

STAGE DE FIN D'ÉTUDES

---

# Mise en place d'un outil de pricing générique de payoff equity

---

*Auteur :*  
El Hadji Daouda SY

*Encadré Par :*  
Mr. HIHI FAÏÇAL

6 octobre 2015

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>2</b>
<b>Préface</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
1.1 Présentation de l'entreprise . . . . .	4
1.2 Rôle de l'équipe . . . . .	4
1.3 Objectif du stage . . . . .	5
<b>2 La méthode de Monte-Carlo</b>	<b>6</b>
2.1 Exemple de valorisation d'un contrat forward sous Monte-Carlo . . . . .	7
<b>3 Présentation de quelques modèles de valorisation</b>	<b>9</b>
3.1 Le modèle de Black-Scholes . . . . .	9
3.2 Le modèle à volatilité locale . . . . .	10
3.3 Le modèle à volatilité stochastique . . . . .	11
3.4 Le modèle à volatilité locale et stochastique . . . . .	11
<b>4 Présentation de l'interface du pricer générique</b>	<b>13</b>
4.1 Factorisation des payoff . . . . .	13
4.2 Notice d'utilisation . . . . .	13
4.2.1 Déclaration des engins Monte-Carlo. . . . .	13
4.2.2 Construction des baskets . . . . .	14
4.2.3 Chargement de la courbe des taux . . . . .	16
4.2.4 Chargement des paramètres . . . . .	16
4.3 Valorisation de produits européens . . . . .	17
4.4 Valorisation de produits américains . . . . .	22
4.4.1 L'enveloppe de Snell du pay-off . . . . .	22
4.4.2 La méthode LSM . . . . .	23
4.4.3 Une équation de programmation dynamique pour $\lambda^*$ . . . . .	23
4.4.4 La méthode de régression . . . . .	24
<b>Conclusion</b>	<b>26</b>
<b>Références</b>	<b>27</b>

## Remerciements

Tout d'abord je tiens à remercier M. Faïçal HIHI de m'avoir accordé l'honneur d'effectuer ce stage dans l'équipe DRM equity validation modèle, ce fut un plaisir de travailler avec lui.

Mes remerciements vont aussi à M. Oster (chef d'équipe) pour son accueil chaleureux et sa disponibilité.

Il m'est impossible d'oublier le reste de l'équipe à savoir Mlle Maana Fatima Zahrae, M. Flavien Ama et M. Kaada Mohamed pour leur disponibilité à m'assister en particulier lors de la rencontre de petites difficultés.

Mes remerciements vont aussi à toute l'équipe DRM-Risk Equity pour leur accueil ainsi qu'à l'équipe DRM Taux validation de modèles.

Sincères remerciements à tous les professeurs et responsables de la formation MACS.

## Préface

La sélection d'un modèle approprié pour pricer des instruments financiers repose sur une étude attentive des caractéristiques à la fois de la structure financière à prendre en considération, et du marché dans lequel nous devons gérer le risque de la position. Dans la littérature nous verrons le modèle de Black-Scholes, le modèle à volatilité locale et le modèle à volatilité locale et stochastique (on ne parlera pas du modèle à corrélation locale). Chacun présentera ses avantages et ses inconvénients.

Ainsi se pose la question de l'évaluation du risque modèle à chaque nouveau produit financier à valoriser selon un modèle mathématique, d'autant plus que le modèle parfait de référence n'existe pas.

Notre étude portera sur la présentation de la méthode de Monte-Carlo, puis nous procéderons à une appréciation des modèles quantitatifs pour le pricing des produits financiers ; dans ce chapitre, nous étudierons pour chaque modèle ses avantages et ses inconvénients. Enfin, nous présenterons un outil de pricing générique pour pouvoir obtenir directement une appréciation du risque modèle pour des produits structurés, exotiques...

# 1 Introduction

## 1.1 Présentation de l'entreprise

Natixis est la banque de financement, de gestion et de services financiers du Groupe BPCE, deuxième acteur bancaire en France avec 21% des dépôts bancaires et 36 millions de clients à travers ses deux réseaux, Banque Populaire et Caisse d'Épargne.

Avec près de 22 000 collaborateurs, Natixis intervient dans trois domaines d'activités dans lesquels elle dispose d'expertises métiers fortes : la banque de grande clientèle, l'épargne et les services financiers spécialisés.

Cotée à la Bourse de Paris, elle dispose d'une structure financière solide avec un total de fonds propres Core Tier 1 de 12,5 milliards d'euros, un ratio Core Tier 1 de 9,4% (Bâle 3 en données pro forma de l'Opération envisagée de cession des CCI, sans mesures transitoires excepté sur les IDA) et des notations long terme de qualité (Standard & Poor's : A - Moody's : A2 - Fitch Ratings : A+)

## 1.2 Rôle de l'équipe

Dans le cadre de l'autorisation des one-off émises par les traders, l'équipe DRM (Direction des risques de marché) validation de modèles quantitatifs est en charge :

- de la validation analytique des modèles mathématiques développés par le front office
- de la validation algorithmique des modèles développés par le front office
- de donner leur avis, favorable ou non, sur les demandes des traders à traiter de nouveaux produits. Ces demandes sont communément appelées one-off.

Ce stage s'inscrit dans le cadre du processus de traitement de ces one-off.

### 1.3 Objectif du stage

Pour pouvoir autoriser une demande one-off, l'équipe DRM quant equity doit procéder à une étude minutieuse et critique des paramètres en risque lors du pricing du produit financier concerné. Ces paramètres peuvent être la volatilité, la corrélation des sous-jacents constituant l'indice, le taux...

Lors de cette étude, deux issues sont possibles :

- les paramètres dont le pricing du produit dépend "fortement" sont pris en compte par une méthode de pricing déjà validée par l'équipe. Et dans ce cas l'équipe donne un avis favorable pour le trade.
- soit un modèle prenant en compte les paramètres en risque n'est pas encore mis en place, dans ce cas on a un avis défavorable. Le cas échéant, la banque cherche au mieux à avoir une position conservatrice, c'est-à-dire qu'on cherche à booker avec un modèle qui majore le prix, réduisant l'exposition au risque modèle.

Ceci nous emmène à une problématique majeure dans le monde de la finance quantitative à savoir le risque modèle qui n'est pas tout le temps bien pris en compte, pour la bonne raison qu'un modèle "parfait" avec lequel on pourrait benchmarker nos prix n'existe pas.

Dans ce cadre d'étude de risque modèle, avoir un outil de représentation générique des payoff equity se révèle indispensable dans le sens où les quants ne disposent pas de temps pour mettre en place des méthodes analytiques pour pricer les nouveaux produits qui doivent, dans certains cas être traités directement (à l'instant).

Un autre problème est que dans le cas de certains payoff complexes, il est difficile, pour ne pas dire tout simplement impossible, de développer des formules fermées.

L'approche générique pour la représentation des payoff consiste à trouver une manière commune de valorisation des payoff, ceci indépendamment du modèle utilisé.

Cela permet déjà d'écarter la représentation analytique (formule fermée, EDP, etc).

Ici une seule possibilité s'offre à nous à savoir utiliser un moteur Monte-Carlo avec lequel on pourra pricer ces produits financiers.

## 2 La méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo est basée sur une valorisation risque neutre : la valeur de l'option en question est donnée par l'actualisation de sa valeur future sous la proba-risque neutre.

$$P(0, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{\int_0^T r_s ds} h(S_T)]$$

- $P(0, T)$  : valeur d'une option aujourd'hui et qui a pour échéance  $T$ .
- $\mathbb{Q}$  : la mesure risque neutre.  
la mesure risque neutre est une mesure équivalente à la proba-réelle et sous laquelle les valeurs actualisées des flux futurs sont martingales.
- $r_{t \geq 0}$  le taux sans risque.

Cette méthode de Monte-Carlo doit ses origines à Buffon, mathématicien des années 1700. En effet, Buffon stipule que si l'on lance un grand nombre d'aiguilles et en comptant celles qui touchaient deux stries, on obtenait une valeur approximative de la probabilité. Cette expérience repose sur un théorème : **la loi forte des grands nombres**.

### **Théorème : la loi forte des grands nombres**

Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que  $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$  alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) = \mathbb{E}(|X_1|)$$

Ce théorème permet d'utiliser des algorithmes probabilistes pour calculer n'importe quelle espérance.

Suivant un modèle de diffusion du sous-jacent, on génère un large nombre de valeurs futures du sous-jacent auxquelles on applique la fonction payoff de l'option, actualisées sous la proba  $\mathbb{Q}$ . La moyenne des prix représente ainsi le prix de l'option.

Le problème est maintenant d'évaluer théoriquement l'efficacité de cette méthode. Il existe des théorèmes qui permettent de calculer la vitesse de convergence d'une méthode de Monte-Carlo.

### **Théorème : théorème central limite**

Soit  $(X_i, i \geq 1)$  une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.) telles que  $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$ . On pose  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1^2)$  alors :

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma^2} \left( \mathbb{E}[(X_1)] - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right) \xrightarrow{loi} G \quad G \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

Ce théorème central limite nous permet d'établir un intervalle de confiance de notre simulation Monte-Carlo. Cet intervalle se rétrécit en augmentant le nombre de simulations, et en diminuant la variance  $\sigma^2$ . Pour voir cela, réécrire le TCL en convergence presque sûre.

Il se pose donc un dernier problème qui est l'évaluation de la variance  $\sigma^2$ . L'estimateur standard de la variance est la moyenne au carré des écarts des points  $X_i$  par rapport à la moyenne arithmétique.

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

Cet estimateur est construit en approchant  $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ . C'est un estimateur biaisé car  $\mathbb{E}[\widetilde{\sigma}_n^2] = \frac{n}{n-1} \text{Var}(X)$ .

Un estimateur sans biais de la variance sera donc :

$$\overline{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2$$

## 2.1 Exemple de valorisation d'un contrat forward sous Monte-Carlo

Soit un actif ne distribuant pas de dividendes dont la valeur spot est  $S_0 = 40$ , le taux  $r_{10Y} = 0\%$ , la volatilité ( $\sigma$ ) de 10%.

Sur le modèle de Black-Scholes que nous décrirons plus tard, la diffusion satisfait l'équation :

$$S_{t_{i+1}} = S_t e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\delta t} + \sigma \sqrt{\delta t} W_{t_{i+1}} \quad (1)$$

$$S_0 \quad \text{donne} \quad (2)$$

Ce qui nous donnerait pour huit (8) simulations le résultat suivant :

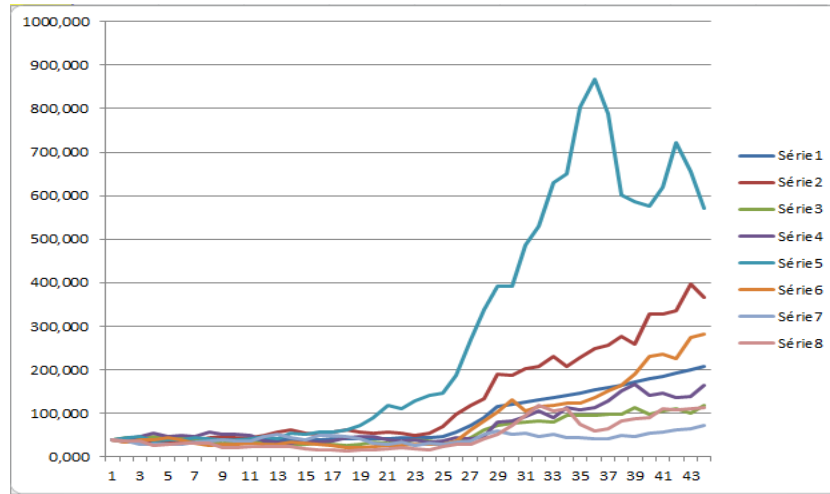


FIGURE 1

Et donc le pricing d'un contrat forward 10 ans aurait pour prix

$$\begin{aligned}
 P(0, T) &= \frac{1}{8}(208,183 + 365,189 + 118,679 + 164,425 + 569,632 + 281,117 + 71,340 + 111,946) \\
 &= 236,313875
 \end{aligned}$$

### 3 Présentation de quelques modèles de valorisation

Le monde de la finance aura connu cinq (5) grands types de modèles de valorisation : le modèle de Black-Scholes, les modèles à volatilité locale, les modèles à volatilité stochastique, les modèles à volatilité locale et stochastique et le modèle à corrélation locale. Une brève description de ces modèles (présentation, avantages et inconvénients) sera faite par la suite.

#### 3.1 Le modèle de Black-Scholes

Les hypothèses du modèle de Black-Scholes considèrent un marché financier en temps continu, sans opportunité d'arbitrage, complet (existence et unicité proba risque neutre)[6]. De sus, les actifs y sont divisibles et on a possibilité d'effectuer des ventes à découvert. Enfin les actifs ne paient pas de dividendes, les taux sont connus à l'avance et il n'y pas de coûts de transaction.

Sous le modèle de Black-Scholes, le cours d'un actif  $S$  vérifie l'EDS suivante :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma dW_t$$

avec :

- $S_t$  le cours du sous jacent à l'instant  $t$ .
- $\mu$  le drift
- $\sigma$  la volatilité, qui est constante.
- $W$  un processus stochastique sous la proba risque neutre  $\mathbb{Q}$

Sa solution est obtenue après application de la formule d'Ito[6] à la fonctionnelle  $\ln(S_t)$ .

Ce qui donne

$$S_t = S_0 e^{(\nu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

Une discrétisation en temps permet d'avoir l'évolution du prix du sous-jacent, voir 2.1.

#### Critique risque modèle :

Il est constaté que la volatilité est fonction du temps et du strike. c'est-à-dire que si tous les paramètres restent fixés, la volatilité implicite extraite du marché varie avec le temps, c'est la structure par terme de la volatilité. Aussi, à temps fixé, la volatilité varie avec le strike, c'est le smile de volatilité.

Ce qui entraîne une mauvaise modélisation du prix pour les options hors de la monnaie.

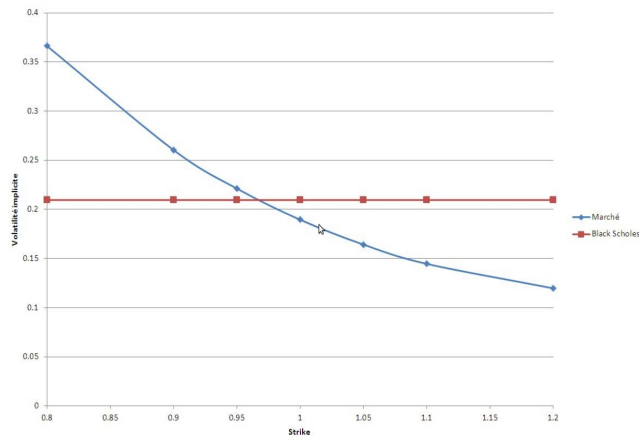


FIGURE 2 – Smile de volatilité

### 3.2 Le modèle à volatilité locale

Comparé au modèle de Black-Scholes, ces modèles ont l'avantage d'être compatibles avec le smile de marché sans introduire de nouvelles sources de risque.

Le modèle à volatilité locale permet d'avoir une modélisation déterministe de la volatilité qui devient fonction du spot et du temps.

Elle a pour dynamique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$$

avec :

- $\mu$  le drift.
- $W$  le brownien sous la proba risque neutre.
- $\sigma(t, S_t)$  la volatilité locale.

Une formule fermée pour l'expression de la volatilité locale est donnée par Dupire par utilisation de l'équation de Fokker-Plank[2]. :

$$\sigma_L^2(K, T) = 2 \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} - \mu(T)(C - K \frac{\partial \sigma}{\partial K})}{K^2 \frac{\partial^2 \sigma}{\partial K^2}}$$

La formule de Dupire montre que dans le cas où nous disposons d'un continuum de prix de Calls (ou de Puts), il y a une unique fonction de la volatilité locale qui est déterminée par ce prix. Pour plus d'informations sur la calibration du modèle à volatilité locale on pourra consulter [4].

### Critique risque modèle :

Ce modèle bien qu'étant cohérent avec le principe d'AOA, et représentant bien le skew et le smile par rapport aux prix observés sur le marché ne capte pas bien la dynamique du smile. En effet, ce modèle prédit que lorsque le cours du sous-jacent croît, le smile se déplace vers les cours du sous-jacent les moins élevés et vice versa ; alors que l'opposé est observé sur le marché[6].

Il est aussi à noter que le modèle à volatilité locale tend à aplatir le smile au niveau des ailes (OTM, ITM).

### 3.3 Le modèle à volatilité stochastique

Le modèle à volatilité stochastique est un modèle à deux facteurs. Ces deux facteurs sont le Forward (valeur du sous-jacent dans le futur) et la volatilité de ce sous-jacent qui devient un processus stochastique, dont le brownien est corrélé avec celui du Forward.

Ce modèle vient corriger le problème de la dynamique du smile prédit par le modèle à volatilité locale. La calibration de la volatilité se fait par résolution d'un problème de moindres carrés, parfois avec contraintes[6].

Un exemple de modèle à volatilité stochastique serait le modèle SABR[6] dont la dynamique est la suivante :

$$dF_t = \sigma_t F_t^\beta dW_t^1, \quad F(0) = f \quad (3)$$

$$d\sigma_t = \nu \sigma_t dW_t^2, \quad \sigma(0) = \alpha \quad (4)$$

avec :

- $F_t$  est le taux forward
- $\sigma_t$  la volatilité
- $W_t^1$  et  $W_t^2$  deux mouvements browniens corrélés de  $\rho$ .
- $\alpha$  est la volatilité initiale,  $\alpha \geq 0$
- $\nu$  la volatilité de la volatilité (vol of vol),  $\nu \geq 0$
- $\beta$  l'exposant du taux forward,  $0 \leq \beta \leq 1$
- $\rho$  la corrélation entre les deux mouvements browniens,  $-1 < \rho < 1$

### Critique risque modèle :

Ce modèle cale bien le smile et sa dynamique possède une meilleure représentation de la volatilité forward. Cependant, trois désavantages seront notés lors de son utilisation :

- les contraintes à respecter lors de la calibration.
- un changement d'un paramètre nécessite une recalibration.
- le modèle ne cale pas bien le smile pour les marchés à court terme.

### 3.4 Le modèle à volatilité locale et stochastique

Le modèle à volatilité locale et stochastique est un mixing weight du modèle à volatilité locale et du modèle à volatilité stochastique. Il vient apporter une correction à la fois au modèle à volatilité locale et à la fois au modèle à volatilité stochastique. Nous prendrons l'exemple de l'option Double No Touch où la LSV vient corriger la LV et la SV.

Rappelons que le modèle à volatilité locale tend à aplatir le smile sur les ailes, contrairement au modèle à volatilité stochastique où on observera plus de skew.

Considérons un double no touch option (DNT option) :

L'option DNT est une option de type barrière américaine double. C'est-à-dire qu'elle présente deux barrières, une supérieure (S) et une inférieure (I). Son payoff se présente comme suit :

$$DNT(t) = \mathbf{1}_{S_u \in \{L, U\}} \quad \forall u \leq t$$

Supposons que les modèles LV et SV ont été bien calés sur les prix marché des options vanilles. Il est constaté que dans le cas du pricing de l'option DNT par un modèle à volatilité locale, le prix donné est inférieur au prix observé sur le marché. Le contraire (prix de marché supérieur) est constaté dans le cas du modèle à volatilité stochastique. Le modèle à volatilité locale et stochastique vient donc corriger ce problème en se posant comme un mixing des modèles LV et SV. C'est-à-dire un modèle à deux facteurs où la volatilité est à la fois stochastique et locale.

### Brève présentation de la calibration du LSV

La calibration du modèle à volatilité stochastique se fait en deux étapes :

1. calibrer le modèle purement stochastique
2. calibrer la correction de la volatilité locale.

Lors de la calibration du modèle à volatilité stochastique, le résultat match bien les données de marché autour de la monnaie mais possède des difficultés à matcher les datas quand on est très hors de la monnaie. Ce comportement est amélioré en utilisant la correction de la volatilité locale qui "déplace" le smile de la volatilité stochastique vers la bonne direction, d'où les deux étapes successives de la calibration citées plus haut : calage de la volatilité stochastique puis calage du paramètre de correction. Pour plus de détails sur le calage du LSV on pourra consulter [1], qui en fait une très bonne étude.

## 4 Présentation de l'interface du pricer générique

La construction d'une maquette apte à accueillir une large gamme de payoff s'est avérée être une tâche plutôt fastidieuse mais pleine d'enseignements surtout en matière de connaissance des produits financiers. Pour ce faire, on a procédé en plusieurs étapes :

1. Factoriser les caractéristiques des payoff
2. Décrire ces derniers sur une feuille Excel vide, c'est à dire sans xll, sans macros
3. vérifier la possibilité d'intégrer des payoff plus complexes

Ce dernier point a été effectué jusqu'à avoir une maquette sur laquelle on peut se référer pour commencer à coder la librairie (Dynamic Link Library) qui lui sera attachée.

### 4.1 Factorisation des payoff

Dans les différentes classes de payoff (comme des one-off), on peut distinguer les options de type callable et les options de type non-callable. Ces options peuvent présenter deux sous-classes d'options (exotiques ou non) que sont :

Les options non-path-dépendent : ce sont les options dont la valeur finale ne dépend pas du chemin suivi par le cours du sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.

Les options path-dépendent : le prix de ces options dépend du chemin suivi par le cours du sous-jacent pendant toute la durée de vie de l'option.

Nous entrerons encore plus en détails dans la description des payoff à travers des exemples lors de leur valorisation par le pricer générique.

### 4.2 Notice d'utilisation

On utilise Excel comme interface utilisateur pour le pricer générique. Le code étant développé en C#, cette interface reste portable dans l'environnement Windows.

Après avoir généré les diffusions Monte-Carlo par une des méthodes décrites plus haut, quelques étapes pour arriver au pricing sont à suivre.

#### 4.2.1 Déclaration des engins Monte-Carlo.

Une fois les engins Monte-Carlo chargés depuis la librairie, leur déclaration se fait au travers de la fonction

```
VMLECLoadEGPLMCEngine ( string EngineName ;  
                        Integer number_maximum_of_simulation ;  
                        Date refdate ;  
                        LineVector starEndFrequency) ;
```

avec :

- *EngineName* : nom de l'engin Monte-Carlo, doit être identique à celui chargé dans la MemoryDB (Memory Data Base) de la librairie.
- *number\_maximum\_of\_simulation* : nombre maximal de simulations Monte-Carlo à charger. Ce nombre doit être inférieur ou égal au nombre de simulations chargées dans l'engin Monte-Carlo

- *starEndFrequency* : donne un échéancier qui correspond aux dates où les diffusions Monte-Carlo ont été simulées.  
exemple :  
Start = 0D : qui traduit 0 jour à partir de la date de référence  
End = 1Y : qui traduit 1 an après la date de référence  
Freq = 3M : qui traduit tous les trois mois allant de Start(=refDate) à End (=refDate + 1an)

#### 4.2.2 Construction des baskets

On dispose d'une classe d'options dites options sur paniers où le sous-jacent est un ensemble d'actifs pondérés par des poids  $w_i$ , avec  $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ . Ces options ne prennent pas en compte la somme des performances de chacun des actifs sous-jacents du panier, pris de façon indépendante. La corrélation entre les actifs est prise en compte.

Le sous-jacent respecte l'écriture

$$B(T) = \sum_{i=1}^n w_i S_i(T)$$

Un exemple call basket européen :

$$C_{basket}(B(T), K) = \max(B(T) - K; 0)$$

Dans notre pricer générique, la déclaration des baskets se fait à l'aide de la fonction :

```
VMLECLoadEGPLBasket ( string BasketName ;
                        string EngineName ;
                        Matrix UnderlyingAndWeigth ;
                        LineVector FreezeAndRemove ;
```

avec :

- *BasketName* : nom que l'on affecte au basket à charger.
- *EngineName* : nom de l'engin Monte-Carlo (chargé) à associer au basket.
- *UnderlyingAndWeigth* : est une matrice de taille  $N \times 2$  nécessairement avec
  - $M(i, 1)$ ,  $1 \leq i \leq \text{Nombre de sous-jacents}$ , contient les noms des sous-jacents
  - $M(i, 2)$ , contient leur poids respectif.

On dispose parfois de baskets "exotiques" où il est possible d'appliquer des opérations sur la performance des sous-jacents ou sur les poids. On distingue particulièrement deux types d'opérations à savoir le Freezing des performances de sous-jacent, ou le Melting de sous-jacent. C'est dans ce cadre que l'on met à disposition la possibilité de feeder ces caractéristiques de payoff à travers l'entrée suivante :

- FreezeAndRemove : vecteur d'une ligne et de deux colonnes  
exemple :  
— Freeze = R1, A chaque date d'observation la performance du best est fixée pour toute la durée de vie restante de l'option.  
— Remove = R2, permet d'enlever le sous-jacent représentant la deuxième meilleure performance du basket à chaque date d'observation. Il faut s'assurer bien sûr

qu'en enlevant un sous-jacent à chaque date d'observation, le panier en contiendra toujours jusqu'à échéance.

Il est bien de noter qu'avec le Melting, la matrice de corrélation entre les sous-jacents restants n'est pas modifiée.

### 4.2.3 Chargement de la courbe des taux

Pour pouvoir calculer la valeur présente d'une option, on procède à l'actualisation de sa valeur future à la date de valorisation. Cette actualisation se fait avec des taux sans risque. Cette réflexion vient du fait qu'en l'absence d'opportunité d'arbitrage un portefeuille d'actif financier doit être rémunéré au taux sans risque.

La représentation usuelle de la courbe des taux est une fonction  $P$ , définie pour toutes les dates futures, tel que  $P(t)$  représente la valeur d'aujourd'hui d'une unité dans  $t$  années. Si  $P$  est définie pour tout  $t > 0$  alors, on pourra construire notre courbe de taux constituée, de taux d'intérêts annualisés  $Y(t)$ . On pourra donc définir :

$$Y(t) = P(t)^{\frac{1}{t}} - 1$$

Avec la crise de 2008, le taux sans risque de référence était le LIBOR (car la probabilité de défaut des banques notées AA qui s'octroyaient des emprunts entre elles était presque nulle). Après la crise c'est devenu le taux OIS. Pour plus de détails à ce sujet on pourra consulter [5].

Le chargement des datas pour l'actualisation des flux futurs se fait en faisant appel à la fonction :

```
VMLECLoadEGPLRateTS ( string ZeroRateTermStructureName ;
                        ColumnVector Convention ;
                        Matrix ZeroRateTermStructure ;
```

avec :

- *ZeroRateTermStructureName* : nom à associer au terme structure
- *Convention* : Vecteur colonne de taille  $5 \times 1$  avec
  - M(1,1) : Calendrier : Japon, Asie... Utilisé dans le cas d'une convention business day
  - M(2,1) : Convention : ACT/365, ACT /360, ...
  - M(3,1) : Today's Date : La date de référence pour les taux.
  - M(4,1) : Interpolation : Linear. Soit  $d_i$  les jours où l'on dispose des taux  $r_i$ , l'interpolation nous permet de trouver pour une date  $d_j$  tel qu'il existe  $i < j < i+1$  le taux  $r_j$
  - M(5,1) : Extrapolation : Flat. Soit  $d_i$  les jours où l'on dispose des taux  $r_i$ , l'extrapolation nous permet de trouver pour une date  $d_j < d_i$  ou  $d_j > d_i$  pour tout  $i$  le taux  $r_j$  correspondant.
- *ZeroRateTermStructure* : Matrice de taille  $N(\#days) \times 2$  contenant le terme structure des taux Zéro coupon.

### 4.2.4 Chargement des paramètres

Pour mener à bien le pricing, on doit nécessairement loader un paramètre pour chaque payoff. Ce paramètre est chargé en mémoire par :

```
VMLECLoadEGPLParameters ( string ParameterName ;
                           Date Today'sDate ;
                           Real Nominal ;
                           LineVector DiscountingInfos ;
                           LineVector SimulationPaths ;
```

avec :

- *ParameterName* : Nom associé au paramètre à loader.
- *TodaysDate* : la date d'actualisation.
- *Nominal* : le nominal.
- *DiscountingInfos* : Matrice de taille  $1 \times 2$  avec :
  - $M(1,1)$  : le terme structure de taux ZC, décrit dans la section précédente.
  - $M(1,2)$  : la fréquence (pour l'actualisation en composé en particulier).
- *SimulationPaths* : le nombre de simulations (start et end) avec :
  - start : le numéro du chemin Monte-Carlo qui représente notre première diffusion.
  - end : la dernière. Ainsi, si on définit start =  $i$ , end =  $j$ ,  $i > j \geq 0$  (nécessairement) on effectuera  $i - j + 1$  simulations allant de  $i$  à  $j$  et si  $i = j$  une seule simulation est donc faite sur la diffusion  $i = j$ .

### 4.3 Valorisation de produits européens

Nous donnerons ici quelques exemples de valorisation de produits européens. Mais avant définissons quelques notions de base :

Underlying : correspond au sous-jacent sur lequel on price, on le décrit comme un basket qui peut être mono sous-jacent, un sous-jacent ou multi, plusieurs sous-jacents.

Striking : c'est le prix d'exercice noté  $K$ .

Fixing : permet de définir la valeur future du sous-jacent "effectif" elle sera notée ici  $F$

Dénominateur : est un concept mis en place pour désigner l'indice par rapport auquel on calcul le ratio pour évaluer les performances. Plus de détails seront donnés au travers des exemples.

Z : est un réel fixé, que l'on peut utiliser dans le payoff. Exemple du Call\_moneyness :  $\max(F/K - Z; 0)$  avec  $Z = 1$ .

CallDate : la date de fin de la durée de vie de l'option.

Paydate : la date de paiement des coupons.

Pour pouvoir pricer un produit, on dispose de deux fonctions que sont les suivantes :

```

VMLECPPriceEGPLVariable ( string ParameterName ;
                           string BasketName ;
                           LineVector Denominateur ;
                           LineVector Striking ;
                           LineVector Fixing ;
                           Real Z ;
                           string CallDate ;
                           string Paydate ;
                           string Payoff ;

—

VMLECPPriceEGPLPayoff ( string ParameterName ;
                        string PayoffName ;
                        Matix PayoffBlock ;

```

On considérera pour le reste que les taux sont nuls, pour alléger l'écriture des payoff.

## 1. Produits vanilles

- call vanille (moneyness) : le call est un produit vanille (simple) qui permet à l'investisseur de miser sur la hausse du sous-jacent.

$$C(T) = \max\left(\frac{S_T}{S_0} - z; 0\right)$$

z représente le niveau de strike

VARIABLE	UNDERLYING	STRIKING					FIXING				
Name	Name	Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequency	Performance	Type
VANILLA_CALL	MONO BNP	0D	0D	0D	BNP FP		5Y	5Y	0D	BNP FP	AVERAGE
	Dénominateur					Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF	PRICE	
	Start	End	Freq	erformanc	Type	z	Call Date	Pay date	pay off	LV_EGPL	
	0D	0D	0D			50%		5Y	Max(F/K-z;0)	64,160%	

FIGURE 3 – Call Vanille sur l'action BNP, Strike 50%, échéance 5Y,

### Description :

- Le sous-jacent est fait ici sur une basket mono (BNP FP)
- le fixing est fait à 5Y en définissant : Fixing Start = Fixing End = 5Y, Fréquence = 0D.
- Le striking est fait aujourd'hui, Striking Start = Striking End = 0D
- Le dénominateur n'est pas utilisé, on le définit avec des valeurs par défaut Start = 0D = End = Freq = 0D , Perf = Type = ""
- z = 100
- calldate = "" les observations sur le striking et le fixing sont faites jusqu'à leur endDate respectif
- Paydate = 5Y c'est à dire ici à échéance.

## 2. Barrier option Nous prendrons deux exemples : pricing d'un call barrière européenne Up and In puis américaine Up and In

- barrière européenne à échéance :

$$C_{basket} = \max\left(\frac{B_T}{B_0} - z; 0\right) \times \mathbf{1}_{\{\frac{B_T}{B_0} > barrier\}}$$

Les inputs restent les mêmes que pour un call classique. Une seule modification est effectuée au niveau du payoff qui devient

$$\max(F/K - z; 0) \times IND(F/K > barrier)$$

VARIABLE	UNDERLYING	STRIKING					FIXING				
Name	Name	Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequence	Performance	Type
CALL_BARR_TERM_UI	MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		5Y	5Y	OD	BNP FP	
	Dénominateur					Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF	PRICE	
	Start	End	Freq	erformanc	Type	z	Call Date	Pay date	pay off	LV_EGPL	
	OD	OD	OD			50%		5Y	Max(F/K-80%;0)*IND(F/K>z)	0,46946	

FIGURE 4 – Call Barrière Terminal sur l'action BNP, Strike 50%, échéance 5Y,

— barrière américaine sur toute la durée de vie de l'option, observation annuelle :

$$C_{basket\_americain} = \max\left(\frac{B_T}{B_0} - z; 0\right) \times \mathbf{1}_{\{\frac{B_t}{B_0} > barrier\}} \forall t > 0$$

Ici on procède en deux étapes. Tout d'abord définition d'une variable de contrôle dans  $\{0, 1\}$  pour observer si la barrière a été touché.

VARIABLE	UNDERLYING	STRIKING					FIXING				
Name	Name	Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequence	Performance	Type
BARR_AMER_DO_50	MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		OD	5Y	1Y	BNP FP	MIN
	Dénominateur					Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF	PRICE	
	Start	End	Freq	erformanc	Type	z	Call Date	Pay date	pay off	LV_EGPL	
	OD	OD	OD	1		50%		5Y	IND(F/K>z)	0,59548	

FIGURE 5 – Call Barrière Terminal sur l'action BNP, Strike 50%, échéance 5Y,

Ensuite on définit notre call Terminal avec un payoff défini par :

$$\max(F/K - z; 0) \times Variable\_de\_contrle$$

### 3. Lookback option

le payoff d'une option lookback max par exemple se présente comme suit :

$$Lookback\_max = \max\left(\max_{start \leq i \leq end} \frac{F_i}{K} - 1; 0\right)$$

Pour pouvoir pricer ce payoff dans le pricer générique, on performe notre sous-jacent sur un échéancier de start à end et on type avec le type **MAX**, ce qui effectuera automatiquement un lookback max sur le Fixing. Cette même opération est bien sûr possible sur le striking et sur le dénominateur.

Illustration :

VARIABLE Name	UNDERLYING Name	STRIKING					FIXING				
		Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequence	Performance	Type
CALL_LOOKBACK_MIN-BO-	BASKET MULTI	3M	5Y	3M	R4	MAX	3M	5Y	3M	R1	MIN
STRIKING_LOOKBACK_MAX	Dénominateur						Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF	PRICE
		Start	End	Freq	erformanc	Type	z	Call Date	Pay date	pay off	LV_EGPL
		OD	OD	OD			50%		5Y	Max(F/K-z;0)	0,34304

FIGURE 6 – Call Lookback sur l'action BNP, Strike 50%, échéance 5Y,

#### 4. Autocall

Nous prendrons l'exemple d'un autocall 100% avec une barrière phoenix a 80%.

Dans cet exemple à chaque date d'observation, si le niveau du sous-jacent effectif dépasse 100% de son niveau initial, le produit est automatiquement rappelé et l'investisseur reçoit un coupon de sortie.

Si le niveau du sous-jacent effectif dépasse 80% mais reste tout de même inférieur à la barrière autocall, l'investisseur reçoit un coupon dit coupon de continuation.

Ce produit peut être rendu plus complexe en rajoutant d'autres caractéristiques.

Voyons comment parser ce payoff dans la maquette.

TESTING VARIABLE											
VARIABLE Name	UNDERLYING Name	STRIKING					FIXING				
		Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequence	Performance	Type
Autocall_Phoenix	LSV MONO BNP	OD	OD	OD			1Y	2Y	1Y	CouponAtAutoCall+CouponPhoenix	
CALL_TIME	LSV MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		1Y	2Y	1Y	BNP FP	
CouponAtAutoCall	LSV MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		1Y	2Y	1Y	BNP FP	
CouponPhoenix	LSV MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		1Y	2Y	1Y	BNP FP	
PDI	MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		2Y	2Y	OD	BNP FP	
ISCALLED	MONO BNP	OD	OD	OD	BNP FP		1Y	2Y	1Y	BNP FP	MAX

FIGURE 7 – autocallpheonix

Dénominateur						Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF
Start	End	Freq	erformanc	Type		z	Call Date	Pay date	pay off
OD	OD	OD			100%		MIN_TIME(CALL_TIME)	FIXING_SCHEDULE	F
OD	OD	OD			100%				DATE(F/K>z)
OD	OD	OD			100%				7%*IND(F/K>z)
OD	OD	OD			80%				7%*IND(F/K>z)*IND(F/K<100%)
OD	OD	OD			60%				-MAX(1-F/K;0)*(1-ISCALLED)*IND(F/K<z)
OD	OD	OD			100%				IND(F/K>z)

FIGURE 8 – autocallpheonix

5. Quelques autres exemples :

(a) Himalaya

VARIABLE Name	UNDERLYING Name	STRIKING					FIXING				
		Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequence	Performance	Type
Himalaya	BASKET MULTI REMOVE	OD	OD	OD			1Y	4Y	1Y	R1 - 1	AVERAGE
	Dénominateur					Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF	PRICE	
	Start	End	Freq	rforman	Type	z	Call Date	Pay date	pay off	LV_EGPL	
	OD	OD	OD					5Y	MAX(F;0)	0,30000	

FIGURE 9 – Himalaya

(b) Cordillere

VARIABLE Name	UNDERLYING Name	STRIKING					FIXING				
		Start	End	Freq	Perf	Type	Start	End	Frequence	Performance	Type
Cordillere	BASKET MULTI FREEZE	OD	OD	OD			1Y	5Y	1Y	(R1+R2+R3+R4)/4	MAX
	Dénominateur					Z	CALL_DATE	PAY_DATE	PAYOFF	PRICE	
	Start	End	Freq	erformanc	Type	z	Call Date	Pay date	pay off	LV_EGPL	
	OD	OD	OD					5Y	MAX(F;80%)	0,34304	

FIGURE 10 – Cordillere

## 4.4 Valorisation de produits américains

L'outil de valorisation de produits américains n'a pas été développé, nous montrerons une proposition de développement de ce dernier. La particularité d'une option américaine est que son détenteur peut l'exercer à tout moment. Il nous vient ici la notion d'instant d'exercice optimal ou encore temps d'arrêt optimal. Nous nous contenterons ici de donner le payoff d'une option bermudienne qui peut être exercée à des instants discrets  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = N$ .

### 4.4.1 L'enveloppe de Snell du pay-off

Pour définir la valeur de l'option à l'instant  $t_n$ , il faut raisonner par récurrence à partir de l'échéance  $t_N$ . La valeur  $U_N$  d'une option de vente américaine à l'échéance est, comme pour l'option européenne  $U_N = Z_N = (K - S_N)^+$

A tout instant  $n - 1$ , le détenteur de l'option à le choix entre :

- Exercer son option et en tirer immédiatement un profit  $Z_{n-1}$
- Conserver son option et détenir à l'instant suivant la valeur  $U_n$ , dont la valeur actualisée à l'instant  $n - 1$  est  $U_n B(n - 1, n)$ ,  $B(n - 1, n)$  représentant notre numéraire. L'espérance de cette valeur, connaissant l'histoire jusqu'à l'instant  $n - 1$ , est  $B(n - 1, n) \mathbb{E}^*(U_n | F_{n-1})$

Le système vérifié par  $U_n$  est donc :

$$U_N = Z_N$$

$$U_{n-1} = \max[Z_{n-1}, B(n - 1, n) \mathbb{E}^*(U_n | F_{n-1})]$$

On pourra consulter [6] qui fait une bonne présentation de la valorisation et de la couverture des options américaines.

Il existe trois grandes classes d'algorithmes pour la valorisation de produits américains :

- la première (LSM) utilise des approximations de l'espérance conditionnelle, méthode de Longstaff et Schwartz[7]
- la deuxième est fondée sur l'approximation du processus de Markov sous-jacent (Broadie et Glasserman).
- la troisième utilise le Calcul de Malliavin pour calculer numériquement l'espérance conditionnelle [8]

On se focalisera ici sur la première méthode dite plus couramment LSM (Least Square Monte-Carlo)

#### 4.4.2 La méthode LSM

L'algorithme de Longstaff Schwartz consiste en une approximation du temps d'arrêt optimal  $\lambda^*$  sur  $M$  trajectoires, par les variables aléatoires  $\lambda^{(m)}$ , qui dépendent de la trajectoire. Le prix est ensuite approché en utilisant une méthode de Monte Carlo

$$P(0, T) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M B(0, \lambda^{(i)}) h(S_{\lambda^{(i)}}^{(i)})$$

$B(0, \lambda^{(i)})$  représente notre numéraire.

La méthode LSM propose de calculer à chaque date d'observation et pour chaque simulation l'espérance conditionnelle du flux futur. Cette espérance conditionnelle est encore appelée valeur de continuation. Cette valeur de continuation est calculée par une régression moindres carrés en utilisant des polynômes de base (Laguerre, Legendre...). La comparaison à chaque date de la valeur de continuation et de la valeur d'exercice permet, par une approche "backward" de déterminer le temps d'arrêt optimal.

Plus formellement on a :

#### 4.4.3 Une équation de programmation dynamique pour $\lambda^*$

La principale caractéristique de cet algorithme est d'utiliser un principe de programmation pour le temps d'arrêt optimal lui-même et non pour la fonction valeur.

Si on remarque que  $\lambda^* = \lambda^0$ , le temps d'arrêt optimal au temps 0 peut être calculé en utilisant la suite  $(\lambda^j, 0 \leq j \leq N)$  définie par la récurrence suivante

$$\begin{aligned} \lambda_N^* &= N \\ \lambda_j^* &= j \mathbf{1}_{\{h(S_j) \leq u(j, S_j)\}} + \lambda_{j+1}^* \mathbf{1}_{\{h(S_j) < u(j, S_j)\}} \end{aligned}$$

Avec cette définition, on obtient une réécriture de  $\lambda_j^*$  par :

$$\lambda_j^* = \min \{i \geq j, h(S_i) = u(i, S_i)\}$$

Ainsi, les  $\lambda_j^*$  sont les temps d'arrêt optimaux au temps  $j$ . Afin d'estimer numériquement  $\lambda^*$  nous devons trouver une valeur approchée de l'espérance conditionnelle

$$\mathbb{E}[B(j, \lambda_{j+1}^*)h(S_{\lambda_{j+1}^*})|S_j]$$

L'idée fondamentale de Longstaff Schwartz est d'introduire une méthode de moindres carrés pour calculer cette espérance conditionnelle.

#### 4.4.4 La méthode de régression

On note  $Z_{j+1}$  la variable aléatoire

$$Z_{j+1} = B(j, \lambda_{j+1}^*)h(S_{\lambda_{j+1}^*})$$

Comme  $B$  et  $h$  sont bornées,  $Z_{j+1}$  l'est aussi. L'espérance conditionnelle peut aussi être vue comme une projection dans  $L^2$ , donc  $\mathbb{E}[Z_{j+1}|h(S_j)]$  peut s'exprimer comme  $\psi_j(S_j)$ , où  $\psi_j$  minimise

$$\mathbb{E}([h_{j+1} - f(S_k)]^2)$$

on se donne une suite de fonctions  $(g_l, l \leq 1)$  qui est une base de  $L_j^2 = L^2(\mathbb{R}^2, \text{loi de } S_j)$ , pour tout  $j, 1 \leq j \leq N$ . Pour tout  $j$ ,  $\psi_j$  peut s'exprimer comme

$$\psi_j(x) = \sum_{l \leq 1} \alpha_l g_l(x)$$

où la convergence de la série s'effectue dans  $L^2$ . Nous avons donc une manière de calculer le temps d'arrêt optimal en utilisant la procédure :

1. On initialise  $\lambda_N^* = N$ . Alors
2.  $\alpha^{j,k} = (\alpha_l^{j,k}, 0 \leq l \leq k)$  comme le vecteur minimisant

$$\mathbb{E}([B(j, \lambda_{j+1})h(S_{\lambda_{j+1}}) - (\alpha^{j,k}.g)(S_j)]^2)$$

3. On définit  $\lambda_j = j \mathbf{1}_{\{h(S_j) \leq (\alpha^{j,k}.g)(S_j)\}} + \lambda_{j+1} \mathbf{1}_{\{h(S_j) > (\alpha^{j,k}.g)(S_j)\}}$

Enfin, il reste à remplacer l'espérance de (2) par du Monte-Carlo.

## La maquette

Il faudra créer une classe de ParametreAmericain qui collectera les informations comme : Méthode (LSM...), Nombre de simulations, tolérance, type de polynôme de base, etc.

Cette classe pourra être éventuellement "feeder" à Paramètre cité plus haut.

La prise en compte des variables d'états, qui peuvent être des payoff.

Régression en fonction de variables d'états

Calculer ensuite les instants d'arrêt.

Puis valoriser comme les cas classiques de produits européens avec comme `Call_date`, les instants d'arrêt optimaux.

## Conclusion

La mise en place de l'outil de pricing générique permettra une meilleure approximation du risque modèle pour les produits exotiques non callable. Néanmoins, la callabilité reste faisable avec les hypothèses citées plus haut.

Ce stage m'aura permis de m'enrichir tant en connaissances (produits, méthodes de valorisation...) qu'en relationnel.

Étant donné la nature unique de la tâche qui m'a été confiée, j'ai dû m'adapter pour comprendre le problème, développer des idées et procéder à leur mise en œuvre, ce qui m'a octroyé autonomie et force de proposition.

Aussi, j'ai pu utiliser une bonne partie des connaissances acquises dans ma formation, la MACS, plus particulièrement en finance et en risque de crédit. Ceci m'a permis d'avoir une meilleure vision sur le problème et de faciliter l'approche technique dont j'ai eu besoin.

Cependant, de par la rigueur et par les exigences demandées durant ce stage, ma vision du monde professionnel et du monde de la finance s'est trouvé particulièrement changée. C'est sans aucun doute dans ce sens que ce stage a été le plus instructif.

## Références

- [1] Cristian HOMESCU. *Local stochastic volatility models : calibration and pricing*. July 14, 2014
- [2] Bertrand TAVIN. *La Volatilité Locale* Université Paris 1, 26 mai 2010
- [3] Emmanuel TEMAM. *Méthodes de Monte Carlo pour la finance*. Université Paris VII, LPMA Avril 2004
- [4] Moeiz ROUIS *Equations aux dérivées partielles en finance : problèmes inverses et calibration de modèle*. 22 Juillet 2010
- [5] John C. HULL *Options Futures and other derivatives*.
- [6] Damien LAMBERTON & Bernard LAPEYRE *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*,
- [7] Patrick S. HAGAN & al *Managing Smile Risk*
- [8] Longstaff & Schwartz *Valuing American Options by Simulation : A Simple Least-Squares Approach*
- [9] E. FOUNIE & al *Applications of malliavin calculus to monte-carlo methods in finance*