une correction.

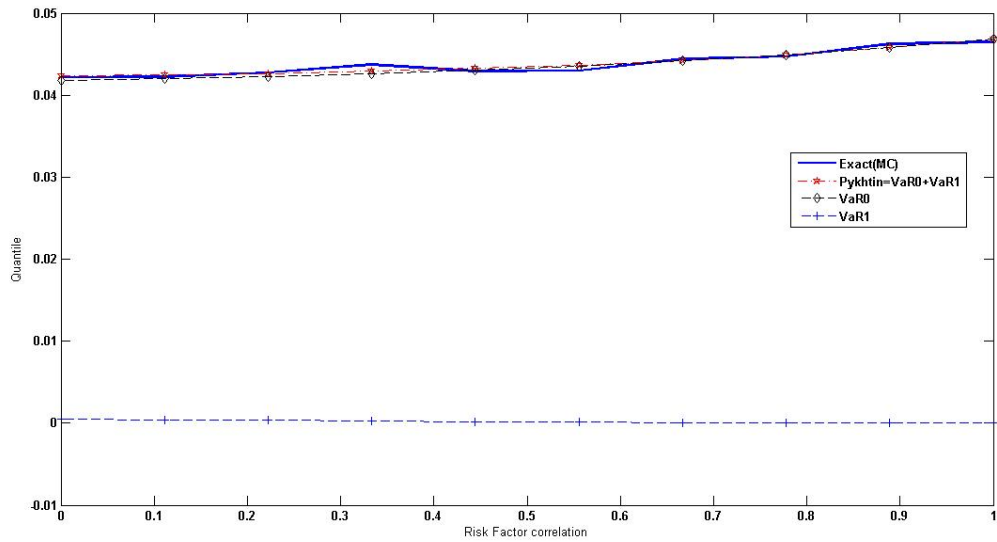


FIGURE 19 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.9$

On observe que dans le cas $\omega_A = 0.9$, la solution du problème à un facteur est une bonne approximation et confirme le fait que lorsque l'on s'éloigne du cas d'un portefeuille équi-pondéré, on se rapproche du cas à un facteur. L'ajustement granulaire est proche de 0 même pour une corrélation faible.

5.5.2 Portefeuille non granulaire

Dans le cas d'un portefeuille non infiniment granulaire, le terme correspondant à l'ajustement granulaire ne converge pas vers 0. Ce terme contribue donc à l'erreur entre la solution exacte et la formule de Pykhtin. On le voit clairement dans la figure suivante, qui représente la VaR d'un portefeuille non homogène.

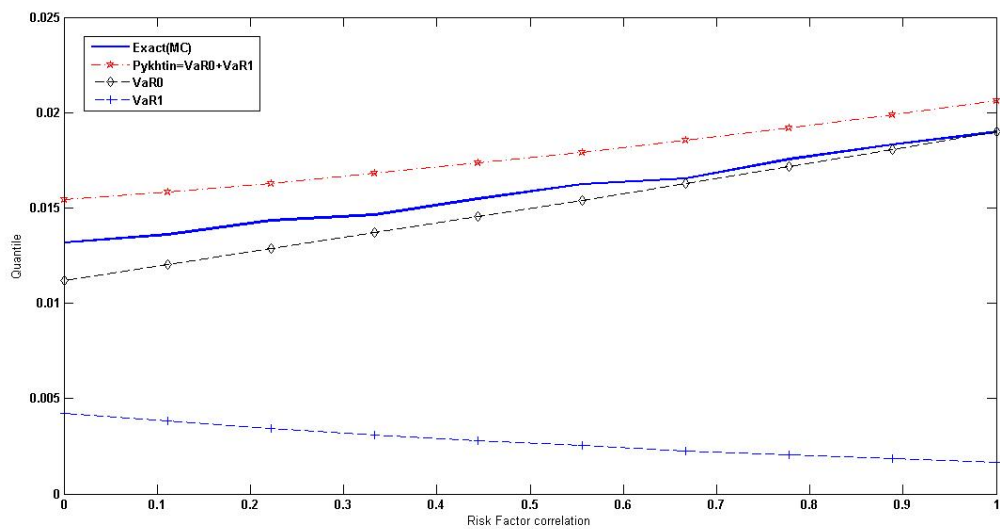


FIGURE 20 – PORTEFEUILLE NON HOMOGENE - $\omega_A = 0.7$

5.6 Conclusion des tests

A la vue des tests effectués, on peut avoir une idée du domaine d'application idéal de la formule de Pykhtin. On peut le définir comme suit :

- Portefeuille de taille importante (au sens du nombre d'emprunteurs) pour respecter le principe de granularité du portefeuille
- Portefeuille non homogène pour respecter le principe de diversification
- L'exposition de l'emprunteur ayant la plus grande exposition au sein du portefeuille doit être la plus faible possible
- La corrélation au sein du portefeuille doit être la plus importante possible

6 Améliorations

6.1 Calcul de la troisième dérivée de la VaR

6.1.1 Première approche

La formule de Pykhtin nécessite les deux premières dérivées de la VaR. En effet, le développement de Taylor est effectué jusqu'à l'ordre 2. On peut se demander si à la manière du développement de Taylor d'une fonction, pousser le développement à l'ordre 3 ne permettrait pas d'obtenir une précision accrue.

Les deux premières dérivées sont calculées dans un article de Gouriéroux, Laurent et Scaillet. En adoptant la même démarche qu'eux, on peut tenter de calculer la dérivée troisième de la VaR.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \frac{\iint xf(x, y, -\varepsilon y) dx dy}{\iint f(x, y, -\varepsilon y) dx dy} \\ &= \frac{\iint xf(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon)}{\iint f(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon)} \end{aligned}$$

Cela correspond à un développement de Taylor du 1er ordre de variable z . Aller jusqu'au 1er ordre permet de calculer les deux premières dérivées de la VaR. Etant donné que l'on cherche la troisième dérivée, on pousse le développement au second ordre. On obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \frac{\iint xf(x, y, -\varepsilon y) dx dy}{\iint f(x, y, -\varepsilon y) dx dy} \\ &= \frac{\iint xf(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint xy^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon^2)}{\iint f(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint y^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon^2)} \end{aligned}$$

Cette approche ne nous permet pas de trouver de formules simplifiables et donc facilement exploitables. En effet, les dérivées de la VaR sont :

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} &= -\varepsilon \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa \middle| Z=0 \right] \\ &\quad - \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon^2} &= -\mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right] + \varepsilon \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa \middle| Z=0 \right] \\ &\quad - 2\varepsilon \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right]\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon^3} = \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa \middle| Z=0 \right] - 2\mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z=0 \right]$$

Aucune simplification n'ayant pu être faite, on ne tentera pas de continuer dans cette voie. Les détails précis de ces calculs peuvent être vus à la fin de ce rapport.

6.1.2 Deuxième approche

Les calculs de Gouriéroux, Scaillet et Laurent ont été formalisés par Richard Martin et Tom Wilde. Cependant, même si les deux premières dérivées apparaissent explicitement dans leur article, la troisième n'y est pas. Ils ont l'espoir de trouver une formule générale permettant de déterminer les dérivées de quantile à n'importe quel ordre. Malheureusement aucune formule ne sera publiée (ou trouvée ?) et c'est pour cela qu'on tentera de déterminer la troisième dérivée de la VaR en utilisant leur démarche.

Soient X et U deux variables aléatoires, et soit Y une variable telle que $Y = X + \varepsilon U$. On note t le quantile de Y .

Théorème 1 Soit $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x)$ la fonction de répartition de la variable aléatoire Y . Pour $m > 0$:

$$\left. \frac{\partial^m F_Y}{\partial \varepsilon^m} \right|_{\varepsilon=0} = (-1)^m \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} (\mu_m(x) f_X(x))$$

où $\mu_m(x) = \mathbb{E}(U^m | X = x)$ est le m -ième moment non-centré.

La démonstration de ce théorème ne sera pas faite ici mais on s'intéressera à son utilisation. On rappelle que dans le cadre qui nous intéresse, $F_Y(t) = \alpha$. On dérive la fonction de répartition comme par rapport à ε .

Par exemple, pour le premier ordre :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
&= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
&= F_\varepsilon + F_t \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
&= 0
\end{aligned}$$

On isole $\frac{\partial t}{\partial \varepsilon}$ et à l'aide du théorème précédent, on trouve :

$$\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} = -\frac{F_\varepsilon}{F_t} = -\frac{-\mu_1 f}{f} = \mu_1$$

La difficulté réside dans le fait que les dérivées successives de la fonction de répartition donnent des formules de plus en plus longues. On isole toujours la dérivée du quantile qui nous intéresse.

Cela nous donne pour le second ordre :

$$\frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} = -\frac{1}{f} \frac{d}{dx} \left[(\mu_2 - \mu_1^2) f \right] = -\frac{1}{f} \frac{d}{dx} \left[\text{Var} \cdot f \right]$$

On suit le même raisonnement pour le troisième ordre en cherchant de préférence, comme pour les deux premières dérivées, un moment conditionnel centré. Après avoir effectué les calculs et en supposant que $\mathbb{E}[U|X = x] = \mu_1 = 0$ (comme pour la formule de Pykhtin) et $\frac{d\mu_1}{dx} = 0$ on trouve la formule suivante :

$$\frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} = \frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} \left(m_3 \cdot f \right)$$

Après avoir effectué un changement de variable comme dans les deux premières dérivées de la VaR, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^3 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} &= \frac{1}{f_{L(1)}} \frac{d^2}{dl^2} \left(f_{L(1)} \cdot m_3 [U|L=l] \right) \Big|_{l=t_q(\bar{L})} \\
&= \frac{1}{(\lambda')^2} \left[\left(y^2 - 1 + (3y - 1) \frac{\lambda''}{\lambda'} + 3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} \right)^2 \right) m_3 - \left(2y + 3 \frac{\lambda''}{\lambda'} \right) m'_3 + m''_3 \right]
\end{aligned}$$

A partir de là, la principale difficulté consiste à calculer m_3 , m'_3 et m''_3 . On peut trouver dans l'appendice de ce document les calculs. Ces calculs nécessitent notamment de dériver les fonctions de répartition de la loi normale bivariée et de la loi normale trivariée. Dans ce but, on utilisera une décomposition de Cholesky pour les matrices de covariance.

6.2 Coefficients c_i

Le choix des coefficients est un problème posé par Michael Pykhtin dans son article car il permet d'améliorer la précision de sa formule de façon significative.

On présente le problème dans sa forme la plus simple, sans utilisation de pondération c_i

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{i=1}^M \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) \right) \text{ avec la contrainte } \sum_{k=1}^N b_k^2 = 1$$

On utilise la méthodes des multiplicateurs de Lagrange

$$\begin{aligned} J(b_k) &= - \sum_{i=1}^M \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) + \lambda \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 - 1 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} b_k + \lambda \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_k} = - \sum_{i=1}^M \alpha_{ik} + 2\lambda b_k = 0$$

La solution à ce problème d'optimisation est donné par :

$$b_k = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^M \alpha_{ik}$$

Un choix possible pour que le multiplicateur de Lagrange λ satisfasse la contrainte est :

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \alpha_{i1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \alpha_{iN} \right)^2}$$

On définit le portefeuille suivant

- $M_A = M_B = \infty$
- $p_A = p_B = 0.5\%$
- $\mu_A = \mu_B = 40\%$
- $\sigma_A = \sigma_B = 20\%$
- $r_A = 0.1 \quad r_B = 0.9$
- $\omega_A = 0.6 \quad \omega_B = 0.4$

Nous allons utiliser la formule de Pykhtin pour calculer la VaR, mais avec trois coefficients c_i différents.

- $c_i = \omega_i \cdot \mu_i \cdot \mathcal{N} \left[\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) + r_i \mathcal{N}^{-1}(q)}{\sqrt{1-r_i^2}} \right]$
- $c_i = \omega_i \cdot \mu_i \cdot n[\mathcal{N}^{-1}(p_i)]$
- $c_i = \frac{1}{2}$

On va mettre en évidence l'importance du choix du coefficient c_i . Le premier coefficient correspond à celui trouvé de manière intuitive par Pykhtin. Le second est un coefficient qui est valable si les sensibilités r_i sont faibles. Quant au troisième, il correspond à la solution si on ne pondère pas les corrélations dans le problème d'optimisation.

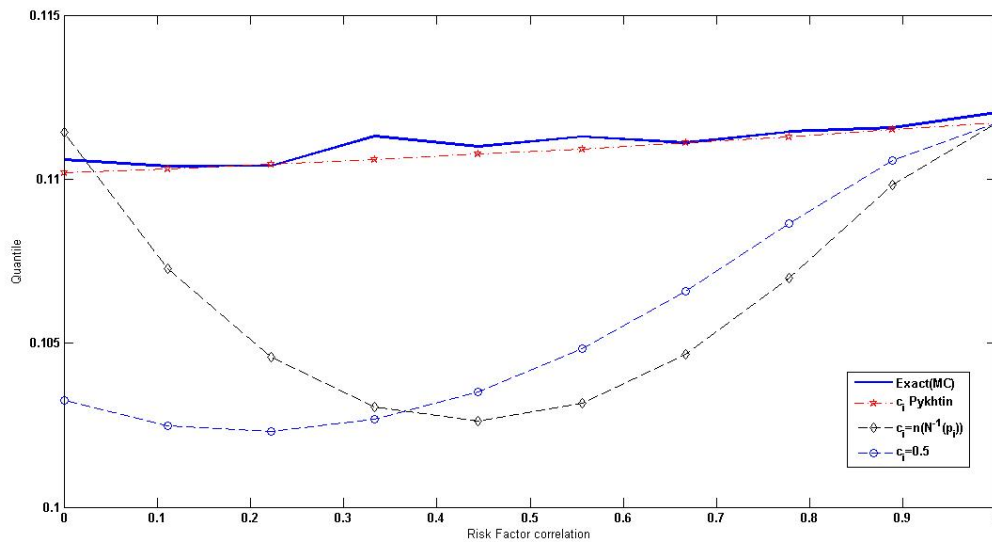


FIGURE 21 – PORTEFEUILLE NON HOMOGENE - $\omega_A = 0.6$

On voit clairement que le coefficient de Pykhtin est celui qui fonctionne le mieux. Les autres coefficients donnent des résultats aberrants notamment dus à des valeurs extrêmes pour les sensibilités r_i .

Regardons maintenant le portefeuille suivant :

- $M_A = M_B = \infty$
- $p_A = p_B = 0.5\%$
- $\mu_A = \mu_B = 40\%$
- $\sigma_A = \sigma_B = 20\%$
- $r_A = r_B = 0.5$
- $\omega_A = \omega_B = 0.5$

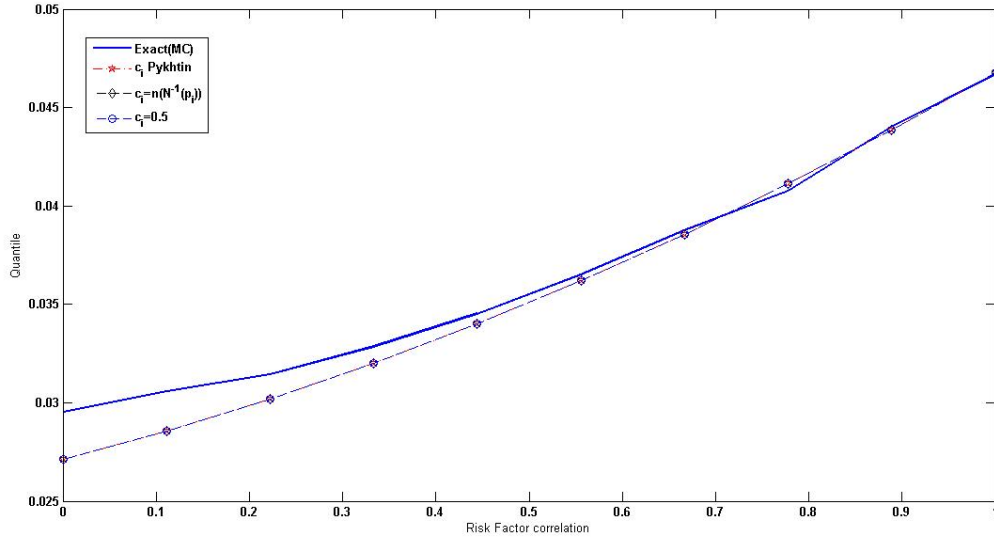


FIGURE 22 – PORTEFEUILLE HOMOGENE - $\omega_A = 0.5$

Dans le cas présent qui représente un cas plus traditionnel dans notre batterie de test, on observe que les 3 coefficients donnent le même résultat. Il faut donc pour le moment s'en tenir à l'utilisation du coefficient présenté par Pykhtin et qui est issu des expériences qu'il a pu faire.

7 Allocation optimale de portefeuille de crédit

7.1 Présentation du problème

Nous allons exposer dans ce chapitre l'utilité de calculer la Value-at-Risk au moyen d'une formule analytique et non plus grâce à des simulations de Monte Carlo.

Certains établissements bancaires utilisent des indicateurs leur permettant de mesurer le risque de leurs portefeuilles. Ces établissements, grâce aux mesures de risque existantes sont amenés à optimiser l'allocation de capital au sein de ces portefeuilles. L'écart-type est une mesure encore utilisée malgré le fait qu'elle ne tienne pas compte de la corrélation entre les portefeuilles.

L'indicateur qui va nous intéresser est le capital économique. Le capital économique a pour but de couvrir les pertes les plus importantes et imprévues.

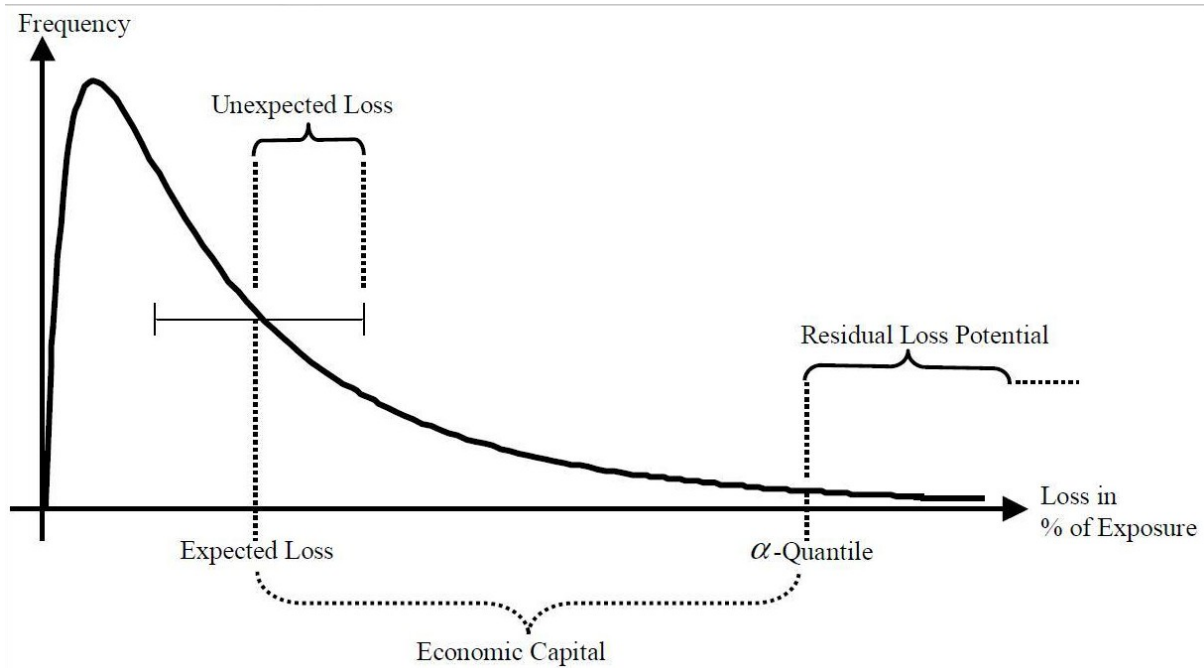


FIGURE 23 – DISTRIBUTION DE P&L

On peut voir que le capital économique est la différence entre la VaR et la perte moyenne de la distribution. Cela correspond donc à des fonds dont la banque doit disposer si elle ne veut pas faire faillite en cas de perte inférieure ou égale à la VaR. Le capital économique est donc défini avec le même niveau de confiance que la VaR. Il peut donc être intéressant de faire diminuer la VaR afin que ce capital diminue.

Par manque de temps, aucune application n'a été effectuée. C'est pour cela que seul le principe de l'allocation sera exposé et que l'utilité de la formule de Pykhtin dans ce contexte sera montrée.

7.2 Utilité de la formule de Pykhtin dans l'allocation de portefeuille

On se base sur l'identité d'Euler et donc les fonctions homogènes pour dériver la VaR par rapport aux poids ω_i

Théorème 2 *Théorème d'euler*

Soient V et W deux espaces vectoriels. Soit f une fonction définie par :

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow W \\ X &\longmapsto f(X) \end{aligned}$$

Si f est une fonction homogène d'ordre k , i.e $f(\lambda X) = \lambda^k f(X)$ et f est différentiable en tout point de V , alors f vérifie l'identité d'Euler.

$$X \cdot \nabla f(X) = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) = k f(X)$$

La VaR est une fonction homogène d'ordre 1 car c'est une mesure de risque homogène. Elle est différentiable en tout point par rapport aux poids ω pour une distribution continue, donc elle vérifie cette propriété.

Pour calculer la contribution d'un portefeuille dans la VaR, on utilise le théorème d'Euler :

$$\text{VaR} = \sum_{i=1}^M \omega_i \frac{\partial \text{VaR}}{\partial \omega_i} = \sum_{i=1}^M \text{VaR}_i$$

Dériver la VaR obtenue avec une simulation de Monte Carlo est très difficile. On pourrait utiliser le schéma $\frac{\text{VaR}(X+\epsilon) - \text{VaR}(X)}{\epsilon}$. Le problème est que les générateurs de nombres aléatoires utilisés dans les simulations de Monte Carlo ne sont que des générateurs pseudo-aléatoires. Les tirages obtenus avec ces générateurs sont sujets à des bruits. Le résultat obtenu en faisant la différence de deux VaR n'est donc pas pertinent. On peut remédier à ce problème en effectuant les simulations de $\text{VaR}(X)$ et de $\text{VaR}(X + \epsilon)$ en utilisant les mêmes tirages.

Une deuxième solution consiste à utiliser une autre mesure de risque, la VaR conditionnelle notée CVaR et définie par $\mathbb{E}[L|L \geq \text{VaR}]$. Cette mesure définit la perte moyenne en cas de perte supérieure à la VaR à un niveau de confiance β . Etant basée sur une moyenne, elle est plus stable que la VaR. On calcule la CVaR_β en déterminant β tel que $\text{CVaR}_\beta = \text{VaR}_\alpha$. On utilise ensuite le même schéma que précédemment. On notera quand même qu'une seule dérivation pourra être effectuée, les ordres supérieurs ne pouvant être obtenus avec des VaR issues de simulations de Monte Carlo.

Les difficultés évoquées montrent de manière évidente l'utilité d'une formule analytique pour le calcul de la VaR. Non seulement une formule analytique est obtenue pour la dérivée de la VaR mais on peut imaginer dériver plusieurs fois la VaR. On illustrera cela en cherchant à trouver la contribution du capital économique de chaque portefeuille dans le capital économique global.

On rappelle que le capital économique est défini par :

$$\text{EC} = \text{VaR} - \text{EL}$$

où EC est le capital économique et EL est la perte moyenne.

On calcule la dérivée du capital économique par rapport aux poids ω_i

$$\text{EC}_j = \frac{\partial \text{EC}}{\partial \omega_j} = \frac{\partial}{\partial \omega_j} (\text{VaR} - \text{EL}) = \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial \omega_j} \left[\omega_i \frac{\partial \text{VaR}}{\partial \omega_i} \right] - \frac{\partial}{\partial \omega_j} (\text{EL})$$

On voit donc la nécessité d'une formule analytique puisqu'on a besoin de dériver deux fois la VaR. La formule de Pyhtin apparaît tout à fait désignée pour être utilisée dans les problématiques d'allocation suivant le critère de la VaR. Le détail des calculs des dérivées de la formule de Pykhtin peut être trouvé dans l'appendice de ce rapport.

8 Conclusion

8.1 Sur le travail effectué

La liberté que j'avais dans mon travail m'a permis d'adopter une démarche dans laquelle je devais établir des priorités et cela fut très enrichissant. Après m'être approprié le modèle et l'avoir implémenté, il fallait définir son champ d'application et tenter d'améliorer la formule. Mon seul regret est de n'avoir pu implémenter durant mon stage la troisième dérivée de la VaR et donc connaître un des résultats de mes recherches.

Une partie de mon travail consistant à améliorer un modèle, je dus me plonger dans la lecture de dizaines d'articles et de livres afin de m'enquérir de l'état de l'art. Ce fut un travail long car la recherche allant de l'avant, les nouvelles découvertes se basent sur d'anciennes découvertes et ainsi de suite.

La formation MACS m'a dispensé la plupart des outils mathématiques requis que ce soit au niveau du calcul stochastique, de l'optimisation ou de l'analyse numérique. Les nombreux projets durant mon cursus m'ont permis d'avoir des facilités lors de l'implémentation des modèles mathématiques ainsi que dans l'optimisation de codes. Cependant, le faible nombre d'heures de finance pure dispensées au sein de l'école a été un frein à certains moments.

8.2 Sur le plan personnel

J'ai eu la chance d'effectuer mon stage au sein de Quantitative Risk Research. Au contact de personnes travaillant depuis des années dans la finance, j'ai appris énormément sur les modèles utilisés et sur l'interaction entre les sociétés éditrices de logiciels et les banques. De plus, le stage se déroulant à l'étranger, je découvris une autre culture du travail et je dus m'adapter à cette culture. Je découvris aussi pour la première fois un management horizontal qui me parut tout à fait efficient dans son fonctionnement et qui permettait l'épanouissement de tout un chacun.

A Calculs des dérivées de la VaR

A.1 D'après les travaux de Gouriéroux, Laurent, Scaillet (2000)

On tente de montrer comment Gouriéroux, Laurent et Scaillet calculent la première et la seconde dérivée de la VaR.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \frac{\iint xf(x, y, -\varepsilon y) dx dy}{\iint f(x, y, -\varepsilon y) dx dy} \\
 &= \frac{\iint xf(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon)}{\iint f(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon)} \\
 &= \frac{A_0 - A_1}{B_0 - B_1} \\
 &= \frac{A_0 - A_1}{B_0(1 - \frac{B_1}{B_0})} \\
 &= \frac{A_0 - A_1}{B_0} \left[1 + \frac{B_1}{B_0} + o(\varepsilon) \right] \\
 &= \frac{A_0 - A_1}{B_0^2} \left(\underbrace{A_0 B_0}_{O(\varepsilon^0)} + \underbrace{A_0 B_1}_{O(\varepsilon^1)} - \underbrace{A_1 B_0}_{O(\varepsilon^1)} + o(\varepsilon) \right) \\
 &= \frac{\iint xf}{\iint f} + \varepsilon \frac{\iint xf}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f} - \varepsilon \frac{\iint xy \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f}
 \end{aligned}$$

On sait que

$$\mathbb{E}[X|Z = 0] = \frac{\iint xf(x, y, 0) dx dy}{\iint f(x, y, 0) dx dy}$$

et que

$$\frac{\partial \log f}{\partial z} = \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z}$$

d'où

$$\mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] = \frac{\iint xf}{\iint f} + \varepsilon \frac{\iint xf}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f} - \varepsilon \frac{\iint xy \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \mathbb{E}[X|Z = 0] + \varepsilon \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] - \varepsilon \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \\
 &= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \left\{ \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] - \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \right\} \\
 &= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \mathbf{Cov} \left[X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right]
 \end{aligned}$$

La première dérivée s'écrit donc

$$\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} = \mathbb{E}[Y|Z + \varepsilon Y = 0]$$

avec :

$$\mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] = \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \mathbf{Cov} \left[X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y, 0) \middle| Z = 0 \right] + o(\varepsilon)$$

Puisque

$$f(x, y, z) = f(x, y|z)g(z)$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \mathbf{Cov} \left[X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|0) \middle| Z = 0 \right] \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \bigg|_{z=0} \mathbf{Cov}[X, Y|Z = 0] + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Cov}[X, Y|Z = z] &= \mathbb{E}[XY|Z = z] - \mathbb{E}[X|Z = z]\mathbb{E}[Y|Z = z] \\ &= \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|Z) \middle| Z = z \right] - \mathbb{E}[X|Z = z]\mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|Z) \middle| Z = z \right] \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{E}[X|Z = z]\mathbb{E}[Y|Z = z] \\ &= \mathbf{Cov} \left[X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z}(X, Y|Z) \middle| Z = z \right] - \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{E}[X|Z = z]\mathbb{E}[Y|Z = z] \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \bigg|_{z=0} \mathbf{Cov}[X, Y|Z = 0] \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Cov}[X, Y|Z = z] \bigg|_{z=0} - \varepsilon \mathbb{E}[Y|Z = z] \frac{\partial}{\partial z} \mathbb{E}[X|Z = z] + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Si $\mathbb{E}[Y|Z = 0] = 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \bigg|_{z=0} \mathbf{Cov}[X, Y|Z = 0] \\ &\quad - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Cov}[X, Y|Z = z] \bigg|_{z=0} \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} &= \mathbb{E}[Y|Z + \varepsilon Y = 0] \\ &= \mathbb{E}[Y|Z = 0] - \varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \bigg|_{z=0} \mathbf{Cov}[Y, Y|Z = 0] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Cov}[Y, Y|Z = z] \bigg|_{z=0} \\ &= -\varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \bigg|_{z=0} \mathbf{Cov}[Y, Y|Z = 0] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Cov}[Y, Y|Z = z] \bigg|_{z=0} \\ &= -\varepsilon \frac{\partial \log g(z)}{\partial z} \bigg|_{z=0} \mathbf{Var}[Y|Z = 0] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{Var}[Y|Z = z] \bigg|_{z=0} \\ &= -\varepsilon \frac{1}{g(z)} \frac{\partial}{\partial z} (g(z) \mathbf{Var}[Y|Z = 0]) \end{aligned}$$

Résultat

La première dérivée est

$$\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} = -\varepsilon \frac{1}{g(z)} \frac{\partial}{\partial z} (g(z) \mathbf{Var}[Y|Z = 0])$$

La seconde dérivée est

$$\frac{\partial^2 Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon^2} = -\frac{1}{g(z)} \frac{\partial}{\partial z} (g(z) \mathbf{Var}[Y|Z = 0])$$

Calcul de la troisième dérivée

On fait un développement de Taylor au second ordre au lieu du premier. En espérant obtenir une expression pour la 3ème dérivée de la VaR.

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \frac{\iint xf(x, y, -\varepsilon y) dx dy}{\iint f(x, y, -\varepsilon y) dx dy} \\
 &= \frac{\iint xf(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint xy \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint xy^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon^2)}{\iint f(x, y, 0) dx dy - \varepsilon \iint y \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, 0) dx dy + \frac{\varepsilon^2}{2} \iint y^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} f(x, y, 0) dx dy + o(\varepsilon^2)} \\
 &= \frac{A_0 - A_1 + A_2}{B_0 - B_1 + B_2} \\
 &= \frac{A_0 - A_1 + A_2}{B_0 \left(1 - \frac{B_1 - B_2}{B_0}\right)} \\
 &= \frac{A_0 - A_1 + A_2}{B_0} \left[1 + \frac{B_1 - B_2}{B_0} + \left(\frac{B_1 - B_2}{B_0}\right)^2 + o(\varepsilon^2)\right] \\
 &= \frac{A_0 - A_1 + A_2}{B_0^2} \left(\underbrace{A_0 B_0}_{O(\varepsilon^0)} + \underbrace{A_0 B_1}_{O(\varepsilon^1)} - \underbrace{A_0 B_2}_{O(\varepsilon^2)} + \underbrace{A_0 B_1^2 B_0^{-1}}_{O(\varepsilon^2)} - \underbrace{A_1 B_0}_{O(\varepsilon^1)} - \underbrace{A_1 B_1}_{O(\varepsilon^2)} + \underbrace{A_2 B_0}_{O(\varepsilon^2)} + o(\varepsilon^2) \right) \\
 &= \frac{\iint xf}{\iint f} + \varepsilon \frac{\iint xf}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f} - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\iint xf}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\iint f} + \varepsilon^2 \frac{\iint xf}{\iint f} \left(\frac{\iint y \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f} \right)^2 \\
 &\quad - \varepsilon \frac{\iint xy \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f} - \varepsilon^2 \frac{\iint xy \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial f}{\partial z}}{\iint f} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\iint xy^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}{\iint f}
 \end{aligned}$$

On rappelle :

$$\mathbb{E}[X|Z = 0] = \frac{\iint xf(x, y, 0) dx dy}{\iint f(x, y, 0) dx dy}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \log f}{\partial z} &= \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \\
 \frac{\partial^2 \log f}{\partial z^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = - \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\
 \kappa &= \frac{1}{f} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \log f}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial z} \right)^2
 \end{aligned}$$

On n'a pas trouvé de simplification pour la fonction κ

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \frac{\iint xf}{\iint f} + \varepsilon \frac{\iint xf}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f} - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\iint xf}{\iint f} \frac{\iint y \kappa f}{\iint f} + \varepsilon^2 \frac{\iint xf}{\iint f} \left(\frac{\iint y \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f} \right)^2 \\
 &\quad - \varepsilon \frac{\iint xy \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f} - \varepsilon^2 \frac{\iint xy \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f} \frac{\iint y \frac{\partial \log f}{\partial z} f}{\iint f} + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\iint xy^2 \kappa f}{\iint f}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X|Z + \varepsilon Y = 0] &= \mathbb{E}[X|Z = 0] + \varepsilon \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] - \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E}[Y^2 \kappa | Z = 0] \\
&\quad + \varepsilon^2 \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E}^2 \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] - \varepsilon \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \\
&\quad - \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbb{E}[XY^2 \kappa | Z = 0] \\
&= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \left\{ \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] - \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \right\} \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \left\{ \mathbb{E}[XY^2 \kappa | Z = 0] - \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E}[Y^2 \kappa | Z = 0] \right\} \\
&\quad - \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \left\{ \mathbb{E} \left[XY \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] - \mathbb{E}[X|Z = 0] \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \right\} \\
&= \mathbb{E}[X|Z = 0] - \varepsilon \mathbf{Cov} \left[X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \\
&\quad + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{Cov} \left[X, Y^2 \kappa | Z = 0 \right] \\
&\quad - \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \mathbf{Cov} \left[X, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right]
\end{aligned}$$

Les trois premières dérivées de la VaR sont donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon} &= \mathbb{E}[Y|Z + \varepsilon Y = 0] \\
&= \mathbb{E}[Y|Z = 0] - \varepsilon \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa | Z = 0 \right] \\
&\quad - \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \\
&= -\varepsilon \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] + \frac{\varepsilon^2}{2} \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa | Z = 0 \right] \\
&\quad - \varepsilon^2 \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon^2} &= -\mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \\
&\quad + \varepsilon \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa | Z = 0 \right] \\
&\quad - 2\varepsilon \mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 Q(\varepsilon, \alpha)}{\partial \varepsilon^3} = \mathbf{Cov} \left[Y, Y^2 \kappa | Z = 0 \right] - 2\mathbb{E} \left[Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right] \mathbf{Cov} \left[Y, Y \frac{\partial \log f}{\partial z} \middle| Z = 0 \right]$$

Conclusion

Ne trouvant pas de simplifications, ces expressions ne sont pas directement exploitables dans le cadre de notre travail.

A.2 D'après les travaux de Richard Martin (2002)

Richard Martin (2002)

Première dérivée

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\varepsilon} F(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
 &= \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
 &= F_\varepsilon + F_t \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\clubsuit F_\varepsilon = \frac{\partial^1 F}{\partial \varepsilon^1} = (-1)^1 \frac{d^0}{dx^0} (\mu_1(x)f(x)) = -\mu_1 f$$

$$\clubsuit F_t = \frac{\partial F}{\partial t} = f$$

$$\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} = -\frac{F_\varepsilon}{F_t} = -\frac{-\mu_1 f}{f} = \mu_1$$

Seconde dérivée

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right) \\
 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon \partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon \partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
 &= \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon \partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
 &= F_{\varepsilon\varepsilon} + 2F_{t\varepsilon} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + F_{tt} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + F_t \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\clubsuit F_{\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} = (-1)^2 \frac{d^1}{dx^1} (\mu_2(x)f(x)) = \frac{d}{dx} (\mu_2(x)f(x))$$

$$\clubsuit F_{t\varepsilon} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varepsilon} = -\frac{d}{dx} (\mu_1(x)f(x))$$

$$\clubsuit F_{tt} = \frac{df}{dx}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} &= -\frac{1}{F_t} \left(F_{\varepsilon\varepsilon} + 2F_{t\varepsilon} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + F_{tt} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 \right) \\
 &= -\frac{1}{f} \left(\frac{d}{dx} (\mu_2 f) - 2\mu_1 \frac{d}{dx} (\mu_1 f) + \mu_1^2 \frac{df}{dx} \right) \\
 &= -\frac{1}{f} \left(\frac{d}{dx} (\mu_2 f) - 2\mu_1 f \frac{d}{dx} (\mu_1) - 2\mu_1^2 \frac{df}{dx} + \mu_1^2 \frac{df}{dx} \right) \\
 &= -\frac{1}{f} \left(\frac{d}{dx} (\mu_2 f) - 2\mu_1 f \frac{d}{dx} (\mu_1) - \mu_1^2 \frac{df}{dx} \right) \\
 &= -\frac{1}{f} \left(\frac{d}{dx} (\mu_2 f) - f \frac{d}{dx} (\mu_1^2) - \mu_1^2 \frac{df}{dx} \right) \\
 &= -\frac{1}{f} \left(\frac{d}{dx} (\mu_2 f) - \frac{d}{dx} (\mu_1^2 f) \right) \\
 &= -\frac{1}{f} \frac{d}{dx} \left[(\mu_2 - \mu_1^2) f \right] \\
 \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} &= -\frac{1}{f} \frac{d}{dx} \left[\text{Var} \cdot f \right]
 \end{aligned}$$

Calcul de la troisième dérivée

$$\begin{aligned}
\frac{d^3}{d\varepsilon^3} F(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon \partial t} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \right) \\
&= \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \varepsilon^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
&\quad + 2 \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varepsilon} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varepsilon} + \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right) \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varepsilon} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right) \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} \\
&= \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \varepsilon^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \\
&\quad + 2 \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \varepsilon^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + 2 \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varepsilon} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
&\quad + \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varepsilon} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^3 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
&\quad + \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} \\
\frac{d^3}{d\varepsilon^3} F(\varepsilon, t(\varepsilon)) &= \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial t^3} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^3 + \frac{\partial F}{\partial t} \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} \\
&\quad + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \varepsilon^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varepsilon} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} + 3 \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
&= F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + F_{ttt} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^3 + F_t \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} \\
&\quad + 3F_{t\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} + 3F_{t\varepsilon t} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 3F_{t\varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} + 3F_{tt} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\clubsuit \quad F_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial^3 F}{\partial \varepsilon^3} = (-1)^3 \frac{d^2}{dx^2} (\mu_3(x)f(x)) = -\frac{d^2}{dx^2} (\mu_3(x)f(x))$$

$$\clubsuit \quad F_{t\varepsilon\varepsilon} = \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial \varepsilon^2} = \frac{d^2}{dx^2} (\mu_2(x)f(x))$$

$$\clubsuit \quad F_{t\varepsilon t} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \varepsilon} = -\frac{d^2}{dx^2} (\mu_1(x)f(x))$$

$$\clubsuit \quad F_{ttt} = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\begin{aligned}
F_t \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} &= - \left[F_{\varepsilon \varepsilon \varepsilon} + F_{ttt} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^3 + 3F_{t\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right. \\
&\quad \left. + 3F_{tt\varepsilon} \left(\frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \right)^2 + 3F_{t\varepsilon\varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} + 3F_{tt\varepsilon} \frac{\partial t}{\partial \varepsilon} \frac{\partial^2 t}{\partial \varepsilon^2} \right] \\
&= - \left[-\frac{d^2}{dx^2}(\mu_3 f) + \frac{d^2 f}{dx^2} \mu_1^3 + 3 \frac{d^2}{dx^2}(\mu_2 f) \mu_1 \right. \\
&\quad \left. - 3 \frac{d^2}{dx^2}(\mu_1 f) \mu_1^2 + 3 \frac{d}{dx}(\mu_1 f) \frac{1}{f} - \frac{d}{dx} \left((\mu_2 - \mu_1^2) f \right) - 3 \frac{df}{dx} \mu_1 \frac{1}{f} - \frac{d}{dx} \left((\mu_2 - \mu_1^2) f \right) \right] \\
&= \frac{d^2}{dx^2}(\mu_3 f) - \frac{d^2 f}{dx^2} \mu_1^3 - 3 \frac{d^2}{dx^2}(\mu_2 f) \mu_1 \\
&\quad + 3 \frac{d^2}{dx^2}(\mu_1 f) \mu_1^2 - 3 \frac{d}{dx}(\mu_1 f) \frac{1}{f} - \frac{d}{dx} \left((\mu_2 - \mu_1^2) f \right) + 3 \frac{df}{dx} \mu_1 \frac{1}{f} - \frac{d}{dx} \left((\mu_2 - \mu_1^2) f \right) \\
&= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} f + \frac{d^2 f}{dx^2} \mu_3 + 2 \frac{d\mu_3}{dx} \frac{df}{dx} - \frac{d^2 f}{dx^2} \mu_1^3 - 3\mu_1 \left(\frac{d^2 \mu_2}{dx^2} f + \frac{d^2 f}{dx^2} \mu_2 + 2 \frac{d\mu_2}{dx} \frac{df}{dx} \right) \\
&\quad + 3\mu_1^2 \left(\frac{d^2 \mu_1}{dx^2} f + \frac{d^2 f}{dx^2} \mu_1 + 2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} \right) \\
&\quad - 3 \frac{1}{f} \left(\frac{d\mu_1}{dx} f + \frac{df}{dx} \mu_1 \right) \left(\frac{d\mu_2}{dx} f + \frac{df}{dx} \mu_2 - 2\mu_1 \frac{d\mu_1}{dx} f - \mu_1^2 \frac{df}{dx} \right) \\
&\quad + 3\mu_1 \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \left(\frac{d\mu_2}{dx} f + \frac{df}{dx} \mu_2 - 2\mu_1 \frac{d\mu_1}{dx} f - \mu_1^2 \frac{df}{dx} \right) \\
&= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} f + \mu_3 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 \frac{d\mu_3}{dx} \frac{df}{dx} - \mu_1^3 \frac{d^2 f}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} f - 3\mu_1 \mu_2 \frac{d^2 f}{dx^2} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} \frac{df}{dx} \\
&\quad + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} f + 3\mu_1^3 \frac{d^2 f}{dx^2} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} \\
&\quad - 3 \frac{1}{f} \left[\frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} f^2 + \mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} f \frac{df}{dx} + \mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} f \frac{df}{dx} + \mu_1 \mu_2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - 2\mu_1 f^2 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 - 2\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} f \frac{df}{dx} - \mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} f \frac{df}{dx} - \mu_1^3 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \\
&\quad + 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} \frac{df}{dx} + 3\mu_1 \mu_2 \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} - 3\mu_1^3 \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \\
&= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} f + \mu_3 \frac{d^2 f}{dx^2} + 2 \frac{d\mu_3}{dx} \frac{df}{dx} - \mu_1^3 \frac{d^2 f}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} f - 3\mu_1 \mu_2 \frac{d^2 f}{dx^2} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} \frac{df}{dx} \\
&\quad + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} f + 3\mu_1^3 \frac{d^2 f}{dx^2} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} \\
&\quad - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} f - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} \frac{df}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} - 3\mu_1 \mu_2 \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \\
&\quad + 6\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 f + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} + 3\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} + 3\mu_1^3 \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \\
&\quad + 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} \frac{df}{dx} + 3\mu_1 \mu_2 \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 - 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{df}{dx} - 3\mu_1^3 \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} &= \left[\frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 \right] f \\
&+ \left[\mu_3 - \mu_1^3 - 3\mu_1 \mu_2 + 3\mu_1^3 \right] \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&+ \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} \right. \\
&\quad \left. + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} + 3\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} + 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} - 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{df}{dx} \\
&+ \left[3\mu_1^3 - 3\mu_1 \mu_2 + 3\mu_1 \mu_2 - 3\mu_1^3 \right] \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \\
&= \left[\frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 \right] f \\
&+ \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 3\mu_1^3 - \mu_1^3 \right] \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&+ \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} \right. \\
&\quad \left. + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} + 3\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} - 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{df}{dx} \\
&+ \left[3\mu_1^3 - 3\mu_1^3 - 3\mu_1 \mu_2 + 3\mu_1 \mu_2 \right] \frac{1}{f} \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \\
&= \left[\frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 \right] f \\
&+ \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right] \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&+ \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} + 9\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{df}{dx}
\end{aligned}$$

On obtient la formule suivante

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} &= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 \\
&+ \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right] \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&+ \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} + 9\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{1}{f} \frac{df}{dx}
\end{aligned}$$

Dérivée de $m_3 \cdot f$

Une simplification pour la formule précédente n'étant pas évidente, on essaye par analogie de faire intervenir un moment (ici le troisième) comme cela est le cas dans les deux premières dérivées.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left(m_3 \cdot f \right) &= \frac{d}{dx} \left((\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3) f \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left(\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right) f + (\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3) \frac{df}{dx} \\
&= \left(\frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right) f + (\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3) \frac{df}{dx}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2}{dx^2} \left(m_3 \cdot f \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} (m_3 \cdot f) \right) \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right) f \\
&\quad + \left(\frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right) \frac{df}{dx} \\
&\quad + \frac{d}{dx} \left(\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right) \frac{df}{dx} + \left(\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right) \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= \frac{d}{dx} \left(\frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right) f \\
&\quad + 2 \left(\frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right) \frac{df}{dx} \\
&\quad + \left(\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right) \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= \left[\frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 12\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 + 6\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} \right] f \\
&\quad + 2 \left[\frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 3\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 6\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{df}{dx} \\
&\quad + \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right] \frac{d^2 f}{dx^2} \\
&= \left[\frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 6 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 12\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 + 6\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} \right] f \\
&\quad + \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 12\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{df}{dx} \\
&\quad + \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right] \frac{d^2 f}{dx^2}
\end{aligned}$$

Conclusion

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} \left(m_3 \cdot f \right) &= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 6 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 12\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 + 6\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} \\
&\quad + \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 12\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \\
&\quad + \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right] \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} &= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_1 \frac{d^2 \mu_2}{dx^2} + 6\mu_1 \left(\frac{d\mu_1}{dx} \right)^2 + 3\mu_1^2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} \\
&\quad + \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} - 6\mu_1 \frac{d\mu_2}{dx} + 9\mu_1^2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \\
&\quad + \left[\mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3 \right] \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2}
\end{aligned}$$

Rappel

$$\begin{aligned}
\clubsuit \mu_n(x) &= \mathbb{E} [U^n | X = x] & \clubsuit \text{Var} [U | X = x] &= \mathbb{E} [U^2 | X = x] - \mathbb{E}^2 [U | X = x] = \mu_2 - \mu_1^2 \\
& & \clubsuit m_3 [U | X = x] &= \mu_3 - 3\mu_1 \mu_2 + 2\mu_1^3
\end{aligned}$$

Selon Pykhtin, $\mu_1(x) = \mathbb{E}[U|X = x] = 0$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} \left(m_3 \cdot f \right) &= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 6 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} - 3\mu_2 \frac{d^2 \mu_1}{dx^2} \\ &+ \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 6\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \\ &+ \mu_3 \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} &= \frac{d^2 \mu_3}{dx^2} - 3 \frac{d\mu_1}{dx} \frac{d\mu_2}{dx} \\ &+ \left[2 \frac{d\mu_3}{dx} - 3\mu_2 \frac{d\mu_1}{dx} \right] \frac{1}{f} \frac{df}{dx} \\ &+ \mu_3 \frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} \end{aligned}$$

Si on fait l'hypothèse $\frac{d\mu_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\mathbb{E}[U|X = x] \right) = 0$, alors :

$$\frac{\partial^3 t}{\partial \varepsilon^3} = \frac{1}{f} \frac{d^2}{dx^2} \left(m_3 \cdot f \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{d^3 t_q(L_\varepsilon)}{d\varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=0} \\
&= \frac{1}{f_{\bar{L}(L)}} \frac{d^2}{d\bar{L}^2} \left(f_{\bar{L}(L)} \cdot m_3 [U|\bar{L}=L] \right) \Big|_{L=t_q(\bar{L})} \\
&= -\frac{1}{\frac{n(\lambda^{-1}(L))}{\lambda'(\lambda^{-1}(L))}} \frac{d}{d\bar{y}} \left[\frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n(\lambda^{-1}(L))}{\lambda'(\lambda^{-1}(L))} m_3 [U|\bar{Y}=y] \right) \cdot \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(L))} \right] \frac{1}{\lambda'(\lambda^{-1}(L))} \\
&= \frac{1}{n(y)} \frac{d}{d\bar{y}} \left[\frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n(y)}{\lambda'(y)} m_3 [U|\bar{Y}=y] \right) \frac{1}{\lambda'(y)} \right] \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)} \\
&= \frac{1}{n(y)} \left[\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left(\frac{n(y)}{\lambda'(y)} m_3 [U|\bar{Y}=y] \right) \frac{1}{\lambda'(y)} + \frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n(y)}{\lambda'(y)} m_3 [U|\bar{Y}=y] \right) \frac{-\lambda''}{(\lambda'(y))^2} \right] \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)} \\
&= \frac{1}{n(y)} \frac{1}{\lambda'(y)} \left[\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left(\frac{n}{\lambda'} \right) m_3 + \frac{d^2 m_3}{d\bar{y}^2} \frac{n}{\lambda'} + 2 \frac{dm_3}{d\bar{y}} \frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n}{\lambda'} \right) \right] \\
&\quad + \frac{-\lambda''}{(\lambda'(y))^2} \frac{1}{n(y)} \left[\frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n(y)}{\lambda'(y)} \right) m_3 + \frac{dm_3}{d\bar{y}} \frac{n(y)}{\lambda'(y)} \right] \\
&= \frac{1}{n(y)} \frac{1}{\lambda'(y)} \left[\frac{d^2}{d\bar{y}^2} \left(\frac{n}{\lambda'} \right) m_3 + \frac{d^2 m_3}{d\bar{y}^2} \frac{n}{\lambda'} + 2 \frac{dm_3}{d\bar{y}} \frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n}{\lambda'} \right) \right] \\
&\quad + \frac{-\lambda''}{(\lambda'(y))^3} \left[m_3' - m_3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + y \right) \right] \\
&= \frac{1}{n\lambda'} \left[\frac{d}{d\bar{y}} \left(\frac{n'\lambda' - n\lambda''}{(\lambda')^2} \right) m_3 + m_3'' \frac{n}{\lambda'} + 2m_3' \frac{n'\lambda' - n\lambda''}{(\lambda')^2} \right] \\
&\quad + \frac{-\lambda''}{(\lambda')^3} \left[m_3' - m_3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + y \right) \right] \\
&= \frac{1}{n\lambda'} \left[\left(\frac{n''\lambda' - n\lambda''}{(\lambda')^2} \right) m_3 - 2\lambda'' \left(\frac{n'\lambda' - n\lambda''}{(\lambda')^3} \right) m_3 + m_3'' \frac{n}{\lambda'} + 2m_3' \frac{n'\lambda' - n\lambda''}{(\lambda')^2} \right] \\
&\quad + \frac{-\lambda''}{(\lambda')^3} \left[m_3' - m_3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + y \right) \right] \\
&= \frac{1}{n\lambda'} \left[\left(\frac{(y^2 - 1)n\lambda' - n\lambda''}{(\lambda')^2} \right) m_3 + 2\lambda'' \left(\frac{yn\lambda' + n\lambda''}{(\lambda')^3} \right) m_3 + m_3'' \frac{n}{\lambda'} - 2m_3' \frac{yn\lambda' + n\lambda''}{(\lambda')^2} \right] \\
&\quad + \frac{-\lambda''}{(\lambda')^3} \left[m_3' - m_3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + y \right) \right] \\
&= \frac{1}{\lambda'} \left[\left(\frac{(y^2 - 1)\lambda' - \lambda''}{(\lambda')^2} \right) m_3 + 2\lambda'' \left(\frac{y\lambda' + \lambda''}{(\lambda')^3} \right) m_3 + m_3'' \frac{1}{\lambda'} - 2m_3' \frac{y\lambda' + \lambda''}{(\lambda')^2} \right] \\
&\quad + \frac{-\lambda''}{(\lambda')^3} \left[m_3' - m_3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} + y \right) \right] \\
&= \frac{1}{(\lambda')^2} \left[\left(y^2 - 1 + (3y - 1) \frac{\lambda''}{\lambda'} + 3 \left(\frac{\lambda''}{\lambda'} \right)^2 \right) m_3 - \left(2y + 3 \frac{\lambda''}{\lambda'} \right) m_3' + m_3'' \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m_3 [L|\bar{Y}=y] &= \mathbb{E} [m_3(L|\{Z_k\})|\bar{Y}=y] + m_3 [\mathbb{E}(L|\{Z_k\})|\bar{Y}=y] \\
&\quad + 3\mathbf{Cov} [\mathbb{E}(L|\{Z_k\}), \text{Var}(L|\{Z_k\})|\bar{Y}=y]
\end{aligned}$$

Pykhtin

$$L = \sum_{i=1}^M \omega_i L_i = \sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} Q_i$$

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\mathbb{E}(L|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(L|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] - \mathbb{E}^2 \left[\mathbb{E}(L|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L|\{Z_k\}) \mathbb{E}(L|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{E}(L_i|\{Z_k\}) \cdot \sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{E}(L_i|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] - \mathbb{E} \left[L \middle| \bar{Y} = y \right] \mathbb{E} \left[L \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L_i|\{Z_k\}) \mathbb{E}(L_j|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] - \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{p}_i(y) \cdot \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{p}_i(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} Q_i|\{Z_k\}) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} Q_j|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{E}(Q_i|\{Z_k\}) \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{E}(Q_j|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{E}(Q_i) \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{E}(Q_j) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i), X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathbb{P} \left(X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i), X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j) \middle| \bar{Y} = y \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] \right) - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y)
\end{aligned}$$

M

$$\begin{aligned}
& \text{Var} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E}^2 \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \mathbb{E}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{E}(\mathbf{L}_i|\{Z_k\}) \cdot \sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{E}(\mathbf{L}_i|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbf{L} \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \mathbb{E} \left[\mathbf{L} \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}_i|\{Z_k\}) \mathbb{E}(\mathbf{L}_j|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] - \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \cdot \sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} Q_i|\{Z_k\}) \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} Q_j|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{E}(Q_i|\{Z_k\}) \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{E}(Q_j|\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{E}(Q_i) \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{E}(Q_j) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathbb{P} \left(X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i), X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right) + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathbb{P} \left[X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i) \middle| \bar{Y} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})] \right) + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\text{Var}(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}^2|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mathbf{L}_i \mathbf{L}_j \middle| \{Z_k\} \right) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}_i \mathbf{L}_j | \{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}_i^2 | \{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{E}(\mathbf{Q}_i | \{Z_k\}) \mathbb{E}(\mathbf{Q}_j | \{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}}^2 \mathbf{Q}_i^2 | \{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{E}(\mathbf{Q}_i) \mathbb{E}(\mathbf{Q}_j) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{E}(\mathbf{Q}_i^2) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{Z_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})] \right) + \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mathbb{E}(\mathbf{Q}_i^2) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})] \right) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mathbb{E}(\mathbf{Q}_i^2) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mathbb{E}(\mathbf{Q}_i^2) \mathbb{P} \left[X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \left(\text{Var}[\mathbf{Q}_i] + \mathbb{E}^2[\mathbf{Q}_i] \right) \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \\
&= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \sigma_i^2 \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_3 \left[\mathbf{L} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbf{m}_3(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] + \mathbf{m}_3 \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad + 3\mathbf{Cov} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}), \mathbf{Var}(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbf{m}_3 \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^3(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad + 2 \mathbb{E}^3 \left[\mathbb{E}(\mathbf{L}|\{\mathbf{Z}_k\}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_m(\mathbf{y})] \right) \\
&\quad - 3 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})] \right) \right) \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[m_3(L(\{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L^3 | \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L | \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L^2 | \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + 2 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^3(L | \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m L_i L_j L_m \mid \{Z_k\} \right) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^M \omega_i L_i \mid \{Z_k\} \right) \cdot \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_j \omega_m L_j L_m \mid \{Z_k\} \right) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L_i | \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L_j | \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L_m | \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} Q_i Q_j Q_m \mid \{Z_k\} \right) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left(L_i \mid \{Z_k\} \right) \mathbb{E} \left(L_j L_m \mid \{Z_k\} \right) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L_i | \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L_j | \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L_m | \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left(Q_i Q_j Q_m \right) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mathbb{E} \left(Q_j Q_m \right) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left(Q_i Q_j Q_m \right) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mathbb{E} \left(Q_j Q_m \right) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(p_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(p_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(p_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E} \left[\mathbf{m}_3(\mathbf{L}(\mathbf{Z}_k)) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \left(3\mu_i \left(\mathbf{Cov}(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_m) + \mu_j \mu_m \right) + 2\mu_i \mu_j \mu_m \right) \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \right] \\
&\quad - 3 \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \left(\mathbf{Cov}(\mathbf{Q}_j, \mathbf{Q}_m) + \mu_j \mu_m \right) \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&\quad + 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= 4 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= 4 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_m(\mathbf{y})] \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{Cov} \left[\mathbb{E}(L\{Z_k\}) , \text{Var}(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L\{Z_k\}) \cdot \text{Var}(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \cdot \mathbb{E} \left[\text{Var}(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L\{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L^2\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^3(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \cdot \mathbb{E} \left[\text{Var}(L\{Z_k\}) \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mathbf{Cov}(Q_j, Q_m) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_m(y)] \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_m(y)] \right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \hat{\mathbf{p}}_i(y) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)] \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mathbf{Var}(Q_j) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \middle| \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \hat{\mathbf{p}}_i(y) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)] \right) \right) \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(y)] \right) \\
&\quad - \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \hat{\mathbf{p}}_i(y) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(y)] \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mathbf{m}_3 \left[\mathbf{L} \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbf{m}_3(\mathbf{L} \{ \mathbf{Z}_k \}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] + \mathbf{m}_3 \left[\mathbb{E}(\mathbf{L} \{ \mathbf{Z}_k \}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] + 3 \mathbf{Cov} \left[\mathbb{E}(\mathbf{L} \{ \mathbf{Z}_k \}) , \text{Var}(\mathbf{L} \{ \mathbf{Z}_k \}) \middle| \bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{y} \right] \\
&= 4 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_m(\mathbf{y})] \right) \\
&\quad + \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_m(\mathbf{y})] \right) \right. \\
&\quad \left. - 3 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})] \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + 2 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \right)^3 \right] \\
&\quad + 3 \left[\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_j(\mathbf{y})] \right) \right. \\
&\quad \left. - \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^M \omega_i^2 (\sigma_i^2 + \mu_i^2) \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) - \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \mu_i^2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1}[\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})] \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_3 \left[L \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[m_3(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + m_3 \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + 3 \mathbf{Cov} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}), \text{Var}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L^3 \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L^2 \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + 2 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^3(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^3(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + 2 \mathbb{E}^3 \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \cdot \mathbb{E}(L^2 \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^3(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L^2 \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{E}^2(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L^3 \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] - 3 \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{E}(L^2 \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] + 2 \mathbb{E}^3 \left[\mathbb{E}(L \mid \{Z_k\}) \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mathbb{E} \left(Q_i Q_j Q_m \right) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mathbb{E}(Q_i Q_j) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right)^3 \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \left[\left(3 \mu_i \left(\mathbf{Cov}(Q_j, Q_m) + \mu_j \mu_m \right) + 2 \mu_i \mu_j \mu_m \right) \right. \\
&\quad \left. \cdot \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \right] \\
&\quad - 3 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right) \cdot \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \left(\mathbf{Cov}(Q_i, Q_j) + \mu_i \mu_j \right) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right)^3 \\
&= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \left[\left(3 \mu_i \mathbf{Cov}(Q_j, Q_m) + 5 \mu_i \mu_j \mu_m \right) \right. \\
&\quad \left. \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \right] \\
&\quad - 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_m \left(\mathbf{Cov}(Q_i, Q_j) + \mu_i \mu_j \right) \hat{\mathbf{p}}_m(y) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right)^3 \\
&= 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mathbf{Cov}(Q_j, Q_m) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 5 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mathbf{Cov}(Q_j, Q_m) \hat{\mathbf{p}}_i(y) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad - 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{\mathbf{p}}_i(y) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\mathbf{p}_m)\}} \mid \bar{Y} = y \right] \\
&\quad + 2 \left(\sum_{i=1}^M \omega_i \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(y) \right)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_3 \left[L \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&= 3 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i \sigma_i^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_i)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&+ 3 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_j)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i^3 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_i)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_j)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_i \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_i)\}} \mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_m)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i(y) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_j)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i(y) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_j)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{X_j \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_j)\}} \mathbb{1}_{\{X_m \leq \mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_m)\}} \left| \bar{Y} = y \right. \right] \\
&+ 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \hat{p}_m(y) \\
&= 3 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i \sigma_i^2 \hat{p}_i(y) + 3 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] \right) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i^3 \hat{p}_i(y) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] \right) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&+ 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \hat{p}_m(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_3' \left[L \mid \bar{Y} = y \right] \\
&= 3 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i \sigma_i^2 \hat{p}_i'(y) + 6 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i'(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i^3 \hat{p}_i'(y) \\
&+ 10 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i'(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3' \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j(y) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j(y) \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i'(y) \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \hat{p}_j'(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] - \rho_{jm}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{jm}^Y)^2}} \right) \\
&+ 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j(y) \hat{p}_m(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_3'' [L | \bar{Y} = y] \\
&= 3 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i \sigma_i^2 \hat{p}_i''(y) \\
&+ 6 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i''(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) \\
&+ 6 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i'(y) \mathcal{N}' \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \omega_i^3 \mu_i^3 \hat{p}_i''(y) \\
&+ 10 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i'(y) \mathcal{N}' \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) \\
&+ 10 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i''(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) \\
&+ 5 \sum_{i=1}^M \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \mathcal{N}_3'' \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i''(y) \hat{p}_j(y) - 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \sigma_j^2 \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j'(y) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i''(y) \hat{p}_j(y) - 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j^2 \mu_i \mu_j^2 \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j'(y) \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i''(y) \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&- 3 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i'(y) \mathcal{N}'_2 \left(\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)], \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] \right) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j'(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] - \rho_{jm}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{jm}^Y)^2}} \right) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \hat{p}_j''(y) \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] - \rho_{jm}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{jm}^Y)^2}} \right) \\
&- 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq j}}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i(y) \hat{p}_j'(y) \mathcal{N}' \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_m(y)] - \rho_{jm}^Y \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{jm}^Y)^2}} \right) \\
&+ 6 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i''(y) \hat{p}_j(y) \hat{p}_m(y) \\
&+ 12 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \sum_{m=1}^M \omega_i \omega_j \omega_m \mu_i \mu_j \mu_m \hat{p}_i'(y) \hat{p}_j'(y) \hat{p}_m(y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left[X - \mathbb{E}(X)\right]\left[Y - \mathbb{E}(Y)\right]\left[Z - \mathbb{E}(Z)\right]\right] &= \mathbb{E}(XYZ) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &\quad - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(YZ) - \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(XZ) - \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(XY)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XYZ) &= \mathbb{E}\left[\left[X - \mathbb{E}(X)\right]\left[Y - \mathbb{E}(Y)\right]\left[Z - \mathbb{E}(Z)\right]\right] + 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) \\ &\quad + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(YZ) + \mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(Z)\mathbb{E}(XY) \\ &= \mathbb{E}\left[\left[X - \mathbb{E}(X)\right]\left[Y - \mathbb{E}(Y)\right]\left[Z - \mathbb{E}(Z)\right]\right] + 2\mu_x\mu_y\mu_z \\ &\quad + \mu_x\left[\mathbf{Cov}(Y, Z) + \mu_y\mu_z\right] \\ &\quad + \mu_y\left[\mathbf{Cov}(X, Z) + \mu_x\mu_z\right] \\ &\quad + \mu_z\left[\mathbf{Cov}(X, Y) + \mu_x\mu_y\right]\end{aligned}$$

Si les distributions de X , Y et Z sont symétriques alors

$$\mathbb{E}\left[\left[X - \mathbb{E}(X)\right]\left[Y - \mathbb{E}(Y)\right]\left[Z - \mathbb{E}(Z)\right]\right] = 0$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XYZ) &= 2\mu_x\mu_y\mu_z + \mu_x\left[\mathbf{Cov}(Y, Z) + \mu_y\mu_z\right] + \mu_y\left[\mathbf{Cov}(X, Z) + \mu_x\mu_z\right] + \mu_z\left[\mathbf{Cov}(X, Y) + \mu_x\mu_y\right] \\ &= 5\mu_x\mu_y\mu_z + \mu_x\mathbf{Cov}(Y, Z) + \mu_y\mathbf{Cov}(X, Z) + \mu_z\mathbf{Cov}(X, Y)\end{aligned}$$

B Minimisation de la différence des quantiles dans le modèle multi-facteurs

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{i=1}^M \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) \right) \quad \text{such that} \quad \sum_{k=1}^N b_k^2 = 1$$

We use the method of Lagrange multipliers

$$\begin{aligned} L(b_k) &= - \sum_{i=1}^M \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) + \lambda \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 - 1 \right) \\ &= - \sum_{i=1}^M \sum_{k=1}^N \alpha_{ik} b_k + \lambda \left(\sum_{k=1}^N b_k^2 - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial b_k} = - \sum_{i=1}^M \alpha_{ik} + 2\lambda b_k = 0$$

The solution of the optimization problem is given by :

$$b_k = \frac{1}{2\lambda} \sum_{i=1}^M \alpha_{ik}$$

A possible choice for the Lagrange multiplier λ to satisfy the constraint is

$$\lambda = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \alpha_{i1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \alpha_{iN} \right)^2}$$

$$\max_{\{b_k\}} \left(\sum_{i=1}^M c_i \text{corr}(\bar{Y}, Y_i) \right) \quad \text{such that} \quad \sum_{k=1}^N b_k^2 = 1$$

C Dérivées de fonctions de répartition de lois normales multivariées

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N}_2(M_i(z), M_j(z); \rho_{ij}) &= \int_{-\infty}^{M_i(z)} \int_{-\infty}^{M_j(z)} f_2(x, y; \rho) \, dx \, dy \\
 &= \int_{-\infty}^{M_i(z)} \left[\int_{-\infty}^{\frac{M_j(z) - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}} f_1(\omega) \, d\omega \right] f_1(x) \, dx \quad \omega = \frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{M_i(z)} \left[\int_{-\infty}^{M_j(z)} f_1\left(\frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \, dy \right] f_1(x) \, dx \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \int_{-\infty}^{M_j(z)} \left[\int_{-\infty}^{M_i(z)} f_1\left(\frac{x - \rho y}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \, dx \right] f_1(y) \, dy
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} f_1\left(\frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) f_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{y - \rho x}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} x^2\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (y^2 + \rho^2 x^2 - 2\rho xy) - \frac{1}{2} x^2\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (y^2 + \rho^2 x^2 - 2\rho xy + (1 - \rho^2)x^2)\right] \\
 &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1 - \rho^2}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2(1 - \rho^2)} (x^2 + y^2 - 2\rho xy)\right] \\
 &= f_2(x, y; \rho)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dz} \mathcal{N}_2(M_i(z), M_j(z); \rho_{ij}) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_2(M_i(z), M_j(z); \rho_{ij}) \cdot \frac{dx}{dz} + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_2(M_i(z), M_j(z); \rho_{ij}) \cdot \frac{dy}{dz} \\
 &= \left[\int_{-\infty}^{M_j(z)} f_1\left(\frac{y - \rho M_i(z)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \, dy \right] f_1(M_i(z)) \cdot \frac{d}{dz} M_i(z) \\
 &\quad + \left[\int_{-\infty}^{M_i(z)} f_1\left(\frac{x - \rho M_j(z)}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) \, dx \right] f_1(M_j(z)) \cdot \frac{d}{dz} M_j(z)
 \end{aligned}$$

$$M_i(z) = \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(z)] = \frac{\mathcal{N}^{-1}(\hat{p}_i) - a_i z}{\sqrt{1 - a_i^2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \mathcal{N}_2(M_i(z), M_j(z); \rho_{ij}) &= \mathcal{N} \left(\frac{M_j(z) - \rho M_i(z)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) n(M_i(z)) \cdot \frac{d}{dz} M_i(z) \\
&\quad + \mathcal{N} \left(\frac{M_i(z) - \rho M_j(z)}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) n(M_j(z)) \cdot \frac{d}{dz} M_j(z) \\
&= \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(z)] - \rho \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(z)]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) n \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_i) - a_i z}{\sqrt{1 - a_i^2}} \right) \cdot \frac{-a_i}{\sqrt{1 - a_i^2}} \\
&\quad + \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(z)] - \rho \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(z)]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) n \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}(p_j) - a_j z}{\sqrt{1 - a_j^2}} \right) \cdot \frac{-a_j}{\sqrt{1 - a_j^2}} \\
&= \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(z)] - \rho \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(z)]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \hat{p}_i'(z) + \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_i(z)] - \rho \mathcal{N}^{-1}[\hat{p}_j(z)]}{\sqrt{1 - \rho^2}} \right) \hat{p}_j'(z)
\end{aligned}$$

$$\mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) = \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_j(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_3(x, y, z) dx dy dz$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) \frac{dx}{ds} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) \frac{dy}{ds} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) \frac{dz}{ds} \\ &= f_1(M_i(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_i(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_j(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(y, z | M_i(s)) dy dz \\ &\quad + f_1(M_j(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_j(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(x, z | M_j(s)) dx dz \\ &\quad + f_1(M_m(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_m(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_j(s)} f_2(x, y | M_m(s)) dx dy \\ &= f_1(M_i(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_i(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_j(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(y, z | M_i(s)) dy dz \\ &\quad + f_1(M_j(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_j(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(x, z | M_j(s)) dx dz \\ &\quad + f_1(M_m(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_m(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_j(s)} f_2(x, y | M_m(s)) dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{z_0} f_3(x, y, z) dx dy dz &= \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{z_0} f_1(x) \cdot f_2(y, z | x) dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{z_0} f_2(y, z | x) dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{y_0} \int_{-\infty}^{z_0} f_1(x) \cdot f_1(y | x) \cdot f_1(z | x, y) dx dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{y_0} f_1(y | x) dy \int_{-\infty}^{z_0} f_1(z | x, y) dz \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{y_0} \frac{f_2(x, y)}{\int_{y \in \mathbb{R}} f_2(x, y) dy} dy \int_{-\infty}^{z_0} \frac{f_3(x, y, z)}{\int_{z \in \mathbb{R}} f_3(x, y, z) dz} dz \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} f_1(x) dx \int_{-\infty}^{y_0} f_1\left(\frac{y - \rho_{xy} x}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right) dy \int_{-\infty}^{z_0} f_1\left(\frac{z - \rho_{xy} x - \left(\frac{\rho_{yz} - \rho_{xy} \rho_{xz}}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right) \left(\frac{y - \rho_{xy} x}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right)}{\sqrt{1 - \rho_{xz}^2 - \left(\frac{\rho_{yz} - \rho_{xy} \rho_{xz}}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right)^2}}\right) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) &= \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) \frac{dx}{ds} \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) \frac{dy}{ds} \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{N}_3(M_i(s), M_j(s), M_m(s)) \frac{dz}{ds} \\
&= f_1(M_i(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_i(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_j(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(y, z | M_i(s)) dy dz \\
&+ f_1(M_j(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_j(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(x, z | M_j(s)) dx dz \\
&+ f_1(M_m(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_m(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_j(s)} f_2(x, y | M_m(s)) dx dy \\
&= f_1(M_i(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_i(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_j(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(y, z | M_i(s)) dy dz \\
&+ f_1(M_j(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_j(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_m(s)} f_2(x, z | M_j(s)) dx dz \\
&+ f_1(M_m(s)) \cdot \frac{d}{ds} M_m(s) \cdot \int_{-\infty}^{M_i(s)} \int_{-\infty}^{M_j(s)} f_2(x, y | M_m(s)) dx dy
\end{aligned}$$

$$f_2(y, z | M_i(s)) = f_1\left(\frac{y - \rho_{xy} M_i(s)}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right) \cdot f_1\left(\frac{z - \rho_{xy} M_i(s) - \left(\frac{\rho_{yz} - \rho_{xy} \rho_{xz}}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right) \left(\frac{y - \rho_{xy} M_i(s)}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right)}{\sqrt{1 - \rho_{xz}^2 - \left(\frac{\rho_{yz} - \rho_{xy} \rho_{xz}}{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}\right)^2}}\right) \cdot \frac{1}{\det(\Sigma)}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & 1 & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & 1 \end{pmatrix}$$

On utilise la décomposition de Cholesky car Σ est une matrice symétrique définie positive.

$$\Sigma = L^t L$$

$$X = (x_1, x_2, x_3)$$

$$f_3(X) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} ({}^t X \cdot \Sigma^{-1} \cdot X)\right]$$

On effectue le changement de variable $X = L \cdot Z$

$$\Sigma^{-1} = ({}^t L)^{-1} L^{-1}$$

$${}^t X = {}^t Z {}^t L$$

On obtient donc

$$\iiint f_3(X) dX = \iiint f_3(Z) \cdot |Jac_L(Z)| dZ$$

$$Jac_L(Z) = \frac{1}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}}$$

D'où

$$\begin{aligned} \iiint \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left({}^tX \cdot \Sigma^{-1} \cdot X \right) \right] dX &= \iiint \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left({}^tZ {}^tL \left({}^tL \right)^{-1} L^{-1} L Z \right) \right] dZ \\ &= \iiint \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left({}^tZ Z \right) \right] dZ \end{aligned}$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ij} & \rho_{im} \\ \rho_{ij} & 1 & \rho_{jm} \\ \rho_{im} & \rho_{jm} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{com}(\Sigma) = \begin{pmatrix} 1 - (\rho_{jm})^2 & \rho_{im}\rho_{jm} - \rho_{ij} & \rho_{ij}\rho_{jm} - \rho_{im} \\ \rho_{im}\rho_{jm} - \rho_{ij} & 1 - (\rho_{im})^2 & \rho_{ij}\rho_{im} - \rho_{jm} \\ \rho_{ij}\rho_{jm} - \rho_{im} & \rho_{ij}\rho_{im} - \rho_{jm} & 1 - (\rho_{ij})^2 \end{pmatrix} = {}^t\text{com}(\Sigma)$$

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{\det(\Sigma)} {}^t\text{com}(\Sigma) \begin{pmatrix} 1 - (\rho_{jm})^2 & \rho_{im}\rho_{jm} - \rho_{ij} & \rho_{ij}\rho_{jm} - \rho_{im} \\ \rho_{im}\rho_{jm} - \rho_{ij} & 1 - (\rho_{im})^2 & \rho_{ij}\rho_{im} - \rho_{jm} \\ \rho_{ij}\rho_{jm} - \rho_{im} & \rho_{ij}\rho_{im} - \rho_{jm} & 1 - (\rho_{ij})^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{xx} & \rho_{xy} & \rho_{xz} \\ \rho_{xy} & \rho_{yy} & \rho_{yz} \\ \rho_{xz} & \rho_{yz} & \rho_{zz} \end{pmatrix}$$

$$|\Sigma| = \det(\Sigma) = 1 + 2\rho_{ij}\rho_{jm}\rho_{im} - \rho_{ij}^2 - \rho_{jm}^2 - \rho_{im}^2$$

$$f_3(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} |\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\rho_{xx} \cdot x^2 + \rho_{yy} \cdot y^2 + \rho_{zz} \cdot z^2 + 2\rho_{xy} \cdot xy + 2\rho_{xz} \cdot xz + 2\rho_{yz} \cdot yz \right) \right]$$

D Calcul des contributions à la VaR

$$\begin{aligned}
 v_{\infty}(y) &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \left[\mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_j(y)], \rho_{ij}^Y \right) - \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \right] \\
 v'_{\infty}(y) &= 2 \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \omega_i \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}'_i(y) \left[\mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) - \hat{p}_j(y) \right] \\
 v_{GA}(y) &= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \left(\mu_i^2 \left[\hat{p}_i(y) - \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)], \rho_{ii}^Y \right) \right] + \sigma_i^2 \hat{p}_i(y) \right) \\
 v'_{GA}(y) &= \sum_{i=1}^M \omega_i^2 \hat{p}'_i(y) \left(\mu_i^2 \left[1 - 2 \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)] - \rho_{ii}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ii}^Y)^2}} \right) \right] + \sigma_i^2 \right)
 \end{aligned}$$

Dérivées par rapport à ω_i On fait l'hypothèse qu'aucune autre fonction ne dépend de ω

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v_{\infty}}{\partial \omega_i}(y) &= 2 \sum_{j=1}^M \omega_j \mu_i \mu_j \left[\mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_j(y)], \rho_{ij}^Y \right) - \hat{p}_i(y) \hat{p}_j(y) \right] \\
 \frac{\partial v'_{\infty}}{\partial \omega_i}(y) &= 4 \sum_{j=1}^M \omega_j \mu_i \mu_j \hat{p}'_i(y) \left[\mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_j(y)] - \rho_{ij}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ij}^Y)^2}} \right) - \hat{p}_j(y) \right] \\
 \frac{\partial v_{GA}}{\partial \omega_i}(y) &= 2 \omega_i \left(\mu_i^2 \left[\hat{p}_i(y) - \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)], \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)], \rho_{ii}^Y \right) \right] + \sigma_i^2 \hat{p}_i(y) \right) \\
 \frac{\partial v'_{GA}}{\partial \omega_i}(y) &= 2 \omega_i \hat{p}'_i(y) \left(\mu_i^2 \left[1 - 2 \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)] - \rho_{ii}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{p}_i(y)]}{\sqrt{1 - (\rho_{ii}^Y)^2}} \right) \right] + \sigma_i^2 \right) \\
 \frac{\partial v}{\partial \omega_i}(y) &= \frac{\partial v_{\infty}}{\partial \omega_i}(y) + \frac{\partial v_{GA}}{\partial \omega_i}(y) \\
 \frac{\partial v'}{\partial \omega_i}(y) &= \frac{\partial v'_{\infty}}{\partial \omega_i}(y) + \frac{\partial v'_{GA}}{\partial \omega_i}(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_q(L) &= t_q(\bar{L}) + \frac{dt_q(L_{\varepsilon})}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} + \frac{1}{2} \frac{d^2 t_q(L_{\varepsilon})}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=0} \\
 &= \lambda(y) - \frac{1}{2\lambda'(y)} \left[v'(y) - v(y) \left(\frac{\lambda''(y)}{\lambda'(y)} + y \right) \right] \Big|_{y=\mathcal{N}^{-1}(1-q)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial t_q(L)}{\partial \omega_i} &= \frac{\partial \lambda(y)}{\partial \omega_i} - \frac{1}{2(\lambda'(y))^2} \frac{\partial \lambda'(y)}{\partial \omega_i} \left[v'(y) - v(y) \left(\frac{\lambda''(y)}{\lambda'(y)} + y \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2\lambda'(y)} \left[\frac{\partial v'(y)}{\partial \omega_i} - \frac{\partial v(y)}{\partial \omega_i} \left(\frac{\lambda''(y)}{\lambda'(y)} + y \right) - v(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\frac{\lambda''(y)}{\lambda'(y)} + y \right) \right] \\
 &= \mu_i \hat{p}_i(y) + \frac{\mu_i \hat{p}'_i(y)}{2(\lambda'(y))^2} \left[v'(y) - v(y) \left(\frac{\lambda''(y)}{\lambda'(y)} + y \right) \right] \\
 &\quad - \frac{1}{2\lambda'(y)} \left[\frac{\partial v'(y)}{\partial \omega_i} + \frac{\partial v(y)}{\partial \omega_i} \cdot \left(\frac{\lambda''(y)}{\lambda'(y)} + y \right) - v(y) \cdot \frac{\lambda'(y) \mu_i \hat{p}''_i(y) - \lambda''(y) \mu_i \hat{p}'_i(y)}{(\lambda'(y))^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \omega_k} \left(\omega_i \cdot \frac{\partial v_\infty}{\partial \omega_i}(\mathbf{y}) \right) &= \begin{cases} 4\omega_k \mu_k^2 \left[\mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})], \rho_{kk}^Y \right) - \hat{\mathbf{p}}_k^2(\mathbf{y}) \right] & \text{if } i = k \\ 2\omega_i \mu_i \mu_k \left[\mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})], \rho_{ik}^Y \right) - \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) \hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y}) \right] & \text{if } i \neq k \end{cases} \\
\frac{\partial}{\partial \omega_k} \left(\omega_i \cdot \frac{\partial v'_\infty}{\partial \omega_i}(\mathbf{y}) \right) &= \begin{cases} 8\omega_k \mu_k^2 \hat{\mathbf{p}}'_k(\mathbf{y}) \left[\mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})] - \rho_{kk}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})]}{\sqrt{1 - (\rho_{kk}^Y)^2}} \right) - \hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y}) \right] & \text{if } i = k \\ 4\omega_i \mu_i \mu_k \hat{\mathbf{p}}'_i(\mathbf{y}) \left[\mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})] - \rho_{ik}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y})]}{\sqrt{1 - (\rho_{ik}^Y)^2}} \right) - \hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y}) \right] & \text{if } i \neq k \end{cases} \\
\frac{\partial}{\partial \omega_k} \left(\omega_i \cdot \frac{\partial v_{GA}}{\partial \omega_i}(\mathbf{y}) \right) &= \begin{cases} 4\omega_k \left(\mu_k^2 \left[\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y}) - \mathcal{N}_2 \left(\mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})], \mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})], \rho_{kk}^Y \right) \right] + \sigma_k^2 \hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y}) \right) & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases} \\
\frac{\partial}{\partial \omega_k} \left(\omega_i \cdot \frac{\partial v'_{GA}}{\partial \omega_i}(\mathbf{y}) \right) &= \begin{cases} 4\omega_k \hat{\mathbf{p}}'_k(\mathbf{y}) \left(\mu_k^2 \left[1 - 2 \mathcal{N} \left(\frac{\mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})] - \rho_{kk}^Y \mathcal{N}^{-1} [\hat{\mathbf{p}}_k(\mathbf{y})]}{\sqrt{1 - (\rho_{kk}^Y)^2}} \right) \right] + \sigma_k^2 \right) & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

Dérivées par rapport à ω_i des contributions à la VaR

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \omega_k} \left(\omega_i \cdot \frac{\partial t_q(\mathbf{L})}{\partial \omega_i} \right) &= \begin{cases} \frac{\frac{\partial \lambda(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} - \frac{1}{2(\lambda'(\mathbf{y}))^2} \frac{\partial \lambda'(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \left[v'(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) \right]}{-\frac{1}{2\lambda'(\mathbf{y})} \left[\frac{\partial v'(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \right] - \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) - v(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right)} & \text{if } i = k \\ \frac{\frac{\partial \lambda(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} - \frac{1}{2(\lambda'(\mathbf{y}))^2} \frac{\partial \lambda'(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \left[v'(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) \right]}{-\frac{1}{2\lambda'(\mathbf{y})} \left[\frac{\partial v'(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \right] - \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) - v(\mathbf{y}) \cdot \frac{\partial}{\partial \omega_i} \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right)} & \text{if } i \neq k \end{cases} \\
&= \begin{cases} \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) + \frac{\mu_i \hat{\mathbf{p}}'_i(\mathbf{y})}{2(\lambda'(\mathbf{y}))^2} \left[v'(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) \right] \\ - \frac{1}{2\lambda'(\mathbf{y})} \left[\frac{\partial v'(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} + \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \cdot \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) - v(\mathbf{y}) \cdot \frac{\lambda'(\mathbf{y}) \mu_i \hat{\mathbf{p}}''_i(\mathbf{y}) - \lambda''(\mathbf{y}) \mu_i \hat{\mathbf{p}}'_i(\mathbf{y})}{(\lambda'(\mathbf{y}))^2} \right] & \text{if } i = k \\ \mu_i \hat{\mathbf{p}}_i(\mathbf{y}) + \frac{\mu_i \hat{\mathbf{p}}'_i(\mathbf{y})}{2(\lambda'(\mathbf{y}))^2} \left[v'(\mathbf{y}) - v(\mathbf{y}) \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) \right] \\ - \frac{1}{2\lambda'(\mathbf{y})} \left[\frac{\partial v'(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} + \frac{\partial v(\mathbf{y})}{\partial \omega_i} \cdot \left(\frac{\lambda''(\mathbf{y})}{\lambda'(\mathbf{y})} + \mathbf{y} \right) - v(\mathbf{y}) \cdot \frac{\lambda'(\mathbf{y}) \mu_i \hat{\mathbf{p}}''_i(\mathbf{y}) - \lambda''(\mathbf{y}) \mu_i \hat{\mathbf{p}}'_i(\mathbf{y})}{(\lambda'(\mathbf{y}))^2} \right] & \text{if } i \neq k \end{cases}
\end{aligned}$$

Références

- [1] Christian Bluhm, Ludger Overbeck, and Christoph Wagner. *An introduction to credit risk modeling*. 2003.
- [2] Gouriéroux Christian, Jean-Paul Laurent, and Scaillet Olivier. Sensivity analysis of values at risk. *Journal of Empirical Finance*, 2000.
- [3] Michael Gordy. A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules. *Journal of Financial Intermediation*, 2003.
- [4] Richard Martin and Tom Wilde. Unsystematic credit risk. *Risk*, 2002.
- [5] Robert Merton. On the pricing of corporate debt : The risk structure of risk rates. *The Journal of Finance*, 1974.
- [6] Abramowitz Milton and Stegun Irene A. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. 1972.
- [7] Michael Pykhtin. Multi-factor adjustment. *Risk*, 2004.
- [8] Michael Pykhtin and Ashish Dev. Analytical approach to credit risk modeling. *Risk*, 2002.
- [9] Giorgio Szegö. *Risk measures for the 21st century*. 2004.
- [10] Dirk Tasche. Conditional expectation as quantile derivative. 2000.
- [11] Oldrich Vasicek. A seriex expansion for the bivariate normal integral. *Journal of Computational Finance*, 1998.
- [12] Tom Wilde. Probing granularity. *Risk*, 2001.