



Etude des marchés boursiers via les lois α -stables

RAPPORT DE STAGE

*Présenté dans le cadre de l'obtention de diplôme d'ingénieur :
Spécialité Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique*

Septembre 2011

Etude réalisée par Mr. Bérani CHEKLAME

Travaux encadrés par :

Mr . Luc GRANGER
fondateur et Associé

Lieu du stage :

6 rue Clément
Marot 75008 Paris

Remerciements :

Arrivé au terme de la rédaction de ce rapport, il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma gratitude et mes remerciements à tous ceux qui, par leur enseignement, leur soutien et leurs conseils, m'ont aidé à sa réalisation.

Je tiens à remercier tout d'abord, toute l'équipe pédagogique de l'école d'ingénieur *Sup'Galilée, de l'Université Paris 13* et les intervenants professionnels responsables de la formation (*Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique*), pour avoir assuré la partie théorique de celle-ci.

Je remercie également *Mr BEN ALAYA* et *Mr WOUTS*, professeurs de l'université Paris 13, pour l'aide et les conseils concernant le sujet du stage.

Je remercie et je tiens à témoigner toute ma reconnaissance aux personnes suivantes, pour l'expérience enrichissante et pleine d'intérêt qu'elles m'ont fait vivre durant ces mois au sein de la société *Intuitae* :

Mr ACHARD (Directeur général du groupe), Mr CHARLET (Associé), Mr BOUTET (Associé), Mr MISSLIN (Leader 2), Mr THOMAS (Leader 2) et toutes les autres personnes que je n'ai pu citées sur cette page pour leurs accueils, leurs conseils et leurs confiances qu'elles m'ont accordé dès mon arrivée dans l'entreprise.

Je tiens à remercier tout particulièrement Mr GRANGER, Associé et Fondateur de la société *Intuitae*, pour m'avoir intégré rapidement au sein de l'entreprise et m'avoir accordé toute sa confiance et surtout pour m'avoir fait partager ces connaissances et expériences du monde des marchés financiers; pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de cette période, sachant répondre à toutes mes interrogations ; sans oublier sa participation au cheminement de ce rapport.

Je n'oublie pas ma famille pour leur contribution, leur soutien et leur patience. Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mon grand frère Azziz (ancien de la MACS) qui a eu la gentillesse de lire et corriger ce travail.

Enfin pour terminer ces remerciement, j'adresse mes plus sincères remerciements à Idir ARDJOUNE, Rachad ASSERRHINE, Amer BEN SLIMANI, Essam RADI, Yassine FIRAOUI et mes autres amis de classe, qui m'ont toujours soutenu et encouragé.

À la mémoire de mon Père et de ma Mère.

Table des matières

1	Introduction	5
1.1	Préambule.....	5
1.2	Des propriétés d'échelle aux lois alpha stable	6
1.3	Du très court terme au très long terme	6
2	Les lois alpha stable	8
2.1	De l'univers gaussien à l'univers parétien	8
2.2	Motivations du choix des lois α -stables.....	9
2.2.1	Propriété de stabilité.....	9
2.2.2	Théorie financière : possibilité d'application des lois.....	9
2.3	Définitions.....	10
2.3.1	Définitions et propriétés des variable aléatoires α -stables.....	10
2.3.2	Définition d'une distribution stable	10
2.3.3	Variables aléatoires stables symétriques	11
2.3.4	Propriété des lois stables	12
2.3.5	Densité de probabilité et représentation en série.....	13
2.4	Mouvement α -stable symétrique	17
3	Utilisation des processus α – stables	18
3.1	Simulateur α – stables	18
3.1.1	Utilité d'un générateur	18
3.1.2	Principe de la construction	18
3.1.3	Formules de Chambers, Mallows, Stuck.....	19
3.1.4	Modélisation des marchés avec lois stables	20
3.2	Estimation des paramètres des lois α – stables	31
3.2.1	Généralités	31
3.2.2	Méthodes utilisant la statistique d'ordre	32
3.2.3	Méthodes utilisant la fonction caractéristique.....	35
3.2.4	Tests des méthodes	41
4	Description analytique des fluctuations boursières	43
4.1	Travaux sur testant l'hypothèse des lois α -stables.....	43
4.1.1	Recherche d'invariance par changement d'échelle.....	43
4.1.2	Controverses sur l'hypothèse fractale	44
4.2	Nouveaux tests d'ajustement à une loi α -stable	44

4.2.1	Test d'ajustement simple à une distribution α -stable	44
4.2.2	Tests de la fractalité des marchés.....	47
4.3	Caractérisation du risque d'un marché au moyen du couple α, γ	51
4.3.1	Durée de retour d'un événement rare	51
4.3.2	La VAR avec les lois α -stables	52
5	Conclusion	57

1 Introduction

1.1 Préambule

Les événements rares et catastrophiques comme par exemple les inondations, les tremblements de terre, les accidents nucléaires et les krachs boursiers, dominent notre actualité et nous fascinent par leurs impacts. Ces événements sont au cœur de la recherche scientifique et se présente comme un véritable défi pour notre communauté. Ces événements sont définis comme exceptionnels et sont parfois retirés des données car ils sont qualifiés d'aberrations statistiques. Au jour d'aujourd'hui, ces aberrations finissent par revenir sur la scène par l'importance des enjeux économiques, sociaux et scientifiques qu'ils représentent. Pas de débat sérieux sur le hasard, sans une réflexion sur les événements rares et extrêmes. Peut-on prévoir ou quantifier le risque des événements rares et extrêmes ? Que peuvent les statistiques face aux événements rares ?

Dans beaucoup d'applications, notamment dans les sciences, les statistiques se résument à des moyennes et à des écarts-types, et la distribution des observations se répartissent sagement selon la fameuse courbe en cloche. Deux grands outils fondamentaux viennent soutenir la loi gaussienne, la loi des grands nombres et le théorème central limite. Ces deux principes ont une grande portée, la loi des grands nombres montre qu'il suffit d'avoir un échantillon suffisamment grand pour approcher la moyenne que l'on cherche à estimer et le théorème quant à lui permet de contrôler l'erreur commise : l'écart entre la moyenne empirique et la moyenne théorique suit une loi gaussienne.

L'omniprésence de cette distribution est peut être due à la trop grande confiance des statisticiens qu'à la réalité : tout phénomène ne peut pas être ramené à une somme de petites contributions indépendantes. Dès le début du XX^{ème} siècle, l'économiste Vilfredo Pareto s'est intéressé à la richesse nationale italienne, et a constaté que 80% des richesses étaient détenues par 20% de la population. Cette situation d'inégalité n'est manifestement pas bien représenté par la gaussienne car la richesse individuelle serait concentrée autour de la richesse moyenne et les individus très pauvres et très riches seraient très rares. Pareto proposa une loi qui porte aujourd'hui son nom : la part d'individus ayant une richesse supérieure à u est proportionnelle à $u^{1/\alpha}$. Plus l'exposant est petit, plus cette proportion est grande et plus la distribution des richesses est inégalitaire. Face à de telles distributions, les notions de moyennes et d'écart-type se révèlent inadaptées et offrent une description trompeuse. En effet, la richesse moyenne et l'écart-type peuvent par exemple rester identiques alors que la distribution des richesses se modifie, ce qui est impossible dans le cadre d'une distribution gaussienne. Pire si l'exposant est inférieur à 2, alors l'écart-type de la distribution est infini et s'il est plus petit que 1, alors la moyenne est infinie. Ces indicateurs sont donc dénués de sens pour les lois de Pareto.

Dès lors que la moyenne et l'écart-type n'ont plus forcément de sens pour les distributions inégalitaires, qu'advient-il de la loi des grands nombres et du théorème centrale limite ? Dans les années 1920, Lévy fut l'un des premiers à remarquer que les hypothèses qui les sous-tendent peuvent cesser d'être valables dans le cas où des événements rares influencent de façon prépondérante la moyenne de l'échantillon. Lévy étendit le théorème central limite à ces situations : il montra que pour un échantillon de variables centrées dont la queue de distribution se comporte comme une loi de Pareto avec un exposant compris entre 0 et 2 ($\in]0,2[$), la moyenne empirique se comporte non plus comme une variable gaussienne, mais selon une distribution que Lévy appela « Loi Alpha-Stable, dont la queue se comporte suivant une loi de puissance, la variance et la moyenne n'ont plus de sens dans cet univers là.

Benoît Mandelbrot, qui fut l'élève de Lévy, montra que loin d'être une curiosité mathématique, les situations décrites par les lois de Lévy étaient omniprésentes en économie, en finance et en assurance : les richesses des individus ou la taille des entreprises suivent des lois de Pareto. Il qualifia ces situations, où le comportement de l'échantillon n'est plus correctement caractérisé par la moyenne et l'écart-type, de hasard sauvage, par opposition au hasard sage de la loi gaussienne. Ce comportement sauvage est par exemple manifeste dans les rendements boursiers. Alors que l'amplitude des fluctuations d'un échantillon gaussien reste de l'ordre de son écart-type, certains indices boursiers présentent des variations d'amplitude erratiques atteignant plusieurs dizaines de fois l'écart-type.

1.2 Des propriétés d'échelle aux lois alpha stable

Si l'utilisation des mathématiques fractales dans l'analyse des prix d'actifs a débuté dès les années soixante avec Mandelbrot, la résurgence de cette théorie dans les années quatre-vingt-dix a été motivée par la fréquence élevée des crises auxquelles les marchés financiers ont été confrontés. Qu'apportent donc les mathématiques fractales à l'étude des mouvements pathologiques des marchés ?

Le terme « fractale » est un néologisme créé par Benoît Mandelbrot en 1974 qui signifie brisé, irrégulier. Une fractale désigne des objets dont la structure est liée à l'échelle. L'étude des événements extrêmes sur les marchés est difficile du fait de la faible fréquence d'observation de ces phénomènes. L'approche fractale permet une analyse de ceux-ci en exploitant la notion de « propriétés d'échelle ». On appelle propriétés d'échelle la récurrence de certains phénomènes, observés à des échelles différentes. L'application de cette notion aux rendements d'actifs financiers, montre qu'il existe des régularités statistiques dans les variations de prix mensuelles, hebdomadaires, quotidiennes, voire intra-quotidiennes. L'exploitation de cette régularité permet une modélisation parcimonieuse et une analyse des processus de prix transposable à toutes les fréquences d'observation. Par exemple un choc important à l'échelle d'une journée peut aider à la modélisation des chocs observés à des fréquences plus basses (tels que les crises financières).

Le caractère brutal et peu prévisible de ces chocs rend néanmoins une modélisation des distributions plus difficile à toutes les fréquences. Pour rendre compte de la brutalité et de l'extrême variabilité de certains prix, Mandelbrot introduit une nouvelle famille de lois de distributions. Celles-ci ont la particularité d'attribuer aux événements extrêmes des probabilités plus élevées que sous l'hypothèse gaussienne. De plus, ces distributions peuvent être combinées entre elles à différentes échelles. Ainsi, dès 1967, pour modéliser les variations de prix du coton, il définit ce qu'il appelle des lois alpha-stables. Une loi alpha-stable permet de considérer à chaque échelle (ou fréquence d'observation) une certaine distribution dont le paramètre alpha représente l'épaisseur de la queue de distribution (probabilité d'événements rares).

1.3 Du très court terme au très long terme

L'échelle du temps sur un marché boursier peut être perçue comme fractale. Un agent économique, en période de crise par exemple, est soumis à une somme d'informations nombreuses et contradictoires. Il doit prendre en compte l'ensemble de ces éléments et faire des choix rapides, répétés et peut-être contradictoires. Dans un environnement plus serein, l'information pertinente arrive régulièrement, la prise de décision des agents se fait moins dans la précipitation. On

introduit alors une déformation de l'échelle de temps, avec alternances de périodes de plus ou moins fortes dilatations, qui ne répondent plus à une échelle de temps calendaire de type heure, jours, mois, mais à la régularité de phénomènes statistiques. Ainsi, la modélisation fractale utilise cette déformation du temps et cherche à révéler des régularités permettant une modélisation des phénomènes grâce à la détection des fréquences d'analyse les plus pertinentes. L'approche fractale analyse ainsi de façon transversale le très court terme (par exemple la microstructure des marchés, le comportement des teneurs de marchés, ou les mécanismes d'échange) et le très long terme (par exemple les cycles longs de volatilité des marchés ou l'impact faiblement résilient des crises financières).

2 Les lois alpha stable

2.1 De l'univers gaussien à l'univers parétien

A l'origine de l'hypothèse de la variance infinie, et de la description du comportement des marchés au moyen de concepts empruntés à la géométrie fractale, on trouve les recherches de Mandelbrot sur la distribution des revenus dans une économie donnée, dont on sait qu'elle suit en général une loi de Pareto, et sur le caractère Parétien des variables économiques. Cette observation de l'existence d'une statique parétienne en économie a été relevée dans un grand nombre de travaux. Samuelson rappelle que : « de telles distributions ultra-étirées se manifestent fréquemment en économie ». De fait, on observe souvent des distributions non normales dans un grand nombre de situations économiques réelles : taille des entreprises, les chiffres d'affaires annuels, la répartition des richesses, le cout des sinistres en assurance dommages, les ventes de disques, etc. Toutes ces quantités présentent un caractère parétien ou scalant, dans le sens où la décroissance des valeurs de la variable suit une loi de puissance.

La définition d'une loi de Pareto est la suivante : une variable aléatoire X de fonction de répartition F suit une loi de type Pareto dans la queue supérieure si :

$$P(X \geq x) = 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x) \quad x \geq x_0$$

Où le réel positif α est appelé index de Pareto de la loi, et où $L(x)$ est une fonction à variation lente, c'est-à-dire telle que :

$$\text{Pour tout,} \quad a > 0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{L(at)}{L(t)} = 1$$

Dans le cas particulier où $L(t)$ est une fonction constante, la loi est dite de Pareto au sens strict. Une loi est de type Pareto dans la queue inférieure, si son opposé est de type Pareto dans la queue supérieure. Les lois de Pareto n'ont pas de moments d'ordre supérieur ou égal à la valeur de leur index. Les distributions parétiennes se caractérisent par :

- une forte hiérarchisation des contributions de chaque individu statistique au phénomène total.
- une concentration du résultat total sur quelques individus statistiques.

La question qui est posée par ce type de distribution est celle de la signification des valeurs typiques des populations statistiques dans un univers parétien. Par exemple, et pour illustrer de manière concrète ce propos, que signifie la rentabilité moyenne d'un portefeuille, s'il existe des configurations où la totalité du gain peut disparaître en une seule journée de bourse ? Cette sorte de configuration qui contrevient aux hypothèses sous jacentes à l'utilisation des outils gaussiens. La contestation d'une économie parétienne a conduit Mandelbrot à se poser la question d'une correspondance logique entre cette statique, et ses conséquences sur le dynamisme de l'économie. Fama disait que : « si de grandes variations de cours surviennent fréquemment, cela peut vouloir indiquer que la structure de l'économie à l'origine de ces variations est elle-même sujette à de grands et fréquents changements ».

La leptokurticité des distributions des rentabilités boursières trouverait alors sa source dans la hiérarchisation parétienne de l'économie elle-même, qui se caractérise, selon les termes de Zajdenweber, comme une économie des extrêmes. La propriété d'efficience des marchés assure que la structure parétienne de la nature de l'économie se transmet intégralement dans les

variations des prix. Dans cette perspective, la structure fractale des variations boursières reflète la structure fractale de l'économie.

2.2 Motivations du choix des lois α -stables

2.2.1 Propriété de stabilité

Les lois tirent leur propriété de stabilité par addition : ce sont les seules lois invariantes (à un changement d'échelle près) par combinaison linéaire d'échantillons iid. Ceci signifie que si X_1 et X_2 sont iid alpha stables, alors il existe c et d tels que $\frac{aX_1+bX_2-d}{c}$ suit la même loi que X_1 . Elles généralisent ainsi la loi de Gauss, qui possède cette propriété.

Pour un $\alpha \in (0,2)$, les lois α -stables ne possèdent pas de moment d'ordre supérieur ou égale à α , et sont de type Pareto. Plus précisément, on :

$$P(X > x) = A_1 x^{-\alpha} [1 + A_2 x^{-\alpha} + O(x^{-2\alpha})]$$

Où A_1 et A_2 sont des constantes. La motivation de l'usage des lois α -stables en finance vient de ces deux propriétés.

Dans la pratique, aucune échelle de temps n'est privilégiée. C'est-à-dire qu'on peut partir sur une base d'étude de séries horaires, quotidiennes aussi bien que mensuelles ou trimestrielles. La contrepartie probabiliste de ce principe d'invariance est que la distribution normale possède une propriété de stabilité : si σ_1 est la volatilité des rentabilités de $\Delta r_{t,1}$, alors la volatilité annuelle (250 jours ouvrés) est simplement $\sigma_{250} = \sigma_1 \sqrt{250}$; plus généralement, on passe de la volatilité de $\Delta r_{t,1}$ à celle de $\Delta r_{t,n}$ au moyen de la relation $\sigma_n = \sigma_1 \sqrt{n}$. Ce qui traduit en termes de loi de probabilité que $P(\Delta r_{t,\tau}/\sqrt{\tau})$ est indépendante de t et de τ . En général, il est important de conserver le principe d'invariance de ce type, même si l'on veut remplacer la loi normale par une distribution qui rende mieux compte de la leptokurticité. D'un point de vue théorique, cela implique précisément que l'on doit utiliser des lois stables. En d'autres termes, les seules lois pour lesquelles on pourra annualiser le risque grâce à une relation de la forme $\sigma_n = \sigma_1 n^{1/\alpha}$ sont des lois stables, pour lesquelles $P(\Delta r_{t,\tau}/\tau^{1/\alpha})$ est indépendant de t et de τ .

2.2.2 Théorie financière : possibilité d'application des lois

La nécessité d'utiliser des lois à queues lourdes pour la modélisation des rentabilités et le principe d'invariance, nous conduit au choix des lois stables. L'univers parétien peut se révéler comme un important outil de diagnostic de grande variation mais le coût de ceci est une variance infinie et dans certains cas une espérance infinie. Or cette dernière est un outil très important de base dans le monde de la finance que se soit dans l'opérationnel ou dans le théorique.

En conclusion de cette partie, on peut résumer les principaux avantages des lois α -stables pour la modélisation financière :

- d'un point de vue pratique, les distributions stables permettent de décrire les queues de distributions épaisses observées dans les distributions empiriques des rentabilités des actifs.

- Comme leur nom l'indique, les lois α -stables sont stables par combinaison linéaire de variables iid, et ce sont les seules qui vérifient cette propriété. Ceci permet d'appliquer la même modélisation aux variations boursières sur différentes échelles de temps et de passer facilement d'une échelle à une autre.
- Les distributions stables sont caractérisées par quatre paramètres. Tout en restant dans une complexité raisonnable, elles sont donc relativement flexibles et s'adaptent à de nombreux cas rencontrés dans la réalité.

2.3 Définitions

2.3.1 Définitions et propriétés des variable aléatoires α -stables

Dans un premier temps, on peut définir les distributions stables univariées de plusieurs manières équivalentes. Les définitions que nous rappelons au début de ce chapitre sont liées à la propriété de stabilité, au théorème centrale limite et à la fonction caractéristique. Ensuite dans un second temps, on travaillera sur les lois stables symétriques avec une présentation de la densité de probabilité et de son développement en série.

2.3.2 Définition d'une distribution stable

Une distribution univariée stable est caractérisée par quatre paramètres : l'exposant α , le paramètre d'échelle γ , le paramètre d'asymétrie β et le paramètre de localisation μ . Dans le cas où $\alpha = 2$, la distribution est gaussienne et le paramètre d'échelle est proportionnel à l'écart-type, $\beta = 0$ et μ est la moyenne.

Nous énonçons quatre équivalences des distributions α -stables.

- Une variable aléatoire X est appelée v.a. α -stables si pour tout $c_1, c_2 > 0$ et $d \in \mathbb{R}$ tels que :

$$c_1 X_1 + c_2 X_2 \stackrel{\text{def}}{=} cX + d \quad (1)$$

Où X_1 et X_2 sont deux copies indépendantes de X , et où « $\stackrel{\text{def}}{=}$ » symbolise l'égalité en distribution.

On dit que X est strictement α -stable si l'équation (1) est vrai avec $d = 0$. On montre qu'il existe $\alpha \in (0, 2]$ tel que l'équation suivante soit vérifiée : $c^\alpha = c_1^\alpha + c_2^\alpha$.

- Une v.a X est appelée v.a. α -stables si pour tout $n \geq 2$, il existe $c_n > 0$ et $d_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{i=1}^n X_i = c_n X + d_n \quad (2)$$

Où les X_i sont des copies indépendantes de X . Le coefficient $c_n = n^{1/\alpha}$.

- Une v.a. X est appelée stable si elle admet un bassin d'attraction, i.e. s'il existe une suite de v.a. Y_1, Y_2, \dots i.i.d., une suite de nombres positifs d_n et une suite de nombres réels a_n , telles que :

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{d_n} + a_n \rightarrow X \quad (3)$$

Où \rightarrow désigne la convergence en distribution.

Bien sûr, si X est gaussien et les Y_i sont iid de variance finie, alors (3) est le théorème centrale limite usuel. En général, on peut montrer que d_n est toujours de la forme $n^{1/\alpha}h(n)$ où h est une fonction qui varie lentement au voisinage de l'infini :

$$\text{Pour tout } t > 0, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$$

- Une v.a. X est appelée α -stables s'il existe des paramètres $0 < \alpha \leq 2$, $\gamma \geq 0$, $-1 \leq \beta \leq 1$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que sa fonction caractéristique s'écrive de la façon suivante :

$$\Psi_x(t) = E(e^{itX}) = e^{it\mu - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t)W(\alpha, t))} \quad t \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Où,

$$W(\alpha, t) = \begin{cases} \tan \frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ -\frac{2}{\pi} \log |t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Les quatre paramètres qui caractérisent une loi stable s'interprètent comme suit :

- l'exposant caractéristique α décrit la forme de la distribution ou son degré de leptokurticité.
- β est un paramètre d'asymétrie. Si $\beta=-1$, on dit que la distribution est totalement asymétrique à gauche. Si $\beta=0$, on dit que la distribution est symétrique. Si $\beta=1$, la distribution est dite totalement asymétrique à droite.
- le paramètre de localisation μ est un paramètre de centrage. Quand $\alpha > 1$, il est égal à la moyenne.
- γ est un paramètre d'échelle. Quand $\alpha = 2$, ce paramètre est égal à $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$.

On reparlera plus en détails des paramètres dans la suite du rapport.

Notation 1 : on utilisera la notation suivante pour parler d'une distribution α -stable de paramètres α, β, γ et μ : $S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$.

2.3.3 Variables aléatoires stables symétriques

Proposition 1 : Une v.a. stable est symétrique si $\beta = \mu = 0$. X est symétrique par rapport à μ si $\beta = 0$.

Notation 2 : $X \sim S\alpha S$ signifie que X suit une loi stable symétrique $S_{\alpha,0}(0, \gamma)$ et X est $S\alpha S$ standard si $\gamma = 1$.

D'après la définition de la fonction caractéristique, si X est $S\alpha S$, alors la fonction devient :

$$\Psi_X(t) = e^{-\gamma^\alpha |t|^\alpha}, t \in \mathbb{R} \quad (6)$$

2.3.4 Propriété des lois stables

2.3.4.1 Opérations arithmétiques et structure fractale des marchés

Propriété 1 : si X_1 et X_2 sont deux v.a. indépendantes avec $X_i \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha_i, \beta_i}(\mu_i, \gamma_i)$, $i = 1, 2$, alors si $X_1 + X_2 \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$, avec

$$\beta = \frac{\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}$$

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

La propriété ci-dessus exprime le concept de structure fractale. Concrètement, sur les marchés boursiers, cette propriété d'additivité implique qu'une même loi de probabilité s'applique aussi bien aux rentabilités quotidienne, qu'hebdomadaires ou mensuelles, etc.

Propriété 2 : si $X \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$ et $a, b \in \mathbb{R}$, alors

$$aX + b \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha, \text{sign}(a)\beta}(a\mu + b, |a|\gamma) \quad \text{si } a \neq 1$$

$$aX + b \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha, \text{sign}(a)\beta}\left(a\mu - \frac{2}{\pi} a \gamma \beta (\log|a|), |a|\gamma\right) \quad \text{si } a = 1$$

2.3.4.2 Moments

Propriété 3 : si $X \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha, \beta}(\mu, \gamma)$ avec $\alpha \in (0, 2)$, alors

$$E|X|^p < \infty \text{ si } p \in (0, \alpha),$$

$$E|X|^p = \infty \text{ si } p \geq \alpha.$$

Propriété 4 : si $X \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha, 0}(\mu, \gamma)$ avec $\alpha \in (0, 2]$, alors

$$E|X| = \mu..$$

2.3.4.3 Comportement asymptotique des queues de distribution

Propriété 5 : si $X \stackrel{\text{def}}{=} S_{\alpha,\beta}(\mu, \gamma)$ avec $\alpha \in (0,2)$, alors

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \Pr[X > x] = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \gamma^\alpha \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha \Pr[X < -x] = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \gamma^\alpha \quad (8)$$

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin(x) dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} & \text{si } \alpha = 1 \end{cases} \quad (9)$$

Cette propriété constitue une caractéristique fondamentale qui différencie les lois stables des lois normales. En effet, la queue de distribution d'une loi stable décroît selon une loi de puissance alors que celle de la loi normale décroît suivant une exponentielle. Ceci signifie que les lois stables présentent une variabilité plus élevée que la loi de Gauss.

2.3.5 Densité de probabilité et représentation en série

2.3.5.1 Densité de probabilité

Les formes explicites des fonctions de densité de probabilité des lois α -stables ne sont pas connues en générales sauf dans certains cas, comme par exemple :

➤ Loi normale $S_{2,0}(\mu, \gamma)$ de densité :

$$f(x) = \frac{1}{2\gamma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\gamma^2}} \quad (10)$$

➤ Loi de Cauchy $S_{1,0}(\mu, \gamma)$ de densité :

$$f(x) = \frac{2\gamma}{\pi((x-\mu)^2 + 4\gamma^2)} \quad (11)$$

➤ Loi de Lévy $S_{1/2,1}(\mu, \gamma)$ de densité :

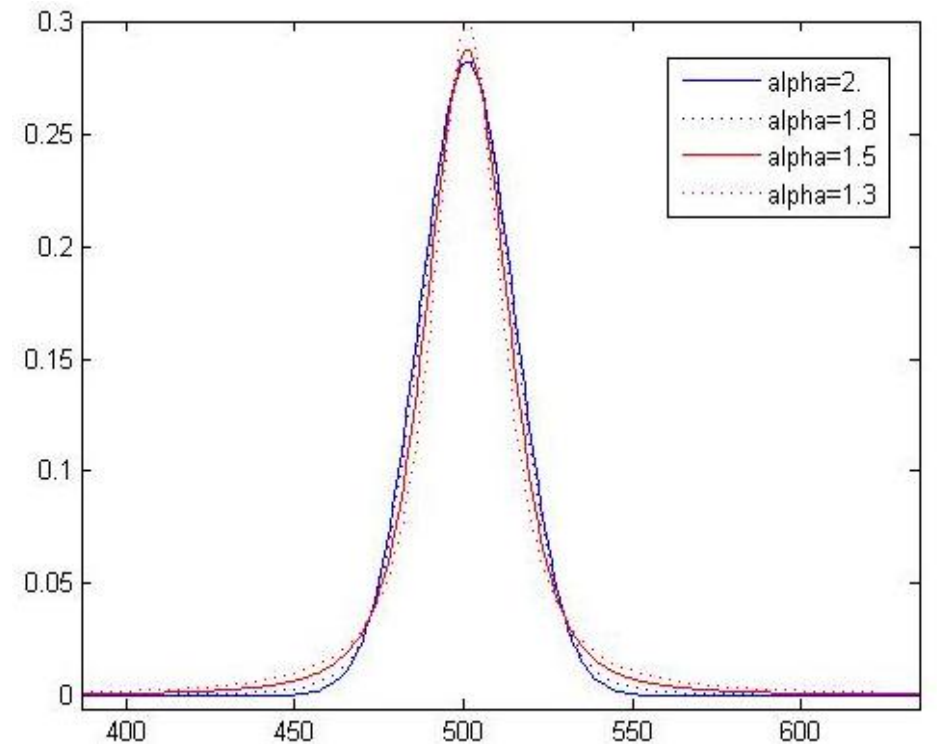
$$f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} (x - \mu)^{-\frac{3}{2}} e^{\left\{-\frac{\gamma}{2(x-\mu)}\right\}} 1_{\{\mu, \infty\}}(x) \quad (12)$$

En général, on doit se contenter d'une représentation intégrale des densités α -stables :

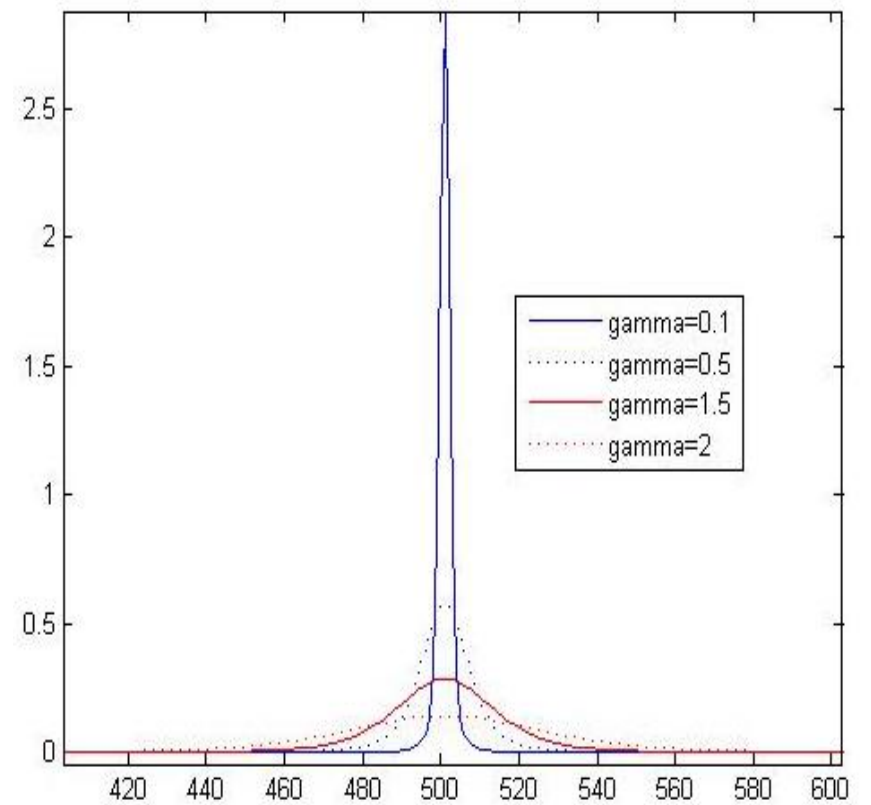
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt \quad (13)$$

Où $\psi_X(t)$ est la fonction caractéristique d'une v.a. α -stables donnée par (4).

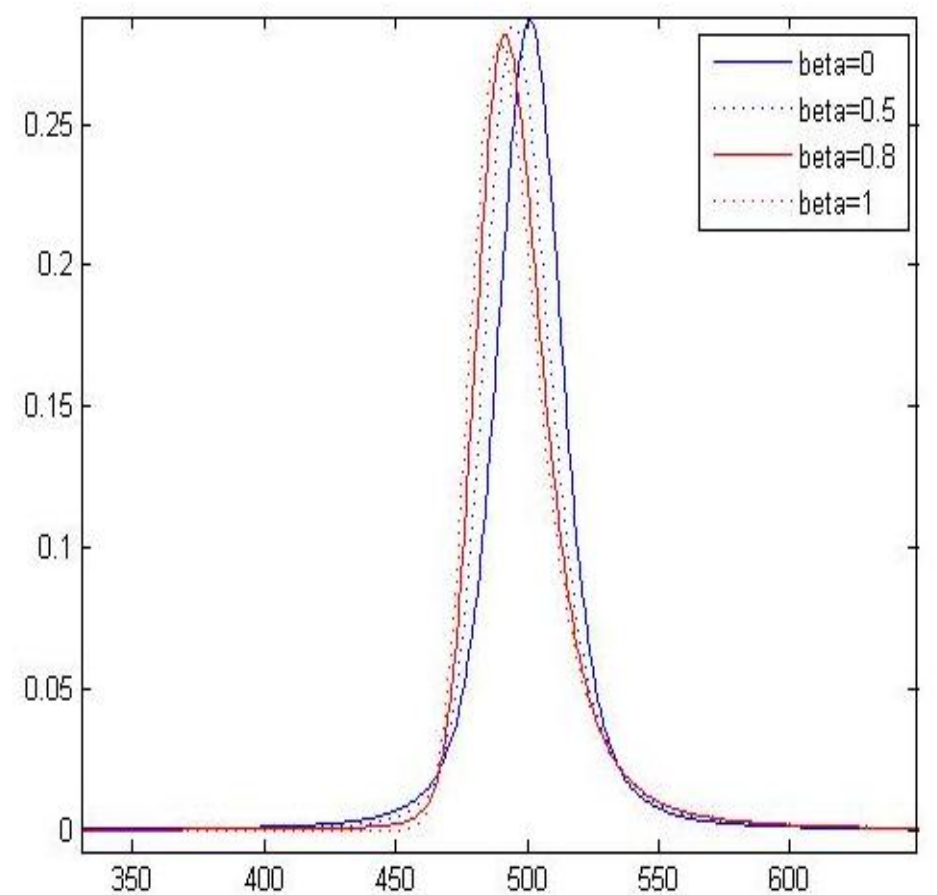
L'expression de la densité des lois α -stables peut être estimée numériquement.



Densités des lois stables de paramètres $\alpha \in \{2; 1.8; 1.5; 1.3\}, \beta = 0, \gamma = 1, \mu = 0$



Densités des lois stables de paramètres $\gamma \in \{2; 1.8; 1.5; 1.3\}, \alpha = 1.5, \beta = 0, \mu = 0$



Densités des lois stables de paramètres $\beta \in \{2; 1.8; 1.5; 1.3\}, \alpha = 1.5, \gamma = 1, \mu = 0$

2.3.5.2 Représentation de la densité d'une loi α -stable (Zolotarev)

La principale difficulté pour l'évaluation de la densité des lois α -stables résulte de l'approximation de l'intégrale dans les notes de Zolotarev (One-Dimensional Stable Distributions, section 2.2, American Mathematical Society, 1986). Les formules utilisées permettent de modéliser les densités d'une loi α -stable standard, c'est-à-dire, $X \sim S(\alpha, \beta, 1, 0)$. Rappelons-le, que nos fameuses lois se comportent comme les lois normales, on peut les centrer et les réduire.

On pose :

$$\varsigma = -\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}$$

Pour $\alpha \neq 1$ et $x > \varsigma$:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha(x-\varsigma)^{\frac{1}{\alpha-1}}}{\pi|\alpha-1|} \int_{-\xi}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta, \alpha, \beta) e^{-(x-\varsigma)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} V(\theta, \alpha, \beta)} d\theta \quad (13.1)$$

Pour $\alpha \neq 1$ et $x = \varsigma$:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \cos(\xi)}{\pi(1+\varsigma^2)^{\frac{1}{2\alpha}}} \quad (13.2)$$

Pour $\alpha \neq 1$ et $x < \varsigma$:

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{\alpha}\right) \cos(\xi)}{\pi(1+\varsigma^2)^{\frac{1}{2\alpha}}} \quad (13.3)$$

Pour $\alpha \neq 1$ et $x < \varsigma$:

$$f(x, \alpha, \beta) = f(-x, \alpha, -\beta) \quad (13.4)$$

Pour $\alpha = 1$:

$$f(x, \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{2|\beta|} e^{-\frac{\pi x}{2\beta}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} V(\theta, \alpha, \beta) e^{V(\theta, \alpha, \beta) e^{-\frac{\pi x}{2\beta}}} d\theta, & \beta \neq 0 \\ \frac{1}{\pi(1+x^2)}, & \beta = 0 \end{cases} \quad (13.5)$$

Avec :

$$\xi = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} \arctan(-\varsigma), & \alpha \neq 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \alpha = 1 \end{cases} \quad (13.6)$$

Et

$$V(\theta, \alpha, \beta) = \begin{cases} (\cos \alpha \xi)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin \alpha(\xi+\theta)} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{\cos\{\alpha\xi+(\alpha-1)\theta\}}{\cos\theta}, & \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi/2+\beta\theta}{\cos\theta} \right) e^{\frac{1}{\beta}(\frac{\pi}{2}+\beta\theta)\tan\theta}, & \alpha = 1, \beta \neq 0 \end{cases} \quad (13.7)$$

2.4 Mouvement α -stable symétrique

Le substitue au mouvement brownien classique est un processus à accroissements iid dont les lois marginales sont stables et symétriques. Les variations des rentabilités sont décrites par un mouvement α -stable symétrique, L_α , définit par :

- $L_\alpha(0) = 0$ presque sûrement,

- L_α est à accroissements indépendants,

- $\forall 0 < s \leq t$, $L_\alpha(t) - L_\alpha(s)$ suit une loi stable symétrique $S_\alpha((t-s)^{\frac{1}{\alpha}}, 0, 0)$, sa fonction caractéristique s'écrit :

$$E[e^{i\lambda(L_\alpha(t)-L_\alpha(s))}] = e^{-(t-s)|\lambda|^\alpha} \quad (14)$$

Le comportement des cours boursiers suit l'équation suivante :

$$S(t) = S(0)e^{\mu t + \gamma L_\alpha(t)} \quad (15)$$

Où α, γ et μ sont les paramètres définis précédemment.

3 Utilisation des processus α – stables

L'utilisation de ce type de processus nécessite la mise en place de simulateur de v.a α – stables et d'estimateurs de paramètres. L'élaboration et la validation de ces outils nous aiderons par la suite d'étudier les produits financiers.

3.1 Simulateur α – stables

3.1.1 Utilité d'un générateur

Il est primordial de disposer d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires suivant une loi stable, ceci pour différentes raisons :

- Cela rend possible la visualisation graphique de trajectoires de mouvements α – stables engendrées par des lois de paramètres donnés par simple accumulation des variables aléatoires produites.
- Cela permet de tester l'efficacité des différentes méthodes d'estimation existantes, en comparant les résultats des estimations des paramètres avec nos paramètres d'entrés et de pouvoir les valider.
- Cela permet d'utiliser des méthodes numériques comme celle de Monte-Carlo pour des applications financière comme par exemple l'évaluation d'option.

D'après les ouvrages sur la génération de v.a., la méthode de Chambers, Mallows & Stuck donnerait les meilleurs résultats, nous la présenterons au prochain chapitre.

3.1.2 Principe de la construction

Avant d'entrer dans le vif du sujet, parlons un peu de la loi de Cauchy. En loi stable, elle correspond à une $S(1,0,1,0)$.

Soit U une loi uniforme sur $[0,1]$: U a pour densité $f(x) = 1$ sur $[0,1]$. Soit $\varphi = \pi \left(\pi - \frac{1}{2} \right)$. φ est uniforme sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et a pour densité $f(x) = \frac{1}{\pi}$. Montrons que $X = tg\varphi$ est une loi de Cauchy. Il suffit pour cela de calculer $P(X \leq x)$.

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= P(tg\varphi \leq x) = P(\varphi \leq \arctan x) \\ &= \int_{-\infty}^{\arctan x} f_{\varphi}(u) du = \frac{1}{\pi} \left(\arctan x - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

La densité de X est donc :

$$f_X(x) = \frac{dP(X \leq x)}{dx} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Et on retrouve notre fameuse densité de Cauchy.

Dans le cas général, on construit un simulateur de lois stables à partir d'une combinaison de lois uniformes et exponentielles. Dans un premier temps, nous générons des v.a. suivant une loi exponentielle à partir de v.a. d'un générateur de nombres pseudo-aléatoires distribués selon une loi uniforme. Puis, dans un deuxième temps, on applique les formules de Chambers, Mallows, Stuck.

Pour la loi exponentielle, on procède de la manière suivante : soit U une loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $W = -\log(1 - U)$ suit une loi exponentielle. En effet :

$$\begin{aligned} P(w \geq x) &= P(-\log(1 - U) \geq x) \\ &= P(\log(1 - U) \leq -x) \\ &= P(U \geq 1 - e^{-x}) \\ &= e^{-x} \end{aligned} \quad \text{car } U \text{ est uniforme sur intervalle}$$

Soit $P(w \leq x) = 1 - e^{-x}$ et donc $f(x) = e^{-x}$. Il s'agit bien de la loi exponentielle.

3.1.3 Formules de Chambers, Mallows, Stuck

Ces trois chercheurs montrent que l'on peut obtenir des lois stables à l'aide de combinaisons adaptées de lois uniformes sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et de lois exponentielles. L'algorithme modifié de Chambers-Mallows-Stuck simulant des variables $X \sim S(\alpha, \beta, 0, 1)$ peut être décrit de la manière suivante :

- génération de v.a. V uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$;
- génération de v.a W exponentielle de paramètre 1 ;
- fabrication de v.a X donnée par :

$$X = D_{\alpha, \beta} + \frac{\sin(\alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{(\cos V)^{\frac{1}{\alpha}}} \left\{ \frac{\cos(V - \alpha(V + C_{\alpha, \beta}))}{W} \right\}^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \quad (16)$$

Où

$$C_{\alpha, \beta} = \frac{\arctan\left(\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right)}{1 - |1 - \alpha|},$$

$$D_{\alpha, \beta} = \left\{ \cos\left(\arctan\left(\beta \tan\frac{\pi\alpha}{2}\right)\right) \right\}^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

X est alors une v.a. $S(\alpha, \beta, 0, 1)$. Bien évidemment, nous pouvons nous ramener à une $S(\alpha, \beta, \gamma, \mu)$ par cette méthode :

$$X' = \begin{cases} \gamma X + \mu & \alpha \neq 1 \\ \gamma X + \frac{2}{\pi} \beta \gamma \ln \gamma + \mu & \alpha = 1 \end{cases} \quad (17)$$

$$X' \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \mu).$$

3.1.4 Modélisation des marchés avec lois stables

Grâce aux recherches de Chambers, Mallows et Stuck, nous pouvons observer dès à présent, comment les quatre paramètres influent sur la distribution de probabilité. Nous construisons à partir des v.a générées X_i un mouvement α – stable $L_\alpha(t)$ dont les accroissements sont les X_i .

On s'intéresse dans un premier temps aux déformations suivant la valeur de α , paramètre le plus important des lois stables. Les tirages sont réalisés à β et γ constants. Puis, pour différentes valeurs de α fixées, on fait varier β , à γ constant. Enfin, on considère l'autosimilarité des variations par le changement d'échelle du processus, liés aux valeurs du paramètre γ .

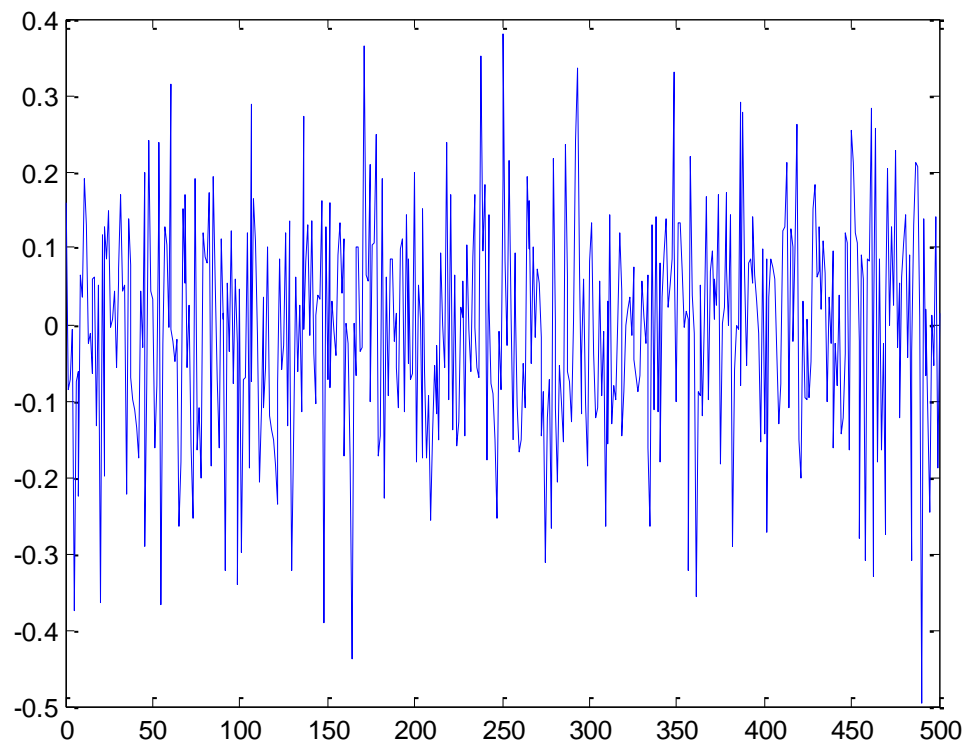
3.1.4.1 Influence du paramètre α

Le paramètre α influe sur la forme du hasard. Des quatre paramètres, c'est celui qui est le plus important. On le nomme exposant caractéristique car c'est de sa valeur que dépend la forme plus ou moins pointue de la fonction de distribution, ainsi que l'épaisseur des queues de distribution qui sont la caractéristique des lois stables. Il contrôle la probabilité contenue dans la partie extrême des queues : il mesure la capacité, pour un cours de marché, à sauter, c'est-à-dire à présenter une discontinuité.

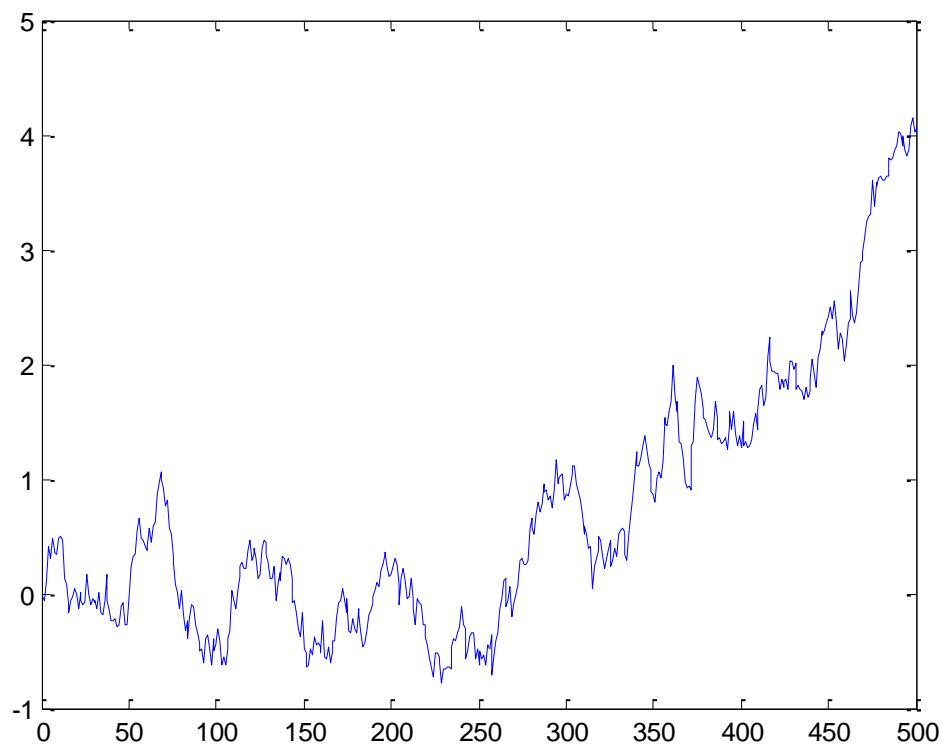
Lorsque $\alpha = 2$, la distribution est gaussienne, de variance $\sigma^2 = 2\gamma^2$. Il faut faire attention à cette équivalence à une constante $\sqrt{2}$ près. Pour tout $\alpha < 2$, le deuxième moment est infini. Pour tout $\alpha \leq 1$, il n'existe plus de moment d'ordre 1. Le processus stochastique acquiert alors un comportement extrêmement déroutant : de longues périodes de variations très faibles peuvent être suivies brusquement d'un saut de grande amplitude, qui fixera pour une nouvelle période très longue, un nouvel équilibre des petites fluctuations et bien évidemment, il n'y'aura aucune convergence vers un quelconque « équilibre final », autour duquel s'ordonneraient ces fluctuations : la loi des grands nombres ne s'applique plus. Ainsi, la valeur α indiquera la distance à la normalité et la profondeur dans le « monde parétien ». De manière générale, plus le α est petit, plus les queues de distribution sont épaisses et donc plus grandes est la probabilité d'apparition de sauts dans le processus stochastique considéré.

La valeur de notre α détermine le caractère plus ou moins erratique des fluctuations de la série, c'est-à-dire en réalité, une quantification du risque des distributions. Plus α est petit, plus la détention de l'actif sera risquée, car plus l'on s'exposera à de fortes variations de son prix. La valeur de α modifie l'allure de la fonction de densité en la déformant, ces valeurs centrales et ces valeurs extrêmes le seront aussi.

Nous fixons les valeurs de β et γ à 0 et à 0.1. Pour toutes les simulations, nous nous situons dans un contexte d'interprétation en termes de mouvements de marché. Au départ, nous supposons qu'il s'agit de rentabilités dont on dira qu'elles sont quotidiennes. Mais nous verrons qu'il peut en être tout à fait différemment. Les graphiques qui suivent représentent donc la simulation des variations d'un marché sur une période de 500 jours. Nous commençons avec une gaussienne, pour illustrer le tirage issu de la graine aléatoire fixée. Il s'agit typiquement de la représentation d'un bruit blanc gaussien, i.e. $X_t - X_{t-1}$ suit une loi normale $N\left(0, \frac{\sqrt{2}}{10}\right)$. On obtient les accroissements suivants, qui fluctuent entre -0.4% et 0.4% :

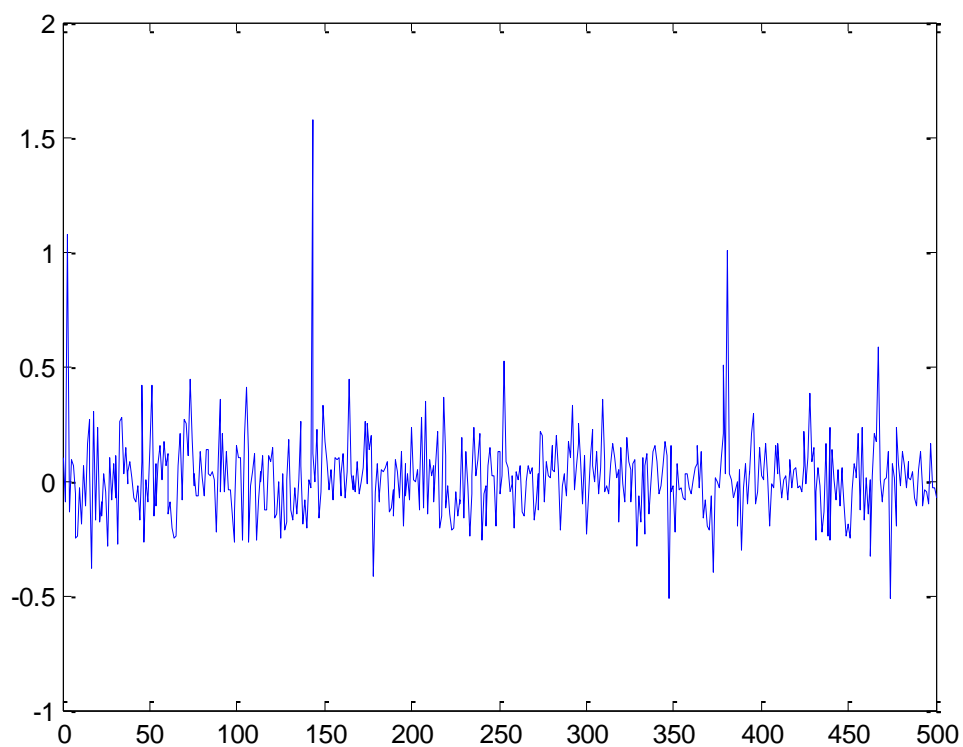


Le processus cumulé, obtenu à partir de ces accroissements, présente l'allure suivante :

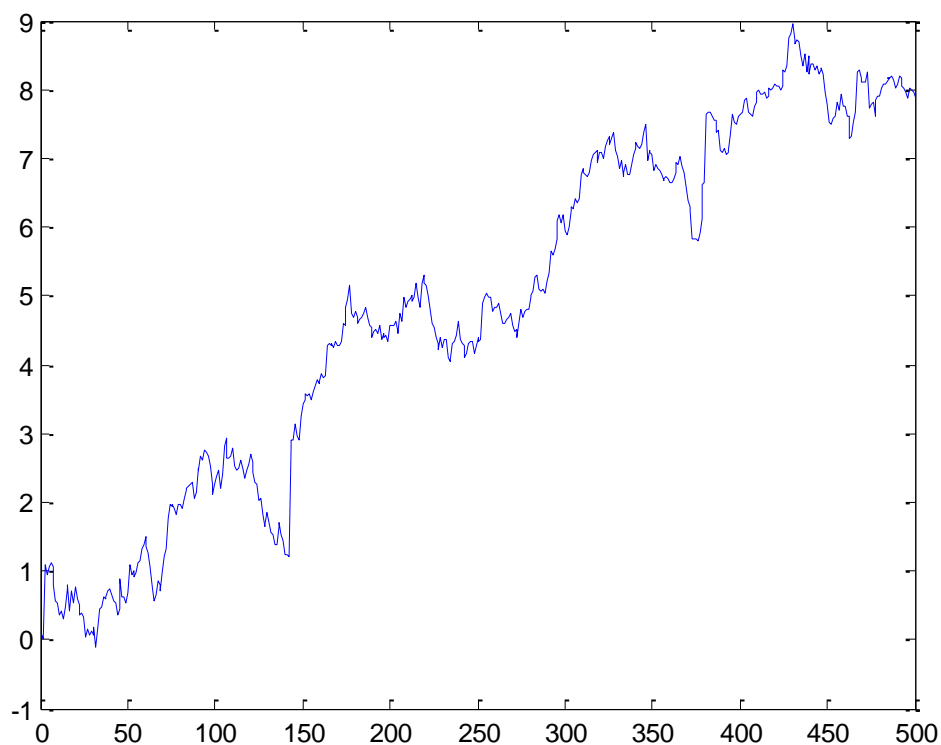


Entrons dans l'univers parétien en faisant varier le paramètre α de 1.8 à 0.15.

$\alpha = 1.8$

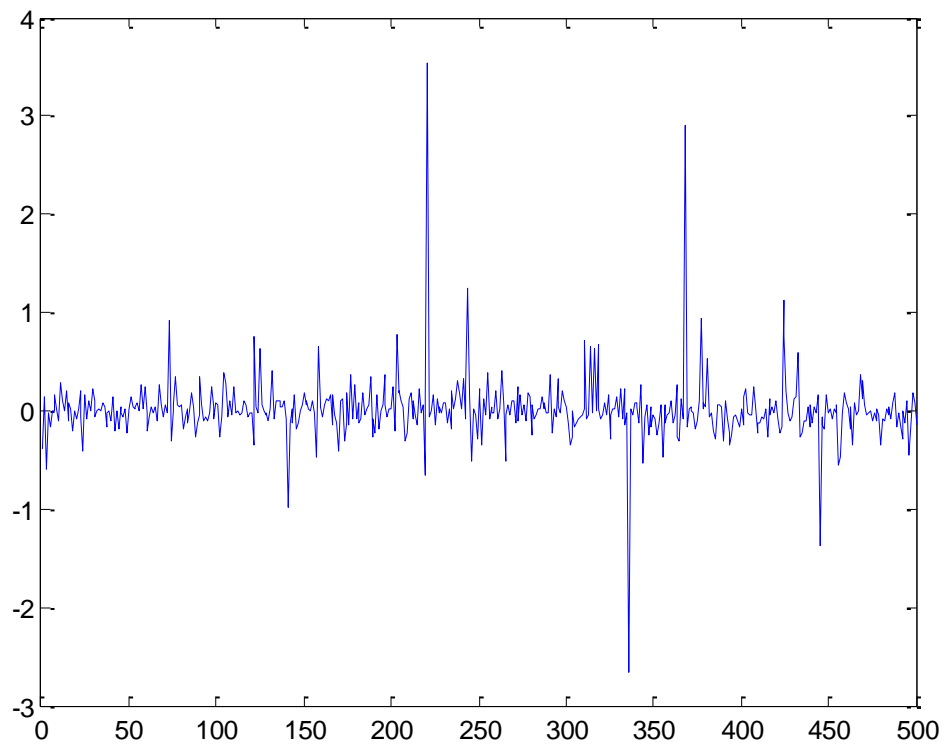


On remarque l'apparition de pic de faible amplitude, mais cependant plus élevés que pour un bruit blanc gaussien. Le processus cumulé se présente comme ci-dessous :

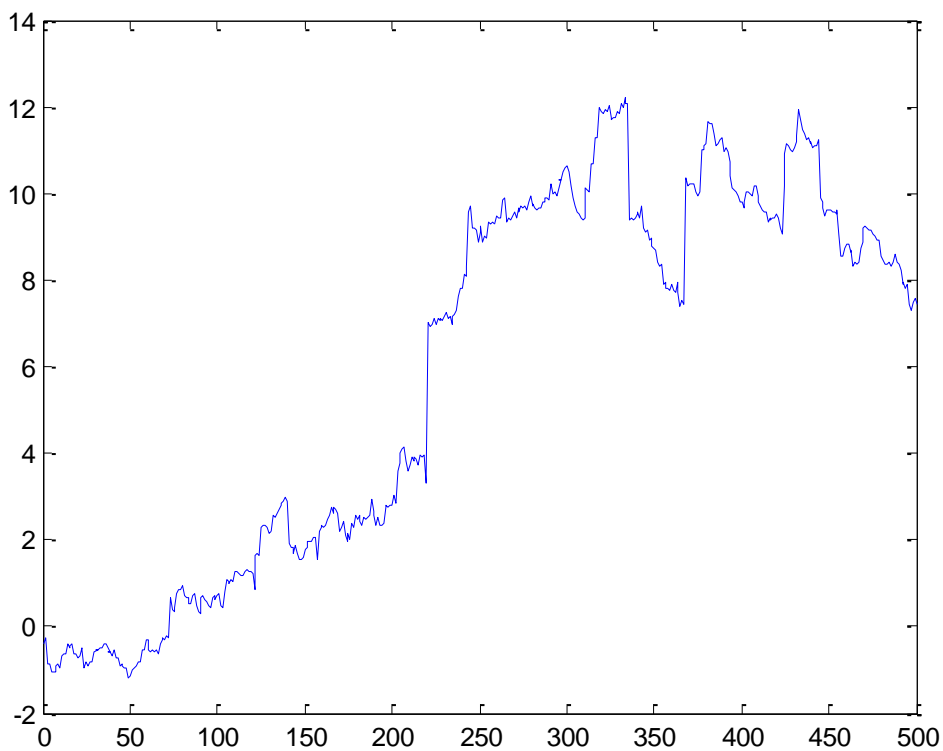


$\alpha = 1.4$

Cette fois, il doit y avoir des sauts plus nets encore que le cas précédent, on obtient :



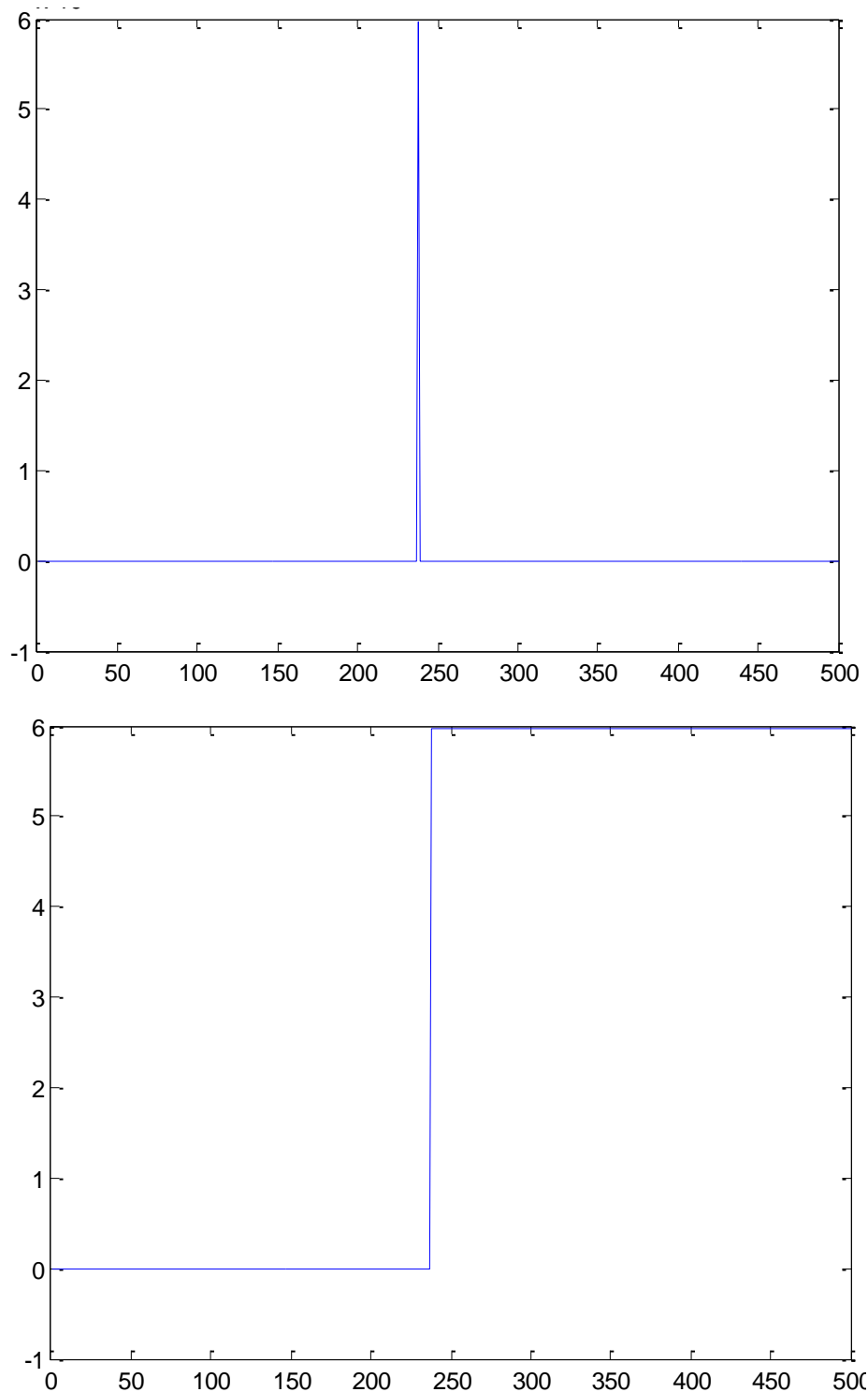
Et :



On constate un étirement de plus en plus marqué, au fur et à mesure que α diminue : le nombre des sauts de taille importante augmente, ainsi que le risque du marché.

$\alpha = 0.15$

Toutes les lois stables de paramètres α inférieur ou égale à 1 n'ont pas d'espérance mathématique. Ceci signifie que l'on va se trouver devant des comportements contre-intuitifs, étant donné que notre intuition est fondée sur une loi des grands nombres qui ne s'applique plus ici : on verra en particulier apparaître des configurations spécifiques, reconnaissable rapidement.



On observe des périodes de quasi stabilité, entrecoupées de ruptures violentes, qui s'apparentent à des changements de régime du système.

3.1.4.2 Influence du paramètre γ

Le paramètre d'échelle γ , qui est positif, caractérise la taille des variations des observations, pour une forme de hasard fixé. En effet, alors que le paramètre α caractérise la forme normalisée des distributions, il est nécessaire, une fois cette forme déterminée, d'en préciser la taille. Autrement dit, après avoir décrit la capacité à sauter du processus, il faut ensuite indiquer quelle doit être la taille de ces sauts. Il s'agit donc d'une mesure de dispersion. En cela, il s'apparente au paramètre σ de la loi normale. γ pourrait, d'une certaine manière, remplacer l'écart type lorsque celui-ci n'existe pas.

On retrouve d'ailleurs la propriété de l'écart-type suivante : si S suit une loi stable de paramètre γ , si d et d' sont des réels quelconques, alors la variable $S' = dS + d'$ suit une loi stable de paramètre d'échelle $\gamma' = |d|\gamma$. Il est à noter que, dans ce cas, puisque les paramètres α et β sont invariants par transformation affine, ils sont les mêmes pour S et S' .

Le paramètre γ revêt une importance particulière pour la mise en évidence du caractère stable du marché, en permettant l'obtention d'invariance, par zoom sur la série étudiée.

En effet, soit une loi stable $S(\alpha, 0, \gamma_1, 0)$, représentant par exemple les variations quotidiennes de rentabilités. Si, à présent, on s'intéresse aux variations hebdomadaire rentabilités, et en notant comme précédemment $\Delta r_{t,\tau} = \ln S(t)/S(t - \tau)$ la rentabilité logarithmique périodique de période τ , on aura :

$$\Delta r_{t,5} \triangleq \Delta r_{t,1} \cdot 5^{1/\alpha}.$$

Où \triangleq désigne l'égalité en distribution. La relation entre les paramètres d'échelle γ_1 et γ_2 est :

$$\gamma_5 \triangleq \gamma_1 \cdot 5^{1/\alpha}$$

De la même manière, pour les variations mensuelles :

$$\Delta r_{t,20} \triangleq \Delta r_{t,1} \cdot 20^{1/\alpha}$$

Et la relation d'échelle entre γ_1 et γ_n :

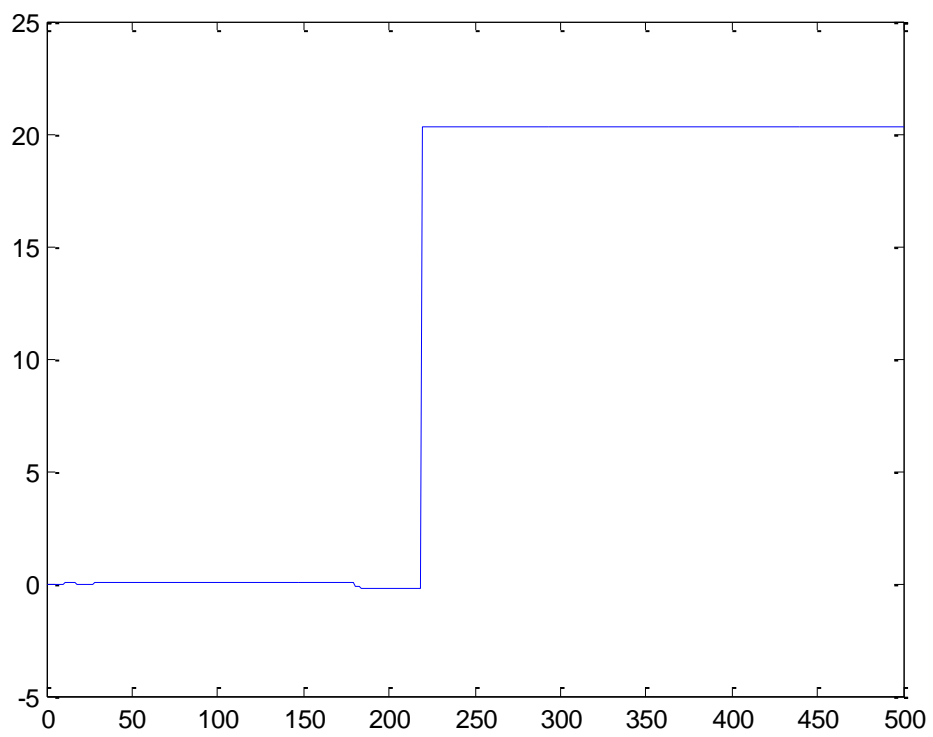
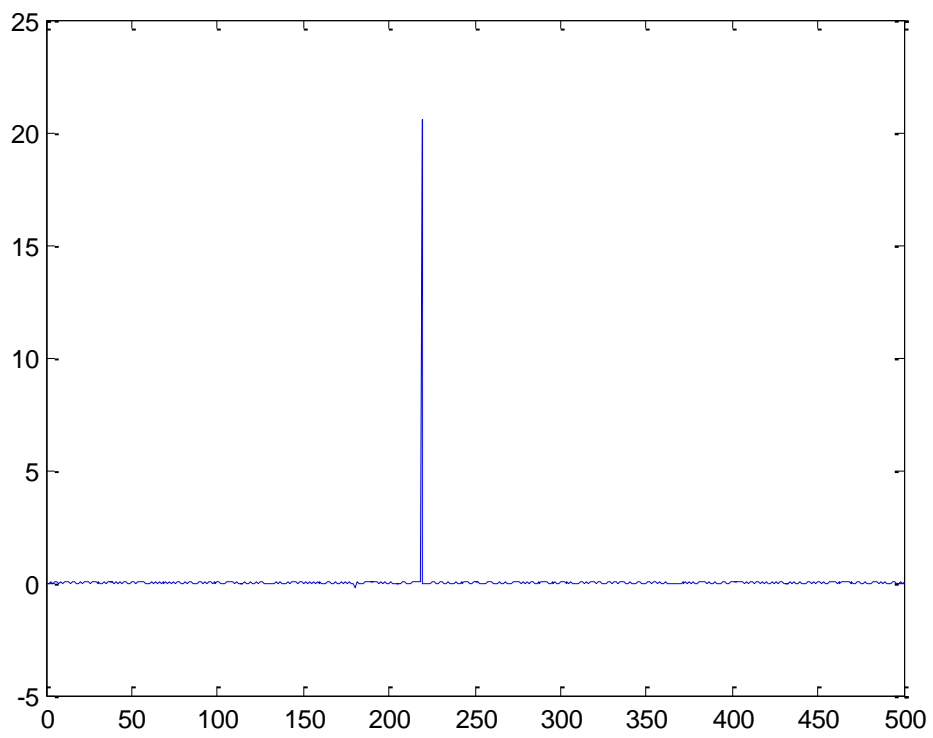
$$\gamma_n \triangleq \gamma_1 \cdot n^{1/\alpha}$$

Cette relation d'invariance d'échelle, fondamentale, nous permet de passer des observations à 1 jours à sur des prévisions de distributions à n jours, avec la taille correspondante.

Nous examinons à présent l'influence de γ sur le processus, en commençant par :

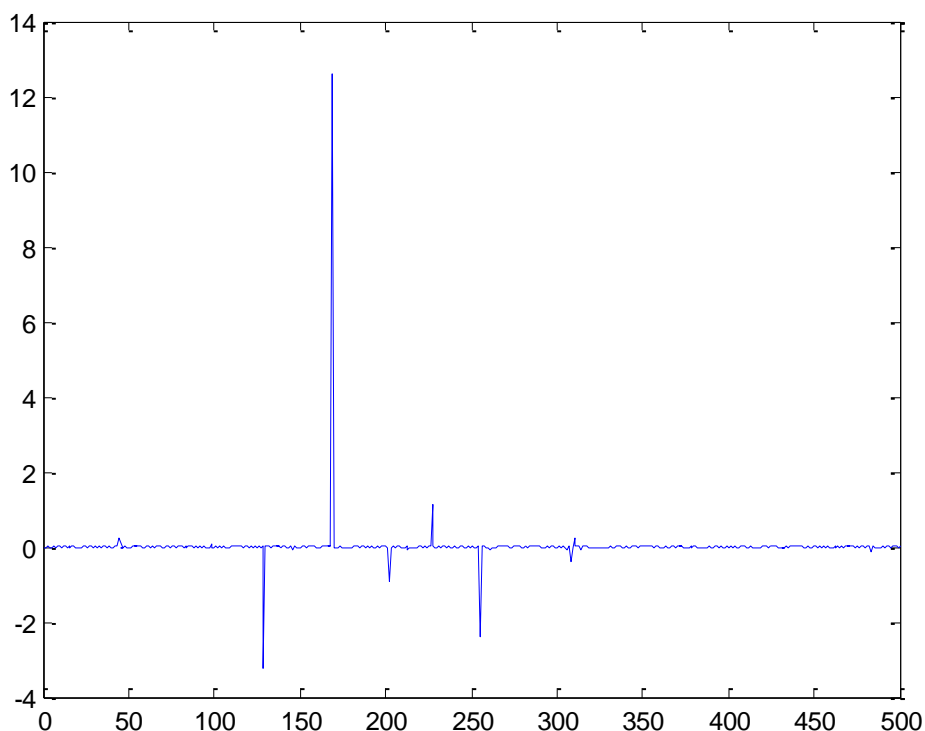
$$\alpha = 0.5, \gamma = 0.00001$$

On obtient la même forme de hasard que précédemment, mais avec une taille différente pour les accroissements dont le plus important n'est plus que de + 20%.

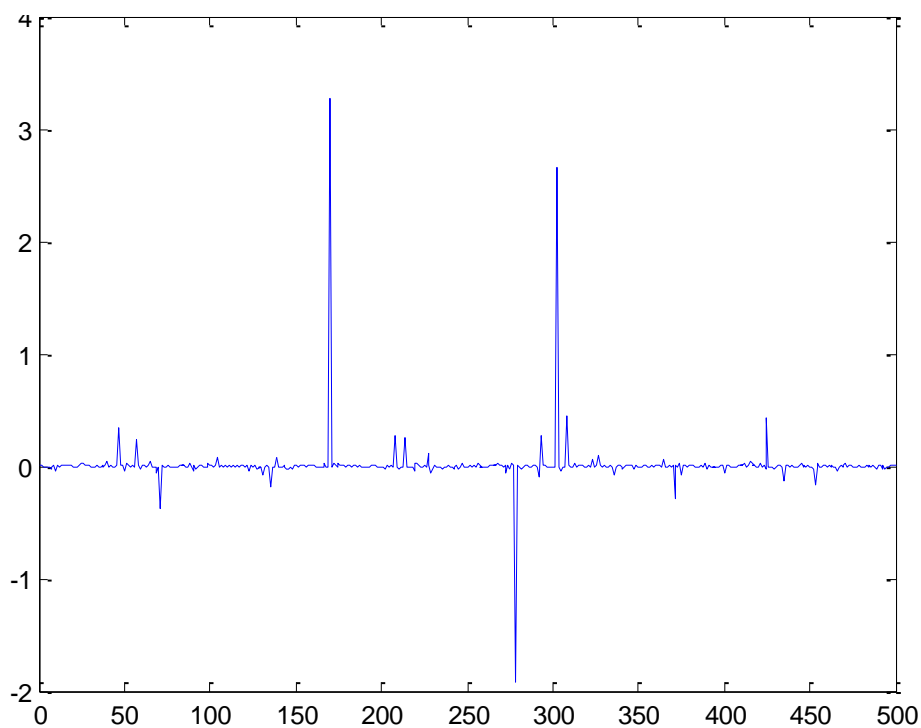


Le phénomène modélisé par ce processus à loi marginale de faible α est extrêmement erratique, mais avec des valeurs raisonnables : il pourrait par exemple d'agir de valeurs boursières non cotées avec peu de transactions.

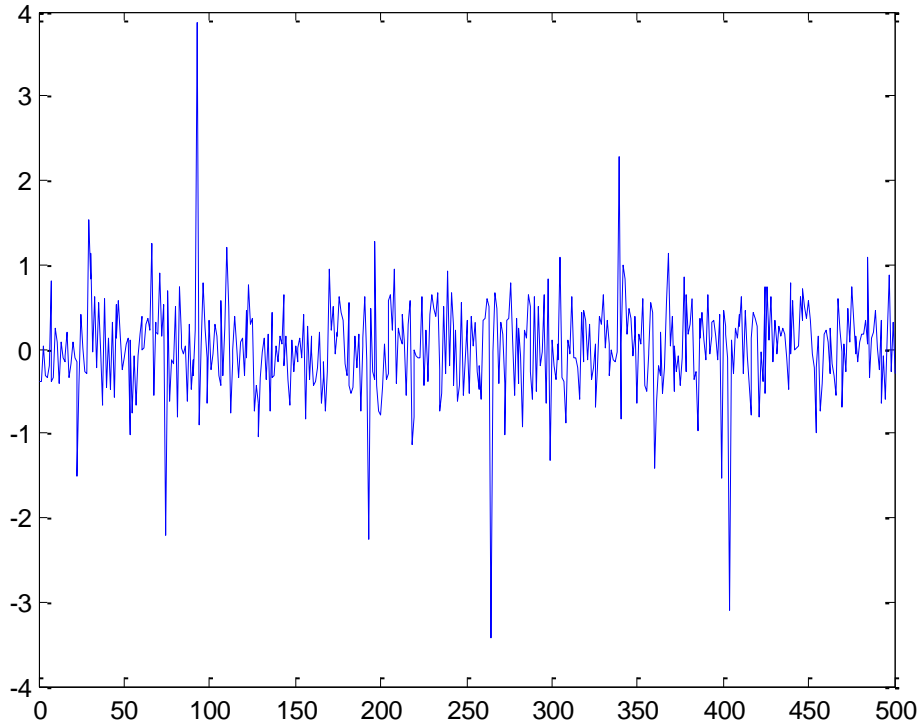
Nous réduisons encore l'échelle avec un $\gamma = 0.000005$:



La variation maximale diminue à environ 12%. Nous pouvons aussi augmenter le nombre de saut en gardant la même variation, pour cela on augmente notre α et on diminue notre γ .



Pour $\alpha = 1.8$, nous réduisons l'échelle (en réalité, nous l'augmentons par rapport à la figure précédente) par $\gamma = 0.3$.



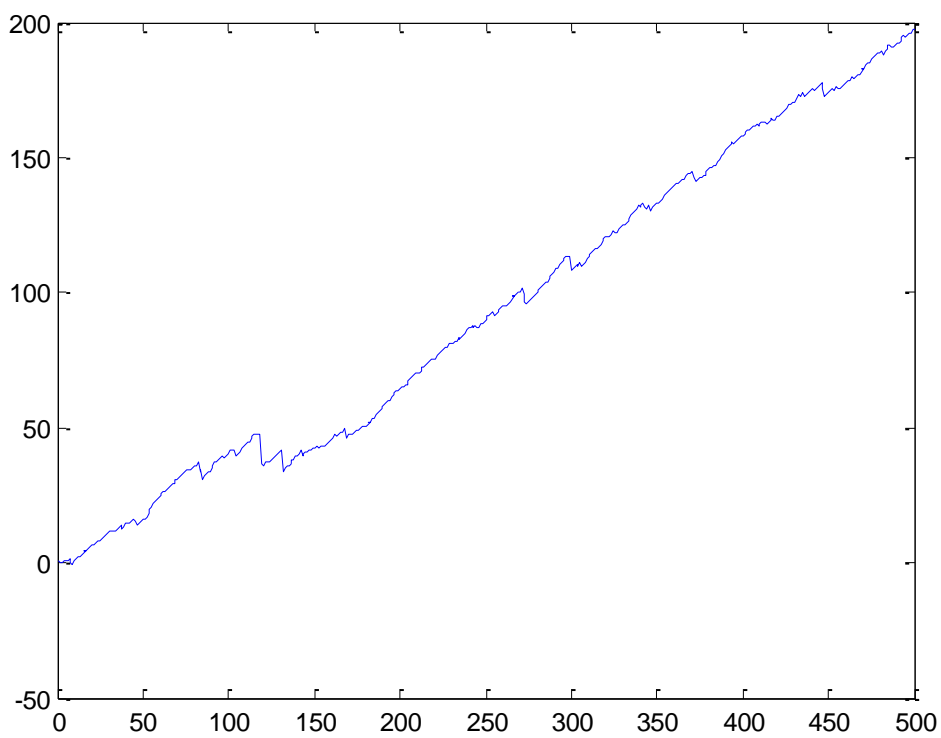
Nous concluons par une observation que dans tous ces cas, la taille des accroissements n'a pas variée, mais la forme de leur distribution a significativement changée. Selon le phénomène à modéliser, on peut donc agir soit sur la valeur de α , soit sur celle de γ , soit sur les deux.

3.1.4.3 Influence du paramètre β : l'asymétrie

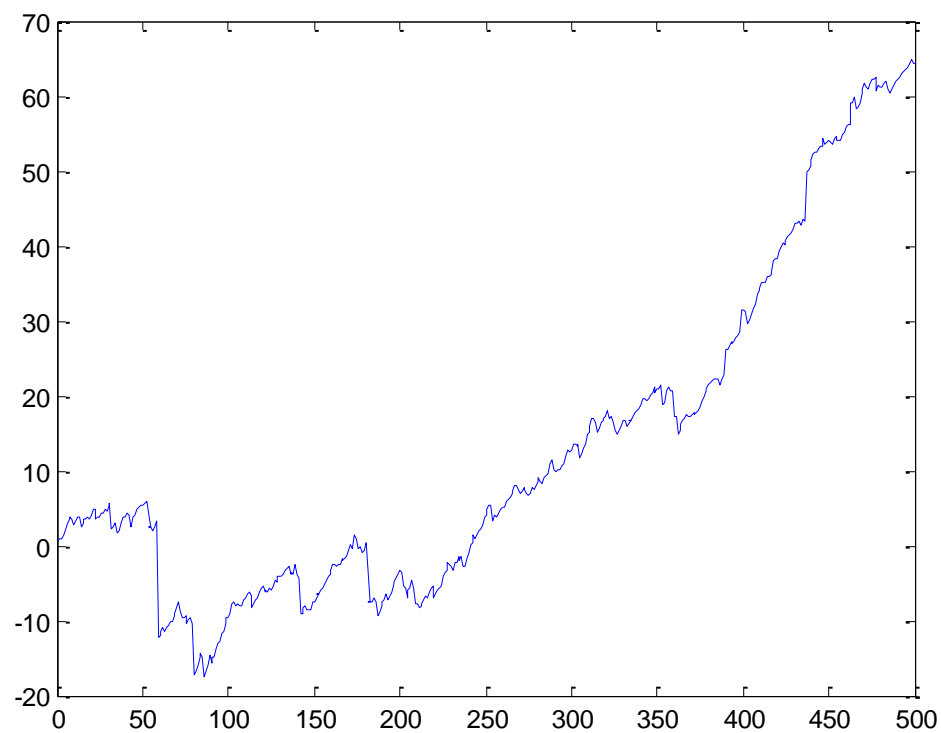
β est, après α et γ , un paramètre significatif. Il contient toute l'information concernant l'oblicité de la distribution. C'est pourquoi on l'appelle paramètre d'asymétrie. Comme β est affecté d'un coefficient en $\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)$, son influence sur la forme de la fonction de distribution est d'autant plus grande que α est petit. Pour $\alpha = 2$, $\tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) = 0$ et la valeur de β n'a plus aucune incidence sur la forme de la fonction : la distribution est symétrique. Autrement dit, à β fixé, la distribution se disymétrisera d'autant plus que α sera petit, et se centrera d'autant plus que α sera proche de 2.

On fixe $\alpha = 1.25$ et on fait varier β d'un extrême à un autre, c'est-à-dire de -1 à 1.

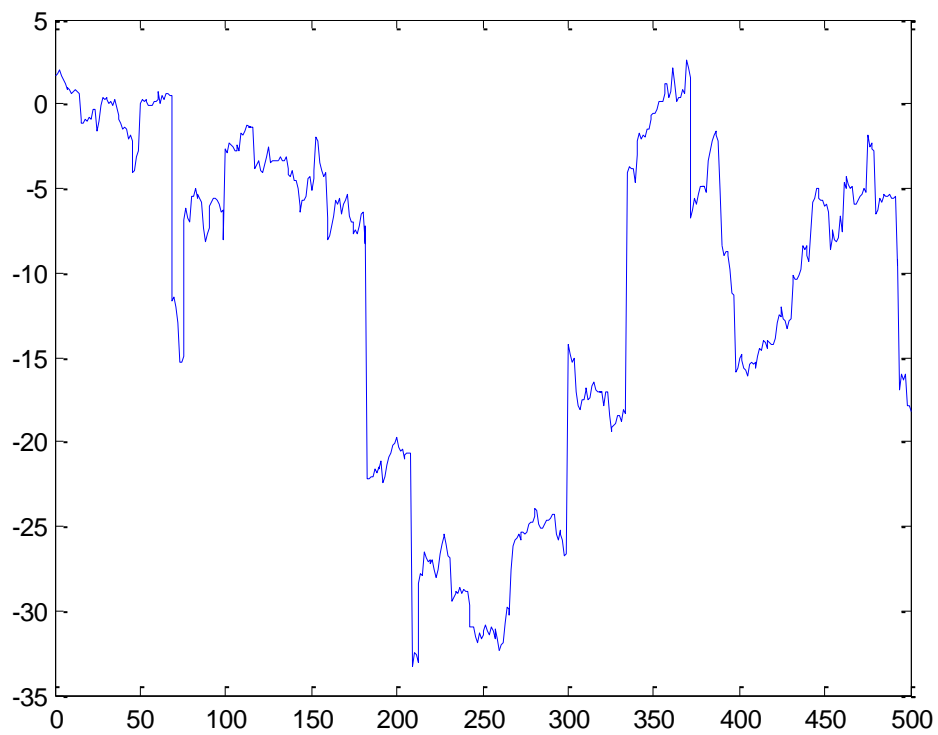
$\beta = -1$



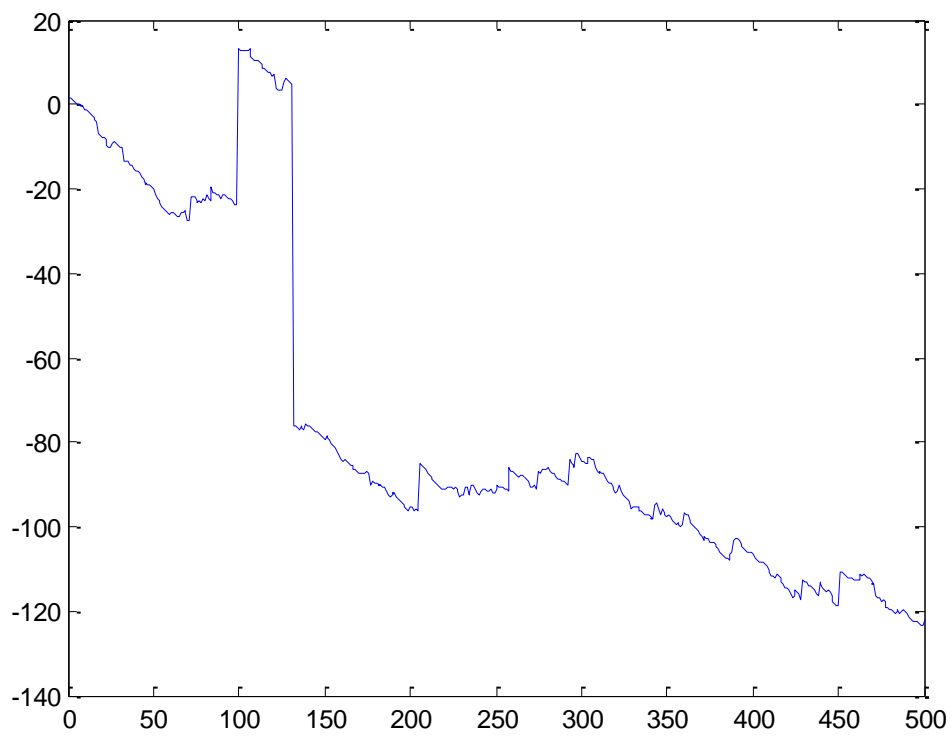
$\beta = -0.5$



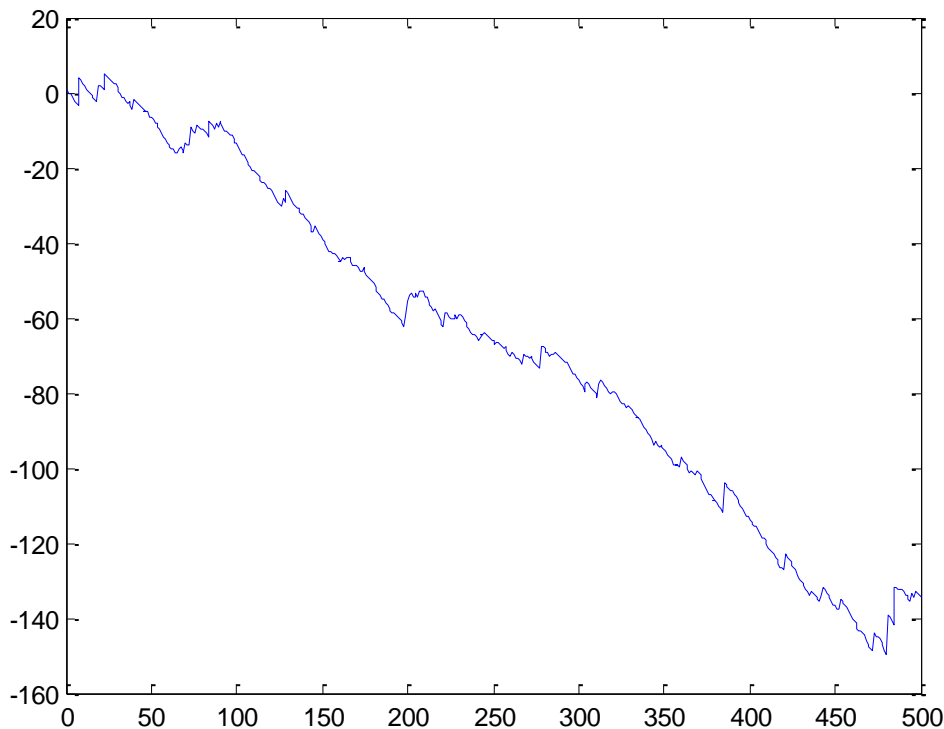
$\beta = 0$



$\beta = 0.5$



$$\underline{\beta = 1}$$



3.1.4.4 Conclusion : finesse de la modélisation

On voit sur les exemples précédents comment le réglage de la valeur des quatre paramètres des lois stables permet d'obtenir des trajectoires de cours aux formes arbitrairement erratiques. Cette capacité de réglage fin de l'allure des distributions permet d'agir sur l'une ou l'autre des dimensions de risque : taille ou saut, et de quantifier de la meilleure manière possible le profil de risque de marché. Une application de ce modèle pourrait servir dans la gestion de portefeuille et plus précisément dans la gestion de risque.

L'interprétation des paramètres des lois stables, si elle est plus délicate que pour une loi normale, permet cependant une approche plus fine du comportement statistique d'une série donnée. En particulier, la deuxième dimension de risque est importante, car elle permet de formaliser un certain nombre de problèmes posés sur la prise en compte du risque global d'une position. Le poids des queues de distribution est donné par les valeurs du couple (α, γ) , α définissant la contenance potentielle du nombre de sauts, et γ le nombre réel de sauts contenus dans la queue, son poids effectif.

3.2 Estimation des paramètres des lois α – stables

3.2.1 Généralités

Afin de pouvoir utiliser les lois stables de manière opérationnelle dans les applications, il est nécessaire de pouvoir estimer, de la manière la plus fiable possible, les quatre paramètres caractéristiques de leurs distributions. Or, estimer α, β, γ et μ est sensiblement plus délicat que d'estimer la moyenne et la variance dans le cas gaussien. Entre autres raisons, cela provient du fait

que les v.a stables sont plus erratiques que leurs contreparties gaussiennes. De plus, ne pas connaître de forme analytique pour leur densité complique encore la chose.

Plusieurs méthodes sont toutefois apparues au cours des vingt dernières années qui permettent de procéder à des estimations statistique d'ordre, supposant une lecture de tables ; et, d'autres part, les méthodes spectrales, utilisant la fonction caractéristique.

Les premières méthodes utilisent les propriétés de relative robustesse des quantiles des distributions stables. Puisque ces quantiles sont peu sensibles aux grandes valeurs des distributions, et puisque ce sont ces grandes valeurs qui posent des problèmes pour l'utilisation des méthodes classiques d'estimation, il paraît cohérent de chercher à utiliser ces quantiles dans la détermination de la valeur des paramètres. Ces méthodes, comme nous le verrons, présentent l'avantage de la simplicité.

L'autre possibilité est d'utiliser la seule expression analytique simple dont on dispose pour les distributions stables, c'est-à-dire leur fonction caractéristique. Ceci conduit aux méthodes spectrales, leur avantage est qu'elles sont plus précises mais le temps de calcul est beaucoup plus long.

Nous allons dans la suite présenter quelques méthodes d'estimation.

3.2.2 Méthodes utilisant la statistique d'ordre

Nous abordons à présent la première des deux grandes familles des méthodes d'estimation des paramètres des distributions stables : celle qui utilise la statistique d'ordre. Deux méthodes non paramétriques sont présentées, qui permettent d'obtenir une évaluation de trois ou quatre paramètres sous certaines conditions. Le principe général de ces méthodes repose sur l'utilisation des quantiles des échantillons obtenus.

3.2.2.1 Méthode de Fama-Roll

Cette méthode permet sous l'hypothèses que $\beta = 0$ (lois stables symétriques) et $1 \leq \alpha \leq 2$, de calculer des estimateurs de α , γ et μ .

Soit S une v.a. suivant la loi stable ; on notera $U = \frac{S-\mu}{\gamma}$ la loi stable centrée réduite correspondante.

3.2.2.1.1 Estimation du paramètre μ

La fonction de répartition de U peut être tabulée en fonction des différentes valeurs de x et pour $\beta = 0$. Considérons les quantiles des distributions non réduite et réduite, que nous notons F_x et f_x tels que $P(S < F_x)$ et $P(U < f_x) = x$.

Comme nous avons $S = \gamma U + \mu$, il vient : $F_x = \gamma f_x + \mu$. Dans ces conditions, le calcul de F_x et F_{1-x} donne :

$$F_x + F_{1-x} = (\gamma f_x + \mu) + (\gamma f_{1-x} + \mu) = \gamma(f_x + f_{1-x}) + 2\mu$$

U étant centrée et symétrique ($\beta = \mu = 0$) on a $f_x = f_{1-x}$ et par conséquent :

$$\mu = \frac{1}{2}(F_x + F_{1-x}),$$

ce qui fournit un estimateur de μ dès que l'on connaît un estimateur de F . Si $(x_i)_{i=1,\dots,n}$ sont les n observations de S que l'on a rangées dans un ordre croissant ($x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$), on peut écrire :

$$F_{\frac{2i-1}{2n}} = x_i$$

Pour les autres valeurs de x on procède par interpolation linéaire de la manière suivante :

Si $\frac{2i-1}{n} \leq x \leq \frac{2i+1}{n}$, alors :

$$F_x = x_i + n \left[x - \frac{2i-1}{n} \right] (x_{i+1} - x_i)$$

On peut donc, de cette façon, calculer \hat{F}_x estimateur de F_x pour des valeurs de x comprise entre $\frac{1}{2n}$ et $1 - \frac{1}{2n}$.

On obtient alors μ par la formule :

$$\hat{\mu} = \frac{1}{2}(\hat{F}_x + \widehat{F_{1-x}}),$$

Avec x choisi adéquatement. Il est à noter que comme on suppose que $\beta = 0$ et $\alpha > 1$, alors il est tout à fait possible de prendre la moyenne comme estimateur puisque le moment d'ordre 1 existe.

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} x_i$$

3.2.2.1.2 Estimation du paramètre γ

L'estimation de ce paramètre est fondée sur l'observation d'une particularité des fonctions de répartition. On remarque que le quantile $f_{0.72}$ est celui qui fluctue le moins lorsque l'on fait varier α entre 1 et 2 :

$$0.824 \leq f_{0.72} \leq 0.830$$

$$f_{0.72} \approx 0.827$$

3.2.2.1.3 Conclusion sur cette méthode

La précision des résultats obtenus par l'utilisation de cette méthode est en général moyenne. Alors que l'approximation obtenue pour γ est, le plus souvent, assez bonne, celles de μ et α le sont moins. Ceci résulte de plusieurs facteurs parmi lesquels :

- Une première source d'imprécision provient du biais de l'estimateur de γ qui d'ailleurs se répercute sur l'approximation de α .

- L'estimation de α est également liée à celles de F_x et F_{1-x} (avec $x = 0.96$ par exemple). Au total, l'estimation de α dépend de quatre estimations préalablement réalisées, d'où un α imprécis.

En résumé, les principaux inconvénients de cette méthode sont :

- Elle suppose que les distributions soient symétriques, or le paramètre β est important pour l'interprétation de μ . En particulier, la relation suivante $f_x - f_{1-x}$ n'est plus vérifiée.
- Il est nécessaire que α soit compris entre 1 et 2.
- Elle est relativement imprécise.

Lorsque l'on choisit la voie de la statistique d'ordre pour l'estimation des paramètres des lois stables, l'on préfère aujourd'hui utiliser une seconde méthode non paramétrique : celle proposée par McCulloch.

3.2.2.2 Méthode de McCulloch pour des distributions quelconques

3.2.2.2.1 Estimation de α et β

Fama & Roll ont proposé une méthode basée sur les quantiles empiriques pour l'estimation des paramètres α et σ des lois symétriques stables, lorsque $1 < \alpha \leq 2$. La méthode de Fama et Roll est simple à implémenter, mais elle a le désavantage que les estimateurs obtenus sont asymptotiquement biaisés ; de plus, les conditions imposées aux paramètres sont très restrictives. McCulloch a généralisé cette méthode en utilisant les quantiles empiriques. Il a obtenu des estimateurs pour les quatre paramètres pour une région très grande de l'espace paramétrique.

Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire stable $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ et soit x_p le quantile d'ordre p , c'est-à-dire, $F(x_p) = p$, et \hat{x}_p le quantile empirique correspondant. Pour éviter une fausse asymétrie des petits échantillons, une correction est nécessaire : $\hat{x}_{q_i} = x_i$ avec $q_i = \frac{2i-1}{2n}$. Puis, on effectue une interpolation linéaire pour obtenir \hat{x}_p à partir de \hat{x}_{q_i} et $\hat{x}_{q_{i+1}}$ où $q(i) \leq p \leq q(i+1)$. L'estimateur obtenu \hat{x}_p est un estimateur convergent de x_p .

On définit ϑ_α et ϑ_β comme suit :

$$\vartheta_\alpha = \frac{x_{0.95} - x_{0.05}}{x_{0.75} - x_{0.25}}$$

$$\vartheta_\beta = \frac{x_{0.95} + x_{0.05} - 2x_{0.5}}{x_{0.95} - x_{0.05}}$$

et montre que ces indices ne dépendent pas de σ ni de μ . De plus ils sont respectivement des fonctions décroissante et croissante de α et β . Cette relation peut s'inverser, donc les paramètres α et β peuvent être vus comme des fonctions de ϑ_α et ϑ_β , soit :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} = \phi_1(\hat{\vartheta}_\alpha, \hat{\vartheta}_\beta) \\ \hat{\beta} = \phi_2(\hat{\vartheta}_\alpha, \hat{\vartheta}_\beta) \end{cases}$$

Il nous reste plus qu'à lire les paramètres dans les tables et à faire des interpolations bilinéaires.

3.2.2.2.2 Estimation de γ et μ

Pour l'estimation de ces deux paramètres, on procède de la manière suivante :

$$\vartheta_c = \frac{x_{0.75} - x_{0.25}}{\gamma} = \phi_3(\alpha, \beta)$$

$$\vartheta_\mu = \frac{\mu - x_{0.5}}{\gamma} = \phi_4(\alpha, \beta)$$

Où

Nous pouvons voir que ϑ_γ et ϑ_μ dépendent seulement de α et β c'est-à-dire :

ϕ_3 et ϕ_4 étant des fonctions tabulées. Donc nous avons bien les deux estimateurs des paramètres :

$$\hat{\gamma} = \frac{\hat{x}_{0.75} - \hat{x}_{0.25}}{\phi_3(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}$$

$$\hat{\mu} = \hat{\gamma}\phi_4(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) + \hat{x}_{0.50}$$

3.2.2.2.3 Conclusion sur les deux méthodes non paramétriques

Si on compare cette méthode avec la méthode de Fama et Roll, la méthode de McCulloch apporte deux améliorations importantes :

- On ne suppose plus que $\beta = 0$;
- Il n'est pas introduit de biais dû à des approximations de la valeur de certains des quantiles f_x .

En conclusion, on peut dire que ces deux méthodes, et plus particulièrement celle de McCulloch, sont des méthodes simples d'utilisation. Celle de Fama permet d'obtenir des estimateurs qui peuvent fournir une bonne valeur de γ . Celle de McCulloch permet une estimation relativement fiable de tous les paramètres.

3.2.3 Méthodes utilisant la fonction caractéristique

Avec les méthodes utilisant la fonction caractéristique, appelées méthodes spectrales, nous abordons une famille de méthodes totalement différentes, fondées non plus sur des lectures de tables, mais sur l'utilisation de la fonction caractéristique, dont l'expression relativement simple. Cette démarche a donné lieu à deux types de méthodes : celles utilisant des régressions sur une transformation de la fonction de la fonction caractéristique, et celles recherchant la minimisation d'une norme entre les fonctions caractéristiques empirique et théorique. Nous présentons à présent ces deux types de méthodes.

3.2.3.1 Méthodes utilisant des régressions

3.2.3.1.1 Méthode de Press

Partant de la fonction caractéristique suivante :

$$\Psi_x(t) = E(e^{itX}) = e^{it\mu - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t)W(\alpha, t))} \quad t \in \mathbb{R}$$

On obtient :

$$\log |\Psi_x(t)| = -|\gamma t|^\alpha$$

Si nous notons S la v.a. dont nous cherchons à estimer les paramètres et S_j avec $j = 1, \dots, n$ les n observations de S que nous possédons alors :

$$\hat{\Psi}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} e^{iS_j t}$$

On choisit alors pour t deux valeurs quelconques distinctes t_1 et t_2 , et l'on obtient par la résolution simultanée des deux équations en γ et α issues de 4.2, en remplaçant $\Psi_x(t)$ par son estimateur $\hat{\Psi}(t)$, les estimateurs de γ et α sont données par :

$$\hat{\alpha} = \frac{\log \frac{\log |\hat{\Psi}(t_1)|}{\log |\hat{\Psi}(t_2)|}}{\log \frac{t_1}{t_2}} \quad (18)$$

Et

$$\hat{\gamma} = e^{\frac{\frac{1}{\hat{\alpha}} \log |t_1| \log [-\log |\hat{\Psi}(t_2)|] - \log |t_2| \log [-\log |\hat{\Psi}(t_1)|]}{\log \left| \frac{t_1}{t_2} \right|}}$$

De la même manière que nous avons obtenu α et γ , il serait possible également, en revenant à l'expression de $\log \Psi(t)$ et en choisissant t_1 et t_2 distincts, de trouver des estimations de β et μ . Mais les expressions obtenues sont assez lourdes, et nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire de les calculer, en raison d'une difficulté d'utilisation des résultats obtenus pour le paramètre principale α .

En effet, bien que cette méthode fournisse des estimateurs simples des paramètres, un problème important n'est pas résolu : le choix des valeurs de t_1 et t_2 , qui a une grande influence sur les résultats. Or, la méthode de Press ne précise pas de quelle manière faire ce choix.

3.2.3.1.2 Méthode de Arad pour des distributions symétriques

La méthode développée ici généralise le mécanisme d'estimation développé par Press. L'apport de Arad est une réflexion sur le choix des valeurs de t dont le résultat de l'estimation, comme on l'a vu, dépend dans une large mesure.

Cependant, cette méthode ne s'applique que dans le cas où les distributions sont symétriques. L'idée de départ est la suivante : afin de pouvoir comparer utilement les résultats de plusieurs estimations différentes, Arad remarque qu'il serait intéressant de choisir des séquences de points t_k ; ceci implique de conserver la même valeur pour le paramètre γ . En effet, pour des séries dont le paramètre d'échelle seraient différents, les effets de taille rendraient non significatifs les résultats obtenus. C'est pourquoi il est nécessaire de commencer par centrer et réduire les séries utilisées. Pour la réduction, on utilise l'estimateur de Fama-Roll pour le paramètre γ , car il donne de bon résultat.

Au départ, on dispose d'une v.a. stable S de paramètre α, β, γ et μ . Puis, à partir de S , on construit la variable réduite $S' = \frac{S}{\hat{\gamma}_0}$ qui aura donc pour paramètres $\alpha, \beta, \gamma' = \frac{\gamma}{\hat{\gamma}_0}$ et $\mu' = \frac{\mu}{\hat{\gamma}_0}$, $\hat{\gamma}_0$ étant l'estimateur de Fama-Roll. Pour cette nouvelle variable, on commence par estimer μ' de la manière suivante :

Comme on fait l'hypothèse que $\beta = 0$, on a

$$\Psi(t) = e^{i\mu't - |\gamma't|^\alpha}$$

Soit

$$\begin{cases} \text{Re } \Psi(t) = \cos(\mu't) e^{-|\gamma't|^\alpha} \\ \text{Im } \Psi(t) = \sin(\mu't) e^{-|\gamma't|^\alpha} \end{cases}$$

D'où un estimateur de μ' sera donc :

$$\hat{\mu}' = \frac{1}{t} \arctan \frac{\text{Im } \hat{\Psi}(t)}{\text{Re } \hat{\Psi}(t)}$$

Une fois la réduction effectuée, il s'agit de centrer la variable S' . Au moyen de l'estimateur $\hat{\mu}'$ on construit alors une nouvelle variable $S'' = S' - \hat{\mu}' = \frac{S}{\hat{\gamma}_0} - \hat{\mu}'$ dont les paramètres sont $\alpha, 0, \frac{\gamma}{\hat{\gamma}_0}$ et $\frac{\mu}{\hat{\gamma}_0} - \hat{\mu}'$. Puisque $\hat{\mu}'$ est un estimateur de $\frac{\mu}{\hat{\gamma}_0}$, on suppose que $\frac{\mu}{\hat{\gamma}_0} - \hat{\mu}'$ est suffisamment proche de zéro ; autrement dit les paramètres de S'' sont $\alpha, 0, \gamma'' = \frac{\gamma}{\hat{\gamma}_0}$ et 0. Sous ces hypothèses, on a :

$$\Psi(t) = e^{-|\gamma't|^\alpha} \quad (20)$$

Ou encore

$$\log \Psi(t) = -|\gamma't|^\alpha \quad (21)$$

Il reste alors à régresser $\log(-\Psi(t))$ sur $\log|t|$ pour obtenir $\hat{\alpha}$ et $\hat{\gamma}'$. En définitive, les estimateurs des trois paramètres proposés par Arad, dans le cas où $\beta = 0$, sont les suivants :

$$\begin{cases} \hat{\alpha} \text{ obtenu par (21)} \\ \hat{\gamma} = \gamma \hat{\gamma}_0 \\ \hat{\mu}' = \mu \hat{\gamma}_0 \end{cases}$$

Pour le choix de t , on procède de manière empirique, c'est-à-dire à partir de simulations effectuées sur des variables aléatoires stables de paramètres connus, la séquence de six points suivante : $t_k = k \cdot t_1$, ($k = 1, \dots, 6$) et $t_1 = 0.1141$, semble bien adaptée pour l'estimation des paramètres de v.a. centrées et réduites. On choisit donc ces 6 points pour le calcul des estimations

recherchées. Un inconvénient de cette méthode est de supposer que $\beta = 0$. On retrouve une limite d'utilisation de la méthode de Fama et Roll. De plus, l'hypothèse selon laquelle $\frac{\mu}{\gamma_0} - \hat{\mu}'$ est suffisamment proche de zéro peut ne pas être vérifiée, auquel cas la variable S'' n'a pas été correctement centrée, ce qui rend l'estimation de Ψ par γ incertaine. Par ailleurs, on suppose que la variable S a été suffisamment bien réduite, ce qui n'est pas nécessairement réalisé dans la pratique. Ces deux incertitudes diminuent la fiabilité des résultats de cette méthode. Elle est améliorée et généralisée avec Koutrouvelis.

3.2.3.1.3 Méthode de Koutrouvelis

Cette méthode est une généralisation d'une idée introduite par Arad : il est proposé, en effet, de centrer et réduire les données, non plus une seule fois, comme dans la méthode précédente, mais en procédant par itération successives avec standardisation et estimation à chaque pas. On remarque que les suites des estimateurs obtenues convergent. Ce sont ces limites que l'on prend pour estimations. La démarche est peu différente de celle de Press. Partant de la fonction caractéristique :

$$\Psi_x(t) = E(e^{itX}) = e^{it\mu - \gamma^\alpha |t|^\alpha (1 - i\beta \text{sign}(t) W(\alpha, t))}$$

On déduit

$$|\Psi(t)|^2 = e^{-2|\gamma t|^\alpha}$$

Ce qui conduit à

$$\log |\Psi(t)|^2 = -2|\gamma t|^\alpha$$

Et ensuite à

$$\log(-\log |\Psi(t)|^2) = \log 2\gamma^\alpha + \log t^\alpha$$

$\hat{\alpha}$ et $\hat{\gamma}$ sont donc obtenus comme précédemment en régressant $\log(-\log |\Psi(t)|^2)$ sur $\log |t|$ pour t choisi convenablement.

D'autre part, quand α est différent de 1 :

$$\begin{cases} \text{Re } \Psi(t) = \cos\left(\mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{|t|}{t} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) e^{-|\gamma t|^\alpha} \\ \text{Im } \Psi(t) = \sin\left(\mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{|t|}{t} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right) e^{-|\gamma t|^\alpha} \end{cases}$$

D'où

$$\arctan \frac{\text{Im } \Psi(t)}{\text{Re } \Psi(t)} = \mu t - \gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{|t|}{t} \tan \frac{\pi\alpha}{2} \quad \text{à } k\pi \text{ près}$$

$\hat{\beta}$ et $\hat{\mu}$ peuvent donc être obtenus en régressant $\arctan \frac{\text{Im } \Psi(t)}{\text{Re } \Psi(t)}$ sur t et $\left(-\gamma^\alpha |t|^\alpha \beta \frac{|t|}{t} \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right)$. Il s'agit là d'une régression multiple où β et μ sont calculés par :

$$\begin{bmatrix} \beta \\ \mu \end{bmatrix} = [(X'X)^{-1} X'Y']$$

Où X est la matrice contenant les valeurs des n observations des deux variables explicatives et Y est le vecteur des réalisations de la variable à expliquer (X' est la matrice transposée de X).

Chaque étape se déroule de la façon suivante : au départ de la p -ième itération, on a estimé $\hat{\alpha}^{p-1}, \hat{\beta}^{p-1}, \hat{\gamma}^{p-1}, \hat{\mu}^{p-1}$, paramètres de la série de départ S^0 et on a standardisé S^0 $(p - 1)$ fois pour obtenir la nouvelle série S^{p-1} .

On estime les paramètres $\hat{\alpha}^{p-1}$ et $\hat{\gamma}^{p-1}$ de S^{p-1} par la méthode exposée plus haut, et on remplace S^{p-1} par $\frac{S^{p-1}}{\hat{\gamma}^{p-1}}$.

On estime $\hat{\beta}^{p-1}$ et $\hat{\mu}^{p-1}$ sur cette nouvelle série et on obtient S^{p-1} par :

$$S^{p-1} = \frac{S^{p-1}}{\hat{\gamma}^{p-1}} - \hat{\mu}^{p-1}$$

S^{p-1} est la série standardisé qui est alors utilisable pour la $(p + 1)$ ième itération. Les nouveaux estimateurs à la fin de cette p -ième étape sont :

$$\begin{cases} \hat{\alpha}^p = \hat{\alpha}_{p-1} \\ \hat{\beta}^p = \hat{\beta}_{p-1} \\ \hat{\gamma}^p = \hat{\gamma}_{p-1} \cdot \hat{\gamma}^{p-1} \\ \hat{\mu}^p = \hat{\mu}^{p-1} + \hat{\gamma}_{p-1} \cdot \hat{\gamma}^{p-1} \cdot \hat{\mu}_{p-1} \end{cases}$$

Les estimateurs de Koutrouvelis sont donc :

$$\left\{ \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{\alpha}^p, \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{\beta}^p, \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{\gamma}^p, \lim_{p \rightarrow \infty} \hat{\mu}^p \right\}$$

Les choix des points t_k et u_l nécessaires aux deux régressions est fait en s'appuyant sur des simulations portant sur des séries de paramètres connus. Koutrouvelis remarque qu'un bon choix est :

$$\begin{cases} t_k = \frac{\pi k}{25} & \text{avec } k = 1, \dots, K \\ u_l = \frac{\pi l}{50} & \text{avec } l = 1, \dots, L \end{cases}$$

Les nombres K et L optimaux étant donnés en fonction de α , à partir des simulations effectuées.

En résumé, malgré son apparence peu maniable, nous pouvons dire qu'il s'agit d'une bonne méthode d'estimation. En effet, elle ne suppose pas d'hypothèse restrictive et reste cependant assez simple d'utilisation, tout en étant relativement peu coûteuse en temps de calcul. De plus, les estimations obtenues peuvent être qualifiés de très convenables. Cette méthode semble pouvoir être employée avec confiance.

3.2.3.2 Méthode de Paulson-Holcomb-Leitch

Le principe de cette méthode est différent de toutes les autres méthodes qu'on a pu voir à présent, le seul point commun étant l'utilisation de la fonction caractéristique. L'idée de la méthode consiste à minimiser l'écart entre la fonction caractéristique théorique et empirique. Le problème majeur est de choisir la norme pour effectuer la minimisation suivante :

$$\min_{\alpha, \beta, \gamma, \mu} \|\hat{\Psi} - \Psi\|$$

Paulson-Holcomb-Leitch propose de choisir comme norme :

$$\|\hat{\Psi} - \Psi\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Psi}(t) - \Psi(t)|^2 e^{-t^2} dt$$

Si, comme nous venons de le voir, le principe est relativement simple, son application pratique pose deux problèmes qu'il faut résoudre :

- d'une part, le calcul de l'intégrale ;
- d'autre part, la méthode à retenir pour l'optimisation, car il s'agit d'un critère non linéaire.

En ce qui concerne le calcul de l'intégrale, le domaine d'intégration étant non borné, on ne peut pas employer les méthodes habituelles telles que la formule des trapèzes par exemple. C'est pourquoi la méthode préconise l'emploi d'une quadrature de Hermite à 20 points.

Pour la résolution du problème d'optimisation, on recherche le minimum d'une fonction $F(\vec{u})$, avec \vec{u} un vecteur de dimension 4. Comme $F(\vec{u})$ n'a pas d'expression simple, on utilise une méthode de gradient, qui génère une suite (u_n) de vecteur de paramètres.

Le critère classique d'arrêt est :

$$\|\vec{u}_n - \vec{u}_{n-1}\| < \varepsilon$$

Pour ε donné.

A chaque itération, nous devons standardiser S^i avec les estimations de γ et μ . La nouvelle série est donc donnée par :

$$S^i = \frac{S^{i-1} - \hat{\mu}_{i-1}}{\hat{\gamma}_{i-1}}$$

C'est avec cette nouvelle série de paramètres, c'est-à-dire le nouveau vecteur \vec{u}_i , que l'on calcule \vec{u}_{i+1} .

En conclusion, les estimateurs proposés donnent d'excellents résultats. Deux remarques peuvent être faites sur cette méthode, d'ordres théorique et pratique :

-d'un point de vue théorique, on peut noter que d'autres fonctions du type

$$\|\hat{\Psi} - \Psi\| = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\Psi}(t) - \Psi(t)|^n \omega(t) dt$$

Pourraient convenir pour le choix de la norme $F(u)$. Le choix de $n=2$ et $\omega(t)=e^{-t^2}$ présente l'avantage d'assurer la convergence de l'intégrale, mais il est possible que valeurs de n et d'autres fonctions $\omega(t)$ donnent de meilleurs résultats :

- d'un point de vue pratique, l'algorithme utilisé nécessite un temps de calcul assez important.

3.2.4 Tests des méthodes

Afin de choisir la méthode d'estimation que nous utiliserons pour analyser les marchés financiers, nous effectuons un test comparatif des techniques suivantes : méthodes de Koutrouvelis et de McCulloch.

Le principe de vérification est le suivant : on synthétise, au moyen du générateur de Chambers-Mallows-Stuck des séries de 500, 5000 et 10000 tirages réparties selon une loi stable de paramètres fixés comme suit.

- α prend les valeurs 1.1, 1.4 et 2,

- β prend les valeurs -1, -0.6, 0, 0.6 et 1,

On estime les paramètres avec les deux méthodes citées, en les comparant aux valeurs théoriques. Les résultats sont présentés dans les tableaux ci-après. Selon les résultats obtenus, la méthode de Koutrouvelis semble être la meilleure puisqu'elle allie rapidité et précision des calculs des estimations. Cette méthode sera retenue pour l'analyse des cours financiers.

Méthode de McCulloch n=500

α/β	-1	-0.6	0	0.6	1
1.1	$\alpha = 1.0387$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.1803$ $\beta = -0.9175$	$\alpha = 1.0871$ $\beta = 0.0129$	$\alpha = 1.0332$ $\beta = 0.7560$	$\alpha = 1.3028$ $\beta = 1$
1.4	$\alpha = 1.4474$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.4433$ $\beta = -0.7230$	$\alpha = 1.4062$ $\beta = -0.0073$	$\alpha = 1.4268$ $\beta = 0.5424$	$\alpha = 1.3972$ $\beta = 0.9215$
2.0	$\alpha = 2$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.9718$ $\beta = -0.5928$	$\alpha = 1.9828$ $\beta = 0.0304$	$\alpha = 1.9706$ $\beta = 0.7293$	$\alpha = 1.9857$ $\beta = 1$

Méthode de Koutrouvelis n=500

α/β	-1	-0.6	0	0.6	1
1.1	$\alpha = 1.1252$ $\beta = -0.9375$	$\alpha = 1.0785$ $\beta = -0.6061$	$\alpha = 1.1353$ $\beta = -0.0406$	$\alpha = 1.1531$ $\beta = 0.5367$	$\alpha = 1.1089$ $\beta = 0.9493$
1.4	$\alpha = 1.3794$ $\beta = -0.8973$	$\alpha = 1.3978$ $\beta = -0.5481$	$\alpha = 1.4480$ $\beta = -0.0108$	$\alpha = 1.3810$ $\beta = 0.6049$	$\alpha = 1.4110$ $\beta = 0.9700$
2.0	$\alpha = 2$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.9862$ $\beta = -0.5885$	$\alpha = 2$ $\beta = -0.0788$	$\alpha = 2$ $\beta = 0.4408$	$\alpha = 2$ $\beta = 1$

Méthode de McCulloch n=5000

α/β	-1	-0.6	0	0.6	1
1.1	$\alpha = 1.0732$ $\beta = -0.9952$	$\alpha = 1.1362$ $\beta = -0.6300$	$\alpha = 1.0986$ $\beta = 0.0014$	$\alpha = 1.0773$ $\beta = 0.5983$	$\alpha = 1.0944$ $\beta = 0.9262$
1.4	$\alpha = 1.4009$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.4004$ $\beta = -0.6615$	$\alpha = 1.4034$ $\beta = 0.0153$	$\alpha = 1.3816$ $\beta = 0.6981$	$\alpha = 1.3944$ $\beta = 1$
2.0	$\alpha = 2$ $\beta = -1$	$\alpha = 2$ $\beta = -0.4795$	$\alpha = 2$ $\beta = -0.0864$	$\alpha = 2$ $\beta = 0.5715$	$\alpha = 1.9634$ $\beta = 1$

Méthode de Koutouvelis n=5000

α/β	-1	-0.6	0	0.6	1
1.1	$\alpha = 1.1068$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.1184$ $\beta = -0.5864$	$\alpha = 1.1108$ $\beta = 0.0710$	$\alpha = 1.1127$ $\beta = 0.5861$	$\alpha = 1.1111$ $\beta = 1$
1.4	$\alpha = 1.4071$ $\beta = -0.9797$	$\alpha = 1.3814$ $\beta = -0.5364$	$\alpha = 1.4207$ $\beta = 0.0046$	$\alpha = 1.4248$ $\beta = 0.6362$	$\alpha = 1.4248$ $\beta = 1$
2.0	$\alpha = 2$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.9718$ $\beta = -0.5928$	$\alpha = 1.9828$ $\beta = 0.0304$	$\alpha = 1.9706$ $\beta = 0.7293$	$\alpha = 1.9857$ $\beta = 1$

Méthode de McCulloch n=10000

α/β	-1	-0.6	0	0.6	1
1.1	$\alpha = 1.1039$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.1208$ $\beta = -0.6470$	$\alpha = 1.1110$ $\beta = -0.0260$	$\alpha = 1.0928$ $\beta = 0.6636$	$\alpha = 1.1104$ $\beta = 1$
1.4	$\alpha = 1.4072$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.4009$ $\beta = -0.6583$	$\alpha = 1.3917$ $\beta = 0.0057$	$\alpha = 1.4047$ $\beta = 0.6414$	$\alpha = 1.3946$ $\beta = 1$
2.0	$\alpha = 2$ $\beta = -1$	$\alpha = 2$ $\beta = -0.4982$	$\alpha = 2$ $\beta = 0.0084$	$\alpha = 1.9925$ $\beta = 0.6581$	$\alpha = 2$ $\beta = 1$

Méthode de Koutouvelis n=10000

α/β	-1	-0.6	0	0.6	1
1.1	$\alpha = 1.0980$ $\beta = -1$	$\alpha = 1.0919$ $\beta = -0.6606$	$\alpha = 1.1205$ $\beta = -0.0045$	$\alpha = 1.0883$ $\beta = 0.6635$	$\alpha = 1.1170$ $\beta = 1$
1.4	$\alpha = 1.3929$ $\beta = -0.9797$	$\alpha = 1.4065$ $\beta = -0.6693$	$\alpha = 1.4057$ $\beta = -0.0058$	$\alpha = 1.3954$ $\beta = 0.6365$	$\alpha = 1.3912$ $\beta = 1$
2.0	$\alpha = 2$ $\beta = -1$	$\alpha = 2$ $\beta = -0.6981$	$\alpha = 2$ $\beta = 0.0054$	$\alpha = 1.9938$ $\beta = 0.5923$	$\alpha = 2$ $\beta = 1$

4 Description analytique des fluctuations boursières

4.1 Travaux sur testant l'hypothèse des lois α -stables

Les travaux portant sur la vérification de l'hypothèse d' α -stabilité sur les marchés sont très nombreux : la recherche de lois d'échelle sur les variations boursières est un thème récurrent de la recherche financière depuis les premiers travaux de Mandelbrot. Nous essayerons dans la suite d'indiquer les grandes lignes.

4.1.1 Recherche d'invariance par changement d'échelle

La première mise en évidence de la relation entre une queue de distribution épaisse et le principe d'invariance par changement d'échelle est due à Mandelbrot. Cette première observation est importante, tant d'un point de vue méthodologique que par ses implications conceptuelles, car elle met en œuvre la recherche d'une loi d'échelle sur un marché.

Mandelbrot examina le comportement du marché du coton de 1880 à 1958, il observa que les variations des différences premières des logarithmes des prix de clôture $\Delta r_{t,\tau} = \ln S_t - \ln S_{t-\tau}$ où τ est une période donné, sont ajustables dans leur queue de distribution par des lois de Pareto :

$$\ln[Fr(\Delta r_{t,\tau} > u)] \approx -\alpha \ln u + \ln C'(t)$$

$$\ln[Fr(\Delta r_{t,\tau} < -u)] \approx -\alpha \ln u + \ln C''(t)$$

Avec Fr =fréquence relative, u grand, et α voisin de 1.7.

Pour vérifier la stabilité au sens de Lévy, il faut considérer les variations sur différentes périodes de temps. Le calcul montre que, en coordonnées bi-logarithmiques, les droites approchant au mieux les queues de distributions pour un τ = un mois et τ = un jour sont parallèles de pente 1.7. C'est ce parallélisme qui est déterminant : il nous indique que la loi de distribution est stable par changement d'échelle. La valeur de notre α nous révèle que la variance est infinie et la moyenne finie.

De manière générale, tous les travaux sur ce sujet vont pouvoir mettre en évidence des bons ajustements des distributions empiriques observées par des distributions α -stables, et le débat portera non sur la capacité à ajuster les distributions réelles mais sur le caractère fractal, c'est-à-dire, sur les propriétés scalantes (invariance de α en fonction du pas de temps et la forme de la loi de dilatation du paramètre d'échelle γ en fonction de ce même pas de temps).

En effet, avec une modélisation correspondant à l'équation $S(t) = S(0)e^{\mu t + \gamma L_\alpha(t)}$, on doit passer de la distribution des rentabilités à l'échelle τ à celle des rentabilités à l'échelle $T = n\tau$ en vérifiant les relations suivantes sur les paramètres caractéristiques des distributions α -stables

$$\alpha(T) = \alpha(n\tau) = \alpha(\tau) = \alpha, \quad \forall n$$

Et

$$\gamma(T) = \gamma(n\tau) = n^{1/\alpha} \gamma(\tau), \quad \forall n$$

Or, assez rapidement, il est apparu dans les estimations une croissance de l'exposant caractéristique vers sa valeur gaussienne 2, lorsque le pas de temps d'observation n augmentait. Cette croissance sembla contredire l'hypothèse de stabilité et lança le débat sur la validité de l'hypothèse fractale. En effet, elle constitue ce qui est appelé une anomalie scalante.

4.1.2 Controverses sur l'hypothèse fractale

Cette anomalie est relevée par plusieurs chercheurs comme par exemple Fielitz et Smith, Barnea et Downes, Wasserfallen et Zimmermann, etc.

Toutes ces observations semblent donc conduire à un rejet prématuré de notre modèle, même si cette anomalie est aussi présente dans le modèle gaussien, qui d'ailleurs n'empêche pas une utilisation massive dans le domaine de l'ingénierie financière. Mandelbrot avait mis en évidence dans ces recherches l'anomalie scalante lorsqu'il était sur de très longues données et proposa qu'au lieu de chercher une invariance globale, on pouvait obtenir des invariances d'échelles partielles sur des bandes de fréquence (« scaling range »).

Dans la prochaine partie, nous essayerons de donner des exemples de scaling range.

4.2 Nouveaux tests d'ajustement à une loi α -stable

Pour illustrer la partie précédente, et donner un exemple de validation de nos lois, ainsi que de la manière de procéder lors de la mise en place d'un test de stabilité sur un marché réel, nous effectuons à présent des tests d'ajustement de séries boursières par des lois α -stables. Deux types de tests sont effectués.

- Des tests sur des séries avec des données en basse fréquence (mensuelle). Le but de ces tests est de vérifier que, la normalité étant rejetée, l'ajustement par une loi α -stable non normale est possible et efficace. On teste l'hypothèse sur quelques séries, qui décrivent le comportement de la plupart des marchés mondiaux pour pouvoir vérifier l'adéquation de la distribution empirique avec une loi α -stable.
- Des tests sur la validité de la stabilité lorsque le pas de temps se modifie. Il s'agit de déterminer la validité de l'hypothèse fractale en obtenant la bande de fréquence qui vérifie la propriété d'invariance statistique des distributions stables. On considérera le CAC 40 comme donnée.

4.2.1 Test d'ajustement simple à une distribution α -stable

4.2.1.1 Présentation des données

Nous utilisons quatre groupes principaux de données. Les indices boursiers choisis pour représenter l'évolution temporelle des marchés sont les indices retenus comme représentatifs et pertinents par l'ensemble de la communauté financière. Ces indices sont : soit des indices

nationaux ; soit des indices calculés par des institutions internationales comme par exemple : MSCI (Morgan Stanley Capital Index), SBGB (Salomon Brothers Government Bond).

La première catégorie de données, la plus importante, est constituée par 17 séries chronologiques d'indices boursiers sur les marchés d'actions. Cette catégorie comprend les indices suivants en fréquences mensuelle :

- Pour l'Allemagne :
 - DAX, de Janvier 1970 à Septembre 1993
- Pour les Etats-Unis :
 - DJIA, de Janvier 1964 à Février 1991
 - SP 500, de Janvier 1926 à Septembre 1991
- Pour l'Autriche :
 - MCSI Autria, de Décembre 1980 à Septembre 1993
- Pour la Belgique :
 - Belgium général, de Janvier 1980 à Septembre 1993
- Pour le Canada :
 - Toronto SExComp, de Janvier 1973 à Septembre 1993
- Pour l'Espagne :
 - Madrid SEx, de Janvier 1980 à Septembre 1993
- Pour le Danemark :
 - Cop SEx, de Décembre 1980 à Septembre 1993
- Pour la France :
 - CAC, de Septembre 1987 à Septembre 1993
- Pour la Hollande :
 - CBS All Shares, de Janvier 1975 à Septembre 1993
- Pour la Suisse :
 - MSCI Switz Net, d'Août 1988 à Septembre 1993
- Pour L'Italie :
 - IBCA, de Janvier 1970 à Septembre 1993
- Pour le Royaume-Uni :
 - FTIO, de Décembre 1972 à Septembre 1991
- Pour l'europe :
 - MCSI Europe Net, de Janvier 1980 à Septembre 1993
- Pour le Japon :
 - NIKKEI 225, de Janvier 1980 à Septembre 1993
- Pour Hong Kong :
 - HK Hang Seng, de Janvier 1980 à Septembre 1993
- Pour l'indice mondial :
 - MCSI World, de Janvier 1980 à Septembre 1993

La seconde catégorie de données comprend 1 série de taux de change, celle de l'USD/JPY, de Février 1970 à Février 1991, en série mensuelle.

La troisième catégorie est constituée de 2 séries composées de cours à termes de matières premières :

- L'once d'or, de Février 1969 à Février 1991
- Brent, de Janvier 1984 à Septembre 1993

La quatrième catégorie décrit le comportement des marchés de taux d'intérêt à court terme composé de 3 séries :

- PIBOR 3 mois, taux interbancaire à trois mois, de Décembre 1978 à Mars 1991
- Taux allemand à 1 mois, d'Août 1964 à Septembre 1993
- LIBOR 3 mois, de janvier 1978 à Septembre 1993

La période de temps retenue incorpore des événements aussi divers que le Krach de 1987, la réunification allemande de Février 1990, la crise du Golfe d'Août 1990 et la guerre du Golfe de Février 1991.

4.2.1.2 Le test de Kolmogorov pour les lois α -stables

Le principe bien connu du test de Kolmogorov repose sur le calcul d'une distance, permettant de partitionner l'espace des réponses en deux régions, de part et d'autre d'une valeur critique. La difficulté de la mise en place du test résulte de la non connaissance de la fonction de répartition (forme analytique explicite).

Pour chaque série étudiée, nous procéderons de cette sorte :

- Calcul des rentabilités mensuelles
- Estimation des paramètres par la méthode de Koutrouvélis
- Calcul numérique de la fonction de répartition avec les paramètres calculés précédemment
- Calcul de la statistique de Kolmogorov
- Positionnement des valeurs trouvées par rapport à la région critique
- Résultat du test

4.2.1.3 Résultats des tests d'ajustement

Vue d'ensemble

Les résultats des estimations sont donnés dans le tableau suivant. Pour chaque estimation, on a présenté les valeurs des seuils à 1% et 5%. Ces valeurs dépendent de la taille de l'échantillon.

Les résultats de test confirment les travaux réalisés sur le marché : 22 ajustements sur 23 sont acceptés pour un seuil de 1% et 21 sur 23 pour un seuil de 5%. Les variations mensuelles de presque tous les indices boursiers sont donc modélisations par des lois α -stables.

Analyse des paramètres

- Valeurs de l'exposant caractéristique α
 - Sur toutes les séries examinées, les valeurs de l'exposant caractéristique sont comprises entre 1 et 2, donc l'espérance mathématique existe. En général, on constate que α est voisin de 1.7 en moyenne sur le marché des actions. Les marchés de matières premières et monétaires ont une valeur proche de 1.6 qui traduit une plus forte volatilité que les marchés d'actions, alors que le marché obligataire quant

à lui est proche de 1.9-2, il traduit un comportement se rapprochant du comportement gaussien.

➤ Valeurs de l'exposant d'échelle γ

- La valeur moyenne de γ est voisine de 2.7. Sur les marchés d'actions, on trouve un chiffre voisinant 3.4 ; sur les marchés matières premières et monétaires on trouve plutôt 4.9 ; les marchés taux d'intérêt court sont à 0.65 et pour le long terme à 1.58. La dispersion des fluctuations n'est pas la même selon le type de marché. Cette échelle peut venir compenser, ou, au contraire, amplifier, l'irrégularité des fluctuations.

➤ Valeurs du paramètre de localisation μ

- Comme les valeurs de α sont supérieures à 1, l'espérance existe. Un estimateur de μ sera donc l'estimateur classique de l'espérance mathématique. Les valeurs données dans les tableaux de résultats, expriment la rentabilité mensuelle moyenne de chaque marché, en %.

Indice	Taille	α	γ	μ	Seuil 5%	Seuil 1%	Kn	Resultat 5%	Resultat 1%
DAX	249	1.75	3.01	0.51	0.086	0.103	0.036	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
DJIA	326	1.83	2.73	0.77	0.075	0.091	0.037	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
SP500	782	1.66	2.80	0.81	0.052	0.060	0.045	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
MSCI austria	165	1.3	2.65	0.86	0.104	0.129	0.102	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Belgium	104	1.55	2.72	1.09	0.134	0.160	0.054	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Toronto	249	1.81	2.87	0.63	0.871	0.103	0.029	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Madrid SEx	164	1.65	3.58	0.65	0.105	0.127	0.030	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Cop SEx	154	1.75	3.01	0.1	0.111	0.131	0.52	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
MSCI europe	165	1.7	3	1.1	0.106	0.127	0.053	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
CAC 40	48	1.75	4.42	0.6	0.196	0.235	0.072	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
CBS all Shares	249	1.77	2.80	0.54	0.086	0.104	0.045	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
NIKKEI 225	164	1.63	3	0.67	0.105	0.127	0.060	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
HK Hang Seng	224	1.8	5.11	1.6	0.101	0.109	0.053	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
IBCA	224	1.91	4.66	0.8	0.100	0.108	0.027	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
MSCI world	165	1.8	2.73	1.10	0.106	0.127	0.05	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
MSCI Switz	165	1.77	2.74	0.87	0.096	0.125	0.06	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
FTIO	248	1.73	4	1.10	0.088	0.103	0.04	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Once d'or	266	1.58	3.37	0.81	0.085	0.109	0.06	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Brent	108	1.44	5.07	-0.5	0.130	0.156	0.042	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
Gerfest1M	249	1.88	0.14	0.50	0.086	0.103	0.102	REJETÉ	ACCEPTÉ
PIBOR 3M	147	1.5	0.30	0.02	0.113	0.134	0.092	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
LIBOR 3M	188	1.61	4.01	0.52	0.098	0.119	0.052	ACCEPTÉ	ACCEPTÉ
USD/JPY	254	1.61	1.53	-0.51	0.085	0.103	0.113	REJETÉ	REJETÉ

4.2.2 Tests de la fractalité des marchés

4.2.2.1 Méthodologie

L'approche fractale de l'analyse des marchés consiste à étudier les variations des cours à des échelles différentes avec des degrés de résolutions différents et à comparer les résultats dans le but de détecter une autosimilarité. On examine pour cela si les paramètres caractéristiques des

distributions ont un comportement scalant, c'est-à-dire que l'on recherche une loi de dilatation des paramètres en fonction de l'échelle de temps.

Si l'on fait l'hypothèse que la nature fractale du marché prend la forme d'une distribution α -stable, alors toutes les fonctions de distributions des variations des prix sont de même type pour toutes les tailles d'intervalles de temps et l'on étudiera, pour vérifier l'hypothèse de stabilité, la variation de l'exposant de stabilité estimé, $\hat{\alpha}$, et celle du paramètre estimé $\hat{\gamma}$ par rapport à la longueur de l'intervalle de temps des observations.

Les études empiriques qui suivent montrent que les propriétés statistiques de variations des prix sont les mêmes à chaque échelle, si l'on tient compte d'un facteur de renormalisation qui est une fonction de puissance de l'unité de mesure de temps.

Deux types de tests de fractalité sont effectués :

- Des tests avec la série globale, considérée selon différents pas de temps, en fonction de l'écartement des observations. Les échantillons sont alors de taille variable, le nombre d'observations diminuant avec l'accroissement du pas de temps. On est alors confronté au problème de la taille de l'échantillon.
- Des tests avec des sous-échantillons de tailles constantes, en faisant glisser les sous-échantillons le long de la série globale, avec un pas de temps fixé (taille de la fenêtre). Ce type de test permet de ne pas subir l'inconvénient de la taille décroissante, mais est beaucoup plus couteux en temps de calcul.

4.2.2.2 Tests sur le CAC 40

4.2.2.2.1 Tests de stabilité sur des échantillons de taille décroissante

On définit la rentabilité périodique par :

$$\Delta r_{p,t,i}^j = \left(\ln S_{ip+t}^j - \ln S_{(i-1)p+t}^j \right) * 100$$

Avec :

- p : pas de temps de 1 à 10 jours ;

- t : premier cours observé des séries, $t = 1, \dots, p$;

- i : indice des observations $i = 1, \dots, 2060$;

- S_{ip+t}^j : cours du titre j à la date $ip + t$;

- $\Delta r_{p,t,i}^j$: taux de rentabilité de titre j sur une période considérée.

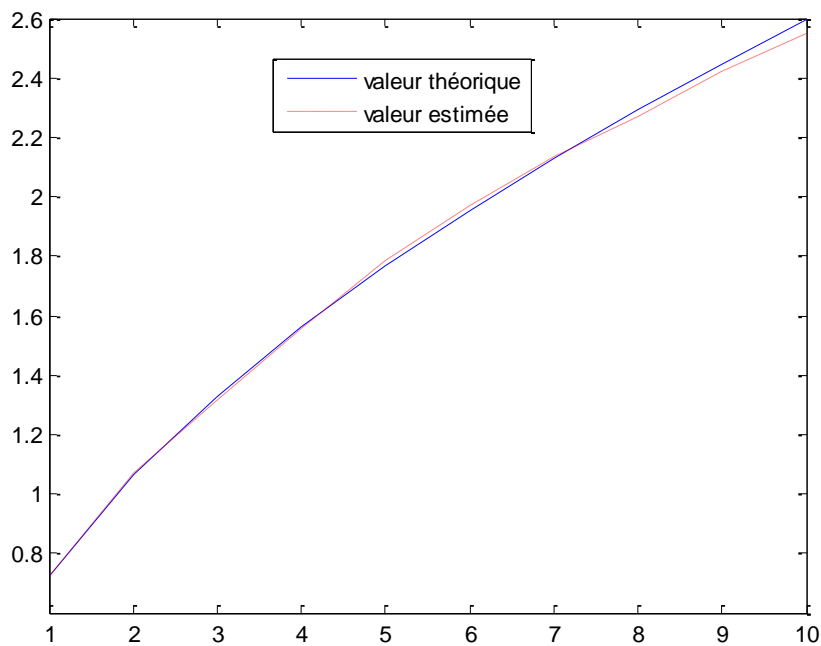
Il y a alors p séries pour chaque intervalle p . l'augmentation du pas de temps entraîne la réduction de la taille de l'échantillon. Dans le but d'avoir une taille d'échantillon significative, nous sommes conduits à fixer un pas de temps maximal à 10 jours. L'analyse des résultats des valeurs estimées des paramètres montre que l'exposant caractéristique α reste approximativement constant et que le paramètre d'échelle γ suit une loi d'échelle.

Le tableau suivant montre l'estimation du paramètre α pour différente action et indice. Notre paramètre varie entre 1.65 et 1.85 et en moyenne il est égale à 1.7.

Fréquence(j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille	2059	1029	686	514	411	343	294	257	228	205
ACCOR	1.67	1.70	1.69	1.71	1.74	1.68	1.77	1.77	1.73	1.74
THOMSON	1.70	1.72	1.76	1.80	1.80	1.79	1.82	1.80	1.78	1.74
MICHELIN	1.71	1.68	1.69	1.70	1.69	1.77	1.74	1.77	1.78	1.77
CARREFOUR	1.71	1.80	1.83	1.83	1.84	1.80	1.79	1.85	1.80	1.82
CAC	1.75	1.77	1.76	1.81	1.81	1.78	1.80	1.83	1.76	1.73

Valeurs estimées de γ pour des échantillons définis par rapport à différents tailles d'intervalles temps.

Fréquence(j)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taille	2059	1029	686	514	411	343	294	257	228	205
ACCOR	0.91	1.39	1.75	2.10	2.39	2.68	2.90	3.17	3.38	3.61
THOMSON	1.25	1.88	2.36	2.80	3.22	3.59	3.92	4.25	4.56	4.84
MICHELIN	1.22	1.83	2.30	2.70	3.10	3.45	3.74	4.08	4.38	4.67
CARREFOUR	0.89	1.31	1.67	1.97	2.26	2.49	2.74	2.93	3.18	3.36
CAC	0.68	1.02	1.26	1.51	1.71	1.90	2.08	2.23	2.40	2.53



Evolution du paramètre d'échelle du CAC 40 selon une loi de puissance

Le tableau de donnée sur le paramètre γ et la figure ci-dessus mettent en évidence une loi d'échelle empirique d'exposant $\frac{1}{\alpha}$ et γ . Si le premier γ calculé sur tout l'échantillon (γ_1) est le paramètre d'échelle standard correspondant à une unité de temps, alors le paramètre d'échelle standard au bout de t unités de temps vérifie approximativement la loi théorique suivante :

$$\gamma_t = \gamma_1 t^{\frac{1}{\alpha}} \quad (22)$$

On peut donc déduire de ces résultats que l'augmentation de l'intervalle temps des observations, de 1 à 10 jours, ne change pas l'apparence du comportement du marché, et que, par conséquent, il existe une fractalité qui est validée sur cette bande de fréquence (scaling range).

4.2.2.2.2 Tests avec un échantillon de taille constante

La méthode précédente induit une erreur d'échantillonnage qui est due à la taille variable de l'échantillon. D'où un deuxième type de test, qui utilise des échantillons de taille fixe. Le test consiste à partir d'un sous-échantillon de taille constante de l'échantillon initial de base, plusieurs séries définies par rapport à différentes unités de mesure de temps et à estimer les paramètres sur chaque série. Le nombre des séries construites croît lorsque la taille de l'échantillon décroît. Soit N la taille de l'échantillon de base, n la taille des sous échantillons considérés et p le pas de temps. Le nombre total des séries construites avec un pas de temps p est $N - np$. En faisant varier p entre 1 et $p^* = \left\lfloor \frac{N}{n} \right\rfloor$, nous construisons $p^*N - n \frac{p^*(p^*+1)}{2}$ séries.

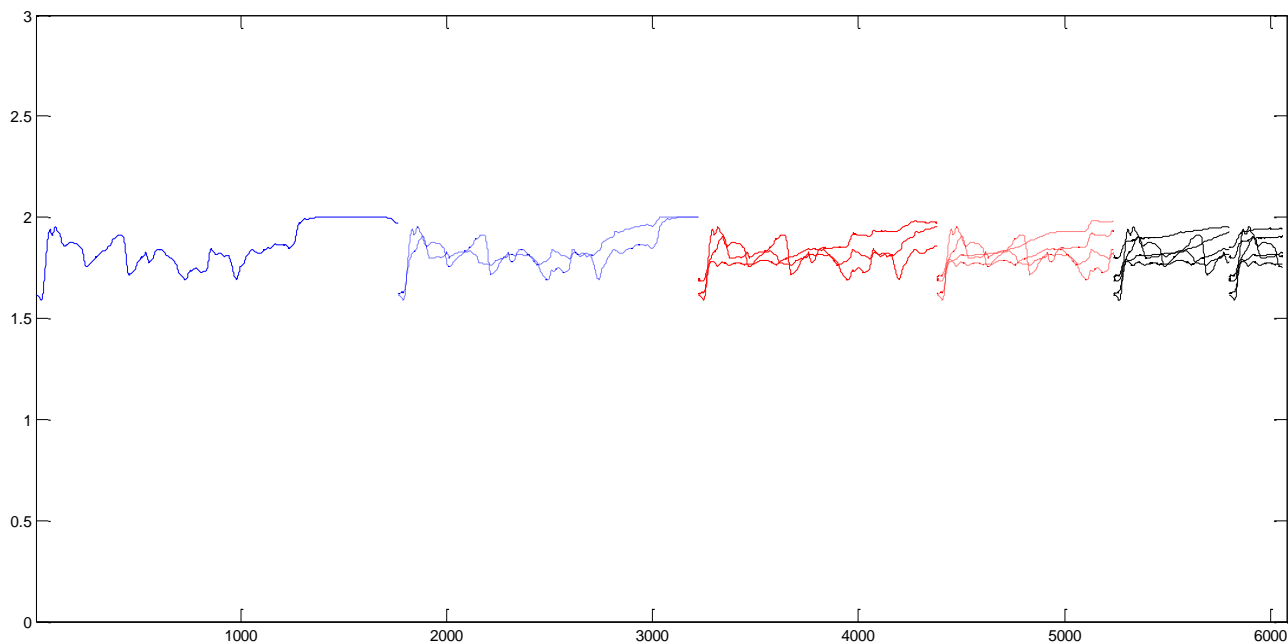
Donc, nous construisons les séries suivantes :

$$\Delta r_{p,t,i}^j = \left(\log S_{ip+t}^j - \log S_{(i-1)p+t}^j \right) * 100$$

Avec :

- p : pas de temps de 1 à p^* jours ;
- t : premier cours observé des séries, $t = 1, \dots, N - np$;
- i : indice des observations $i = 1, \dots, n$;
- S_{ip+t}^j : cours du titre j à la date $ip + t$;
- $\Delta r_{p,t,i}^j$: taux de rentabilité de titre j sur une période considérée.

Si nous fixons par exemple, $n = 300$, p^* vaudra 6, et nous aurons à estimer α et γ sur 6060 séries des donnée pour chaque action. Ce type de test donne approximativement les mêmes résultats que précédemment : α est compris entre 1.65 et 1.85 et l'évolution de γ suit une loi de puissance. Nous présentons encore une fois les résultats sur notre indice far qui est le CAC 40.



Valeurs estimées moyennes de α pour 6060 séries définies à partir d'un sous échantillon de taille 300 de l'échantillon initial de base par rapport à des intervalles de temps de différentes tailles.
Chaque point représente une estimation de α pour les séries des données du CAC 40

Au vu des résultats des tests que nous avons effectués, on peut considérer qu'une modélisation des variations boursières au moyen des lois **1.7 – stables** avec différentes valeurs de γ , est possible. Comme de nombre travaux ont mis en évidence des estimations de α voisines de 1.7, on pourrait s'interroger sur l'intérêt qu'il y aurait à fixer une constante universelle sur le marchés qui serait $\alpha = 1.7$ dans le cas de modélisations utilisant les lois α -stables.

4.3 Caractérisation du risque d'un marché au moyen du couple (α, γ)

4.3.1 Durée de retour d'un événement rare

Une fois déterminée la rentabilité mensuelle espérée d'un actif financier, la question qui se pose ensuite est celle du niveau de risque correspondant. Si l'on choisit une modélisation avec un processus α -stable non gaussien, le risque d'un actif ne sera pas mesuré par la seule volatilité, mais à travers (α, γ) . Le risque total pour un investisseur résultera :

- du risque classique de dispersion, correspondant à la volatilité usuelle en contexte gaussien, et au paramètre d'échelle γ en contexte non gaussien ;
- du risque de saut, ou de cassure de marché, quantifié par l'exposant caractéristique α .

Pour illustrer l'importance de la prise en compte du couple (α, γ) au lieu du seul écart-type σ , considérons l'exemple du SP 500. Nous avons :

- rentabilité mensuelle moyenne : 0,812%
- rentabilité mensuelle max : 35,46%
- rentabilité mensuelle min : -35,28%
- volatilité mensuelle : 5,82%

Nous voyons que la valeur minimale trouvée sur la période d'observation se situe à environ 6 écart-types de sa valeur moyenne. Calculons la probabilité qu'une baisse mensuelle des cours soit supérieure à 6σ sous l'hypothèse gaussienne :

$$\begin{aligned} P(|baisse| > 6\sigma) &= 1 - P(|baisse| < 6\sigma) \\ &= 1 - 0.999999990134010739 \\ &\approx 10^{-9} \end{aligned}$$

La durée de retour est égale à l'inverse de la probabilité. Un tel événement se produira donc en moyenne tous les 10^9 mois, c'est-à-dire tous 83 millions d'années. Il est clair que ce résultat n'est pas acceptable connaissant les besoins financiers.

Effectuons le calcul avec une loi α -stable. L'estimation des paramètres sur cette série donne :

- $\alpha = 1.66$
- $\gamma = 2.94$

Si X_t suit une loi α -stable de paramètres $S(1.66, 0, 2.94, 0.81)$, alors $\frac{X-0.81}{2.94}$ suit une loi α -stable réduite $S(1.66, 0, 1, 0)$. Nous avons donc :

$$P(X > 35\%) = P\left(\frac{X - 0.81}{2.94} > 11.61\%\right)$$

Où $F_\alpha(11.61)$ représente la valeur de la fonction de répartition de la loi α -stable pour le quantile 11.61. Nous allons faire quelques arrondis pour des questions de simplification et d'esthétique, cela nous donne :

$$F_{1.7}(12) = 0.9980$$

D'où une probabilité :

$$P(|baisse| > 12\%) = 0.0020$$

C'est-à-dire, que cette événement se produira tous les 500 mois, soit environ tous les 42 ans. L'estimation paraît être plus réaliste avec une loi 1.7-stable. Ce résultat montre que l'exposant caractéristique α est très important dans le comportement des risques de marché. Par rapport à la seule mesure de volatilité, le couple (α, γ) permet de caractériser complètement tant la dispersion des rentabilités que le risque de forte perte sur une période donnée. On voit donc l'utilité, à partir de notre exemple, de reconsidérer le risque comme étant un couple de paramètres.

4.3.2 La VAR avec les lois α -stables

4.3.2.1 La VaR et les grandes variations

Rappel de la VaR

Nous partons d'un constat simple qui est que les investisseurs prudents sont plus sensibles à leur perte maximale éventuelle qu'à leur espérance de gain. Cette sensibilité à la perte trouve un écho dans un outil de mesure de risque de plus en plus utilisé par les professionnels du milieu

financier, la « Value-at-Risk », ou perte sur un horizon de temps donnée pour un niveau de probabilité fixé.

Définition

Pour un horizon de temps τ et un niveau de confiance c donnés, la VaR d'un actif financier S , notée VaR_c , est la perte qui est dépassée à cet horizon avec la probabilité $1 - c$:

$$\Pr(\Delta S_{t,\tau} \leq VaR_c) = 1 - c \quad (23)$$

Où $\Delta S_{t,\tau} = S(t) - S(t - \tau)$ est la variation de cours de S examinée sur l'intervalle de durée τ .

En utilisant la fonction de répartition $F(\cdot)$, la relation précédente s'écrit :

$$F_{\Delta S_{t,\tau}}(-VaR_c) = 1 - c$$

C'est-à-dire, que

$$VaR_c = -F_{\Delta S_{t,\tau}}^{-1}(1 - c)$$

Où F^{-1} est la fonction de répartition inverse de F . Si la distribution est symétrique.

La VAR dans le modèle Gaussien

D'après le modèle standard des fluctuations boursières, $\Delta S_{t,\tau} \stackrel{\text{def}}{=} N(0, S(t - \tau)\sigma\tau)$ avec les hypothèses usuelles du calcul pratique des VaR , c'est-à-dire, pour τ petit.

Ainsi par exemple, dans un cadre gaussien, la VaR à 1 jours et 99% d'un actif admettant σ_1 comme volatilité quotidienne et cotant $S(0)$ en date $t = 0$, est donnée par

$$\Pr(\Delta S(1) \leq -VaR_{0.99}(1)) = 0.01$$

Où $\Delta S(1) = S(1) - S(0) = S(0)\sigma_1\Delta W(1)$ avec $\Delta W(1) = N(0,1)$.

D'où

$$\begin{aligned} VaR_{0.99}(1) &= F_{\Delta S(1)}^{-1}(0.99) \\ &= S(0)\sigma_1 F_{\Delta W(1)}^{-1}(0.99) \\ &= S(0)2.3263\sigma_1 \end{aligned}$$

Et plus généralement, on estime la VaR via ce résultat :

$$VaR_c(nb \text{ jours}) = S(0)q_c\sigma_1\sqrt{nb \text{ jours}} \quad (24)$$

Où q_c est le quantile d'ordre c de la distribution normale centrée réduite.

Les VaR extrêmes

Grace à la prise de conscience récente de l'importance de considérer les valeurs extrêmes plutôt que les moyennes dans la gestion des risques, il devient aujourd'hui mieux perçu que l'approximation classique de la réalité financière fournie par la modélisation gaussienne représente

un risque de modélisation pour la *VaR* dans le cas des seuils de confiance de 99% et au delà. La nécessité de généraliser la distribution normale apparaît de plus en plus nettement comme une nécessité pour les professionnels. Comme nous l'avons vu, les lois α -stables permettent de modéliser les grandes fluctuations. Nous verrons un exemple de calcul de *VaR* avec des lois α -stables symétriques.

4.3.2.2 Exemple de *VaR* avec des lois α -stables symétriques

Le calcul de la *VaR* à 1 jours dans le cas des lois α -stables se fait de manière similaire au cas standard :

$$VaR_c(1) = S(0)q_c\gamma_1 \quad (25)$$

Où γ_1 est la volatilité quotidienne de l'actif S mesurée avec le paramètre d'échelle de la loi α -stable symétrique.

En utilisant les propriétés d'invariance d'échelle des lois α -stables, c'est-à-dire, $\gamma_t = \gamma_1 t^{1/\alpha}$, nous avons le calcul de *VaR* pour nb jours :

$$VaR_c(nb\text{jours}) = S(0)q_c\gamma_1[nb\text{ jours}]^{1/\alpha} \quad (26)$$

L'équation (26) permet de calculer des *VaR* avec des lois α -stables dès lors que l'on sait estimer les quantiles q_c . Ceux-ci sont obtenus en calculant numériquement la fonction de répartition :

$$F_\alpha(x) = \int_{-\infty}^x f_\alpha(t) dt$$

Nous présenterons à présent une tabulation des fonctions de répartition $F_\alpha(x)$

α x	Cauchy 1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	Gauss 2
1	0.7500	0.7519	0.7534	0.7545	0.7555	0.7563	0.7572	0.7579	0.7587	0.7595	0.7602
5	0.9372	0.9482	0.9677	0.9731	0.9731	0.9793	0.9847	0.9893	0.9934	0.9968	0.998
10	0.9683	0.9760	0.9820	0.9868	0.9905	0.9934	0.9956	0.9972	0.9985	0.9994	1.000
15	0.9788	0.9847	0.9891	0.9923	0.9947	0.9965	0.9977	0.9986	0.9993	0.9997	1.000
20	0.9841	0.9888	0.9923	0.9947	0.9965	0.9977	0.9986	0.9992	0.9996	0.9998	1.000

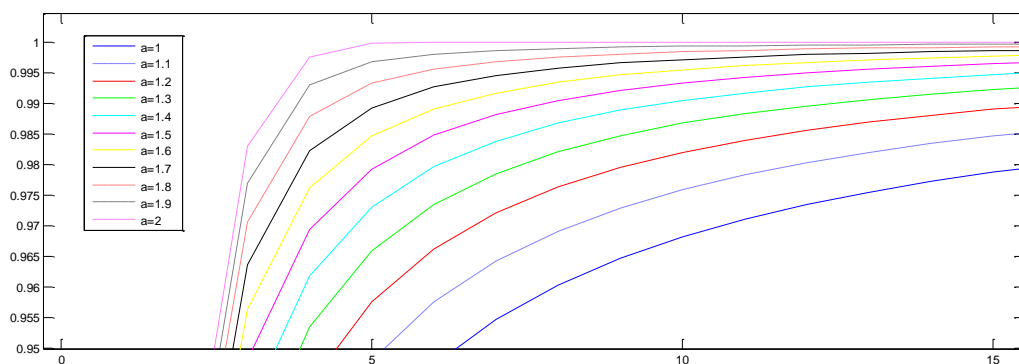
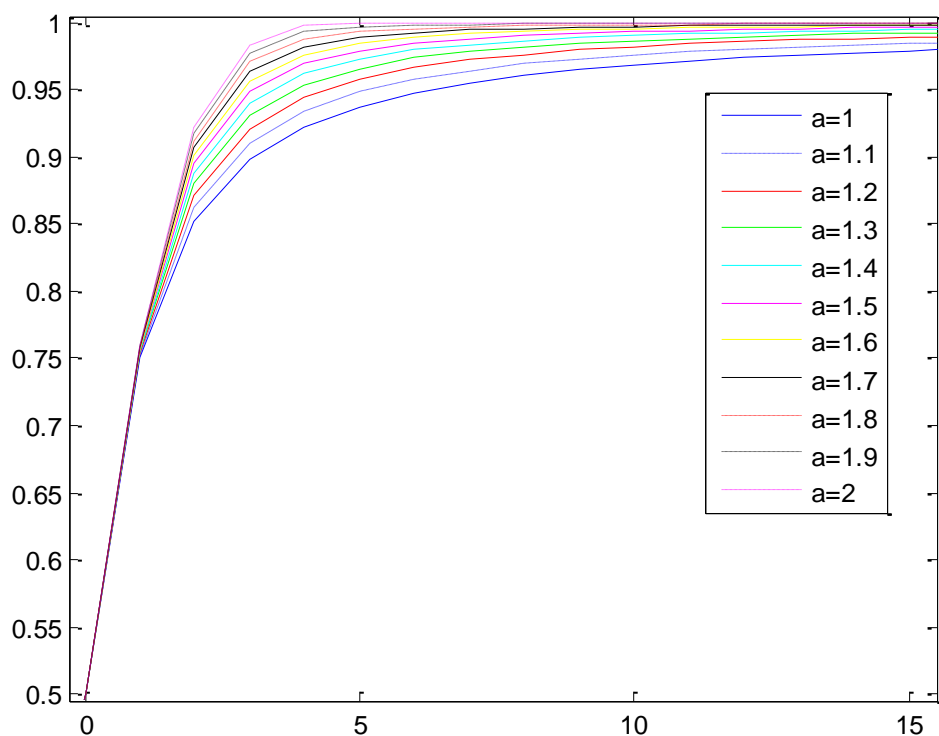
Distance à la loi normale

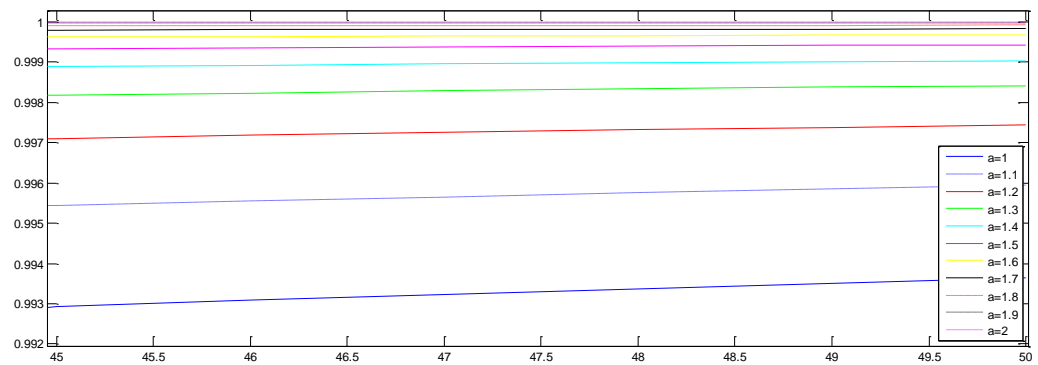
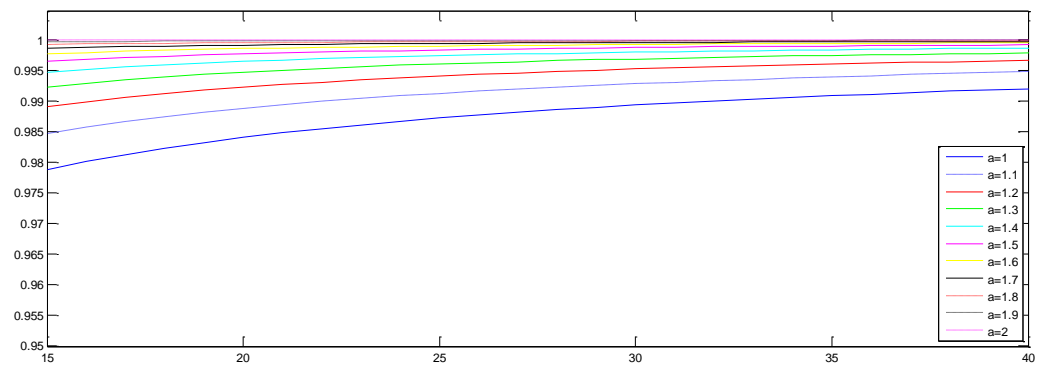
Les queues de distributions des lois α -stables s'étirant de plus en plus en fonction de la décroissance de l'exposant caractéristique α , on observe l'augmentation de la valeur des quantiles, donc de la *VaR*. Pour une valeur de x donnée, on peut comparer directement la probabilité cumulée de chaque loi, et observer comment la décroissance de l'exposant caractéristique α affecte l'allure, et donc la probabilité de la queue de distribution.

c	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	N(0,1)
99%	31.82	16.16	9.65	6.27	4.27	3.29	2.32

98%	15.89	9.16	6.06	4.36	3.39	2.90	2.05
97%	10.57	6.59	4.65	3.57	2.97	2.65	1.88
96%	7.91	5.22	3.87	3.12	2.70	2.47	1.75
95%	6.31	4.69	3.69	2.81	2.50	2.32	1.64

Ce tableau donne les valeurs des quantiles en fonction de α . Par exemple, pour $c = 95\%$, le quantile gaussien usuel est $q_{0.95} = 1.6448$. le quantile 2-stable équivalent est $q_{0.95}^2 = 2.3262$, et le quantile 1.4-stable est $q_{0.95}^{1.4} = 3.6999$. Pour $c = 99\%$, on observe une forte augmentation sur le quantile $q_{0.99}^\alpha$ en fonction de la baisse de α vers la valeur 1 (loi de Cauchy). En particulier, pour $\alpha = 1.7$ qui est une valeur souvent obtenue sur les marchés réels, $q_{0.99}^{1.7} = 5.1519$, soit environ 1.6 fois plus élevé que $q_{0.99}^2$.





5 Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons montré que l'hypothèse de normalité des variations des prix ou des rendements est mise à mal par certains mouvements extrêmes des marchés. La distribution réelle est plus large sur les bords, plus cintrée et plus pointue. Les lois stables approchent mieux les lois des rendements financiers que les lois normales utilisées actuellement dans de nombreux modèles. La théorie fractale des marchés rejette l'hypothèse d'efficience des marchés qui se base sur le fait que l'information est instantanément intégrée dans les prix. Il est donc impossible de prévoir les cours à venir. L'hypothèse de stabilité des marchés suppose au contraire que le comportement passé du marché a une influence sur son comportement futur. Les investisseurs reçoivent l'information en même temps mais ne l'analysent pas de la même façon. Ils réagissent donc de manières différentes selon leur politique d'investissement.

Actuellement, il existe deux modèles mathématiques qui prennent en compte la structure fractale des marchés : les lois stables et les mouvements browniens fractionnaires. L'utilisation des lois stables en finance reste très controversée. Nous avons tout de même travaillé avec ces lois car elles possèdent de nombreuses qualités :

- Les distributions stables permettent de prendre en compte les queues de distribution épaisses observées en pratique sur la loi des rendements et intègrent les discontinuités observées sur le marché. Dans le cas où le paramètre α est inférieur à 2, leur variance est infinie.
- Les lois stables sont stables par combinaison linéaire et ce sont les seules qui s'obtiennent comme limites des sommes linéairement normées de variables iid. Nous pouvons donc utiliser le théorème centrale limite généralisé.
- Les lois stables sont donc des distributions fractales du fait de leur propriété de stabilité par addition. En effet, la somme de deux variables α -stables iid est une variable stable de même exposant α . Les variables stables possèdent ainsi des propriétés d'invariance d'échelle.
- Elles sont définies par seulement quatre paramètres, ce qui les rend simple à utiliser en pratique.
- Elles sont une généralisation de la loi normale. Nous n'avons donc pas à refuser les modèles existants basés sur la loi de Gauss mais seulement à les généraliser.
- Elles possèdent un paramètre d'asymétrie qui permet de gérer le fait qu'à un mouvement à la baisse ne correspond pas forcément une fluctuation identique à la hausse.

Pour ces raisons, les lois stables sont très appréciées pour décrire les séries financières. Cependant nous avons mis en évidence quelques inconvénients.

Certaines personnes affirment que les distributions stables ne sont pas invariantes d'échelle ; la propriété d'autosimilarité n'étant pas vérifiée pour tous les pas de temps mais seulement pour les plus petits. De plus, si la propriété d'invariance d'échelle était vérifiée alors l'exposant d'autosimilarité H serait exactement égale à l'inverse de l'exposant caractéristique $1/\alpha$ quelque soit le pas de temps choisi, ce qui n'est pas toujours le cas. Cette critique des lois stables est contestée par d'autres chercheurs qui soutiennent que les données ne sont pas stables mais dans le domaine d'attraction de la loi stable. Il a été montré que l'estimateur de McCulloch est sensible à une déviation du modèle stable et a tendance dans ce cas à sous-estimer l'indice de stabilité lorsque le pas de temps est petit. Cette constatation ne remet donc pas en cause le caractère fractal des données. Il faut seulement, selon eux, considérer avec prudence les valeurs estimées du paramètre α .

De plus, il a été signalé que les lois stables représentent correctement la partie centrale de la distribution empirique des rendements logarithmiques mais surestiment l'épaisseur de la queue de distribution. Il apparaît que les lois gaussiennes sous-estiment la probabilité des grandes fluctuations et que les lois stables non gaussiennes surestiment cette même probabilité. Pour palier à ce problème, les chercheurs proposent de travailler avec des lois stables tronquées.

Nous obligeons aussi le paramètre de stabilité α à être compris entre 1 et 2, or certains chercheurs ont montré qu'il était plus raisonnable de considérer que l'exposant soit compris entre 2 et 5. Les lois stables conviennent lorsque nous travaillons avec un α inférieur à 2 mais nous utilisons des lois de Weibull si le α est supérieur à 2. Il est donc important de fixer au départ un intervalle pour α . De plus la méthode de calcul est différente selon que l'on suppose que α prend ces valeurs entre 1 et 2 ou entre 2 et 5. Enfin les méthodes d'estimation des bétas et du risque sont très approximatives.

Nous avons aussi essayé d'évaluer le risque sur un marché stable mais les résultats n'ont pas été concluants. En effet, nous n'avons pas été capables d'isoler un estimateur de marché plus précis que les autres. Nous avons comparé plusieurs estimations de la *Var* avec sa valeur empirique pour plusieurs niveaux de probabilité et plusieurs horizons de temps. Nous avons mis en évidence que la *Var* n'est pas un outil correct pour estimer le risque de perte probable futur étant donné qu'il a toujours un temps de retard avec la réalité. La capacité du passé à anticiper l'avenir est manifestement très limitée.

Nous pensons que les fractales, et en particulier les lois stables, peuvent dans l'avenir devenir des outils très performants en finance mais il faudra avant tout améliorer les estimations des paramètres pour pouvoir au mieux épouser les formes des courbes de rendements logarithmiques et ainsi on pourra mieux caractériser les actifs boursiers.

BIBLIOGRAPHIE

AKGIRAY V., LAMOUREUX C.[1989], “Estimation of Stable-Law Parameters : A Comparative Study”, Journal of Business & Economic Statistics, vol.7, n°1.

ARAD R. [1975], “ The Implications of a Long Tailed Distribution Structure to Portofolio Selection and Capital Asset Pricing”, Thèse de Ph. D., Princeton University.

ARAD R. [1980], “Parameter Estimation for Symetric Stable Distributions”, International Economic Review, vol.21, n°1.

ARTZNER P., DELBAEN F., EBER J.HEATH D. [1999], “Coherent Measures of Risk”, Mathematical Finance, vol.9, n°3.

BACHELIER L. [1900], “Théorie de la Spéculation”, Thèse de Doctorat, Annales de l'école Normale Supérieure, 3rd Série, t.27.

BELKACEM L. [1996], “Processus Stables et Applications en Finance”, Thèse de Doctorat, Université Paris IX.

BELKACEM L., LEVY-VEHEL J., WALTER C. [2000], “CAPM, Risk, and Portofolio Selection in α -Stable Markets”, Fractal, Vol.8, n°1.

BERGSTORÖM H. [1952], “On Some Expansions of Stable Distribution Function”, Arkiv för Matematik, 2, 18.

BLATTBERG R., SARGENT T.[1971], “Regression With Non-Gaussian Stable Disturbances : Some Sampling Results”, Econometrica, Vol.39.

BOUCHAUD J.P., POTTERS M. [1997], “Théorie des Risques Financiers”, Saclay, Collection Aléas.

BYCZKOWSKI T., NOLAN J., RAJPUT B. [1993], “Approximation of Multidimensional Stable Densities”, J. Multivariate Analysis, Vol. 46.

CHAMBERS J., MALLOWS C., STUCK B. [1976], ”Method for Simulating Stable Random Variables”, J. of the American Statistical Association, vol.79.

CHENG B., RACHEV S. [1995], “Multivariate Stable Future Prices”, Mathematical Finance, vol.5.

CONT R.[1997], “Scaling Properties of Intraday Price Changes”, Science & Finance Working Paper, June.

FAMA E. [1965], “The Behavior of Stock Market Prices”, Journal of Business, vol.38, n°1.

FAMA E. [1965], “Efficient Capital Markets : II”, Journal of Finance, Vol.46.

FAMA E., ROLL R. [1968], “Some Properties of Symmetric Stable Distributions”, J. of the American Statistical Association, vol.63.

FAMA E., ROLL R. [1971], “Parameter Estimates for Symmetric Stable Distributions”, J. of the American Statistical Association, vol.66.

FIELITZ B. SMITH E. [1972], "Asymmetric Stable Distributions of Stock Price Changes", J. of the American Statistical Association, vol.67.

GNEDENKO B., KOLMOGOROV A. [1954], "Limit Distributions for sums of independent random variables", Addison-Wesley, MA.

GOURIEROUX C., LE FOL G. [1997], "Volatilités et mesures du risque", Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 138, n°4.

HALL J., BRORSEN B.W, IRWIN S. [1989], "The Distribution of Futures Prices : a Test of the Stable Paretian and Mixture of Normals Hypotheses", J. of Financial and Quantitative Analysis, vol.24.

JANICKI A. WERON A. [1994], "Simulation and Chaotic Behavior of α -Stables Stochastic Processes", Marcel Dekker, New York.

JORION P. [1997], "Value-at-risk : The New Benchmark for the Multidimensional Symmetric Stable Densities", Lithuanian Math. J., vol.96.

KOUTROUVELIS I. [1980], "Regression-Type Estimation of the Parameters of Stable Laws", J. of the American Statistical Association, vol.75.

LARDIC S., MIGNON V. [1999], "La mémoire longue en économie : une revue de la littérature", Journal de la Société Française de Statistique, vol.140.

LEVY P. [1954], "Théorie de l'Addiction des Variables Aléatoires", Gauthier-Villars, Paris.

LONGIN F. [1993], "Volatilité et Mouvement extrêmes du Marché Boursier", Thèse de Doctorat, HEC, Octobre .

MAILLET B., MICHEL T. [1997], "Mesures de Temps, Information et Distribution des Rendements Intra-Journaliers", Journal de la Société de Statistique de Paris, tome 138.

MANDELBROT B. [1962], "Sur Certains Prix Spéculatifs : Faits Empiriques et Modèle Basé sur les Processus Stables Additifs Non-Gaussiens de Paul Lévy", Compte-Rendus à l'Académie des Sciences, Vol.254.

MANDELBROT B. [1963], "New Methods in Statistical Econoics", The Journal of Political Economy, vol.36.

MANDELBROT B. [1967], "The Variation of Some Other Speculative Prices", Journal of Business, vol.40.

MANDELBROT B. [1997], "Fractals and Scaling in Finance in Finance", Springer, New York.

MCCULLOCH J. H. [1978], "Simple Consistent estimators of Stable Distribution parameters", Working Paper, Dept of Economics, Ohio State University, Columbus.

MIGNON V. [1998], "Marchés Financiers et Modélisations des Rentabilités Boursières", Economica.

MODARRES R., NOLAN J. [1992], "A Method for Simuating Stable Random Vectors", Computational Statistics.

NOLAN J., RJPUT B. [1993], "Numerical Calculation of Multidimensional Stable Densities", preprint.

PRAETZ P. [1972], "The Distribution of Share Price Changes", Journal of Business, vol.45.

PRESS S. J. [1972], "Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions", J. of American Statistical Association, vol.67.

RACHEV S., MITTNIK S. [2000], "Stable Paretian Models in Finance", Wiley.

RACHEV S., XIN H. [1993], "Test on Association of Random Variables in the Domain of Attraction of Multivariate Stable Laws", Prob. And Math. Stat., vol.14.

ROGER P. [1988], "Théorie des Marchés Efficients et asymétrie d'information : une revue de la littérature", Finance, vol.9.

SAMORODNISTKI G., TAQQU M. [1994], "Stable Non-Gaussian Random Processes : Stochastic Models With Infinite Variance", New York, Chapman & Hall.

Site internet :

http://www.telecom-lille1.eu/people/clavier/Laurence_4_Mars_2010.pdf

<http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?12,664260>

http://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_stable

http://www.cppfrance.com/codes/ESTIMATION-LOI-STABLE-MC-KULLOCH-DLL-EXCEL_23370.aspx

<http://fordom.free.fr/constante/ALEASTABLE.htm>

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download;jsessionid=F866F06D3EA5FC92D8341E17C86D6178?doi=10.1.1.50.6349&rep=rep1&type=pdf>

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.54.3428&rep=rep1&type=pdf>

<http://www.stat.rice.edu/~riedi/Publ/TALKS/Riedi-TUK-FinanceWeb.pdf>

<http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/13/80/27/PDF/these.pdf>

<http://documents.irevues.inist.fr/bitstream/handle/2042/36836/187.pdf?sequence=1>

https://www.res.org.uk/econometrics/pdfs/onlineaccepted/0109_ECTJ-Fabozzi.pdf

http://stevereads.com/papers_to_read/the_behavior_of_stock_market_prices.pdf

<http://mfs.rutgers.edu/MFJ/Articles-pdf/V06N2p1.pdf>

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.50.6349&rep=rep1&type=pdf>

http://www.res.org.uk/econometrics/pdfs/onlineaccepted/0109_ECTJ-Fabozzi.pdf

<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.60.8411&rep=rep1&type=pdf>