Equations Différentielles Ordinaires
Partie 2 : Equations linéaires ordre 1 et 2
Plus quelques situations problématiques...

MACS 1

January 13, 2017

Programme

- Introduction et exemples
- Equations linéaires d'ordre 1 et 2
- Théorème de Cauchy-Lipschitz
- Quelques ´quations qu'on sait résoudre à la main
- Systèmes linéaires
- Stabilités des points stationnaires
- Calcul de solutions approchées

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient constant

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient constant

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient constant

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-at}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient constant

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale
  $$y(t) = Ce^{-at}$$
  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient constant

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-at}$$

  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)

- Problème de Cauchy

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y : [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient constant

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-at}$$

  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)

- Problème de Cauchy

$$y'(t) + ay(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y : [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ Solution

$$y(t) = y_0 e^{-a(t-t_0)}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient variable

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad a \in C^0(\mathbb{R})$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient variable

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad a \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient variable

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad a \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)
  - Nécessite un calcul de primitive

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient variable

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad a \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)
  - Nécessite un calcul de primitive

- Problème de Cauchy

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y : [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation homogène à coefficient variable

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad a \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 1
  - Solution générale

$$y(t) = Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Solution globale (existe sur $\mathbb{R}$)
  - Nécessite un calcul de primitive

- Problème de Cauchy

$$y'(t) + a(t)y(t) = 0, \quad y(t_0) = y_0, \quad y : [t_0, +\infty] \to \mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ Solution

$$y(t) = y_0 e^{-\int_{t_0}^t a(s)ds}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace affine de dimension 1

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace affine de dimension 1
  - Avec une solution particulière

$$\tilde{y}(t) \quad \text{t.q.} \quad \tilde{y}'(t) + a(t)\tilde{y}(t) = b(t),$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace affine de dimension 1
  - Avec une solution particulière

$$\tilde{y}(t) \quad \text{t.q.} \quad \tilde{y}'(t) + a(t)\tilde{y}(t) = b(t),$$

  - Solution générale

$$y(t) = \tilde{y}(t) + Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace affine de dimension 1
  - Avec une solution particulière

$$\tilde{y}(t) \quad \text{t.q.} \quad \tilde{y}'(t) + a(t)\tilde{y}(t) = b(t),$$

  - Solution générale

$$y(t) = \tilde{y}(t) + Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Méthode de variation de la constante

$$y(t) = C(t)e^{-\int^t a(s)ds}$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace affine de dimension 1
  - Avec une solution particulière

$$\tilde{y}(t) \quad \text{t.q.} \quad \tilde{y}'(t) + a(t)\tilde{y}(t) = b(t),$$

  - Solution générale

$$y(t) = \tilde{y}(t) + Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Méthode de variation de la constante

$$y(t) = C(t)e^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Solution générale

$$C(t) = C + \int^t b(\tau)e^{\int^\tau a(s)ds}d\tau$$

Equations linéaires d'ordre 1

- Equation à coefficient variable avec second membre

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t), \quad a \in C^0(\mathbb{R}), \quad b \in C^0(\mathbb{R})$$

  - Ensemble des solutions : espace affine de dimension 1
  - Avec une solution particulière

$$\tilde{y}(t) \quad \text{t.q.} \quad \tilde{y}'(t) + a(t)\tilde{y}(t) = b(t),$$

  - Solution générale

$$y(t) = \tilde{y}(t) + Ce^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Méthode de variation de la constante

$$y(t) = C(t)e^{-\int^t a(s)ds}$$

  - Solution générale

$$C(t) = C + \int^t b(\tau)e^{\int^\tau a(s)ds} d\tau$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

    - $\Delta > 0$: Solution générale

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

    - $\Delta > 0$: Solution générale

$$y(t) = C_- e^{r_- t} + C_+ e^{r_+ t}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

    - $\Delta > 0$: Solution générale

$$y(t) = C_- e^{r_- t} + C_+ e^{r_+ t}$$

    - $\Delta = 0$: Solution générale

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

- $\Delta > 0$: Solution générale

$$y(t) = C_- e^{r_- t} + C_+ e^{r_+ t}$$

- $\Delta = 0$: Solution générale

$$y(t) = (Cx + K)e^{rt}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

    - $\Delta > 0$: Solution générale

$$y(t) = C_- e^{r_- t} + C_+ e^{r_+ t}$$

    - $\Delta = 0$: Solution générale

$$y(t) = (Cx + K)e^{rt}$$

    - $\Delta < 0$: Solution générale

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Résolution classique
  - Ensemble des solutions : espace vectoriel de dimension 2
  - Equation caractéristique

$$r^2 + ar + b = 0$$

    - $\Delta > 0$: Solution générale

$$y(t) = C_- e^{r_- t} + C_+ e^{r_+ t}$$

    - $\Delta = 0$: Solution générale

$$y(t) = (Cx + K)e^{rt}$$

    - $\Delta < 0$: Solution générale

$$y(t) = e^{\alpha t}\left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)\right), \quad r_\pm = \alpha \pm i\beta$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} r_- & 0 \\ 0 & r_+ \end{pmatrix}, \quad r_\pm^2 + ar_\pm + b = 0$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} r_- & 0 \\ 0 & r_+ \end{pmatrix}, \quad r_\pm^2 + ar_\pm + b = 0$$

et

$$\mathbf{w}(t) = P^{-1}\mathbf{z}(t) \rightsquigarrow \mathbf{w}'(t) = D\mathbf{w}(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} r_- & 0 \\ 0 & r_+ \end{pmatrix}, \quad r_\pm^2 + ar_\pm + b = 0$$

et

$$\mathbf{w}(t) = P^{-1}\mathbf{z}(t) \rightsquigarrow \mathbf{w}'(t) = D\mathbf{w}(t)$$

d'où

$$\mathbf{w}_1(t) = C_1 e^{r_- t}, \quad \mathbf{w}_2(t) = C_2 e^{r_+ t},$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A diagonalisable (dans $\mathbb{C}$)

$$A = PDP^{-1}, \qquad D = \begin{pmatrix} r_- & 0 \\ 0 & r_+ \end{pmatrix}, \quad r_\pm^2 + ar_\pm + b = 0$$

    et

$$\mathbf{w}(t) = P^{-1}\mathbf{z}(t) \rightsquigarrow \mathbf{w}'(t) = D\mathbf{w}(t)$$

    d'où

$$\mathbf{w}_1(t) = C_1 e^{r_- t}, \quad \mathbf{w}_2(t) = C_2 e^{r_+ t},$$

    et finalement

$$y(t) = \mathcal{R}(\mathbf{z}_1(t)), \quad \mathbf{z}_1(t) = P_{11}\mathbf{w}_1(t) + P_{12}\mathbf{w}_2(t) = C_- e^{r_- t} + C_+ e^{r_+ t}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A non diagonalisable

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A non diagonalisable

$$A = PJP^{-1}, \qquad J = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \qquad r = -\frac{a}{2}$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A non diagonalisable

$$A = PJP^{-1}, \qquad J = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \qquad r = -\frac{a}{2}$$

et

$$\mathbf{w}(t) = P^{-1}\mathbf{z}(t) \rightsquigarrow \mathbf{w}'(t) = J\mathbf{w}(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A non diagonalisable

$$A = PJP^{-1}, \qquad J = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \qquad r = -\frac{a}{2}$$

et

$$\mathbf{w}(t) = P^{-1}\mathbf{z}(t) \rightsquigarrow \mathbf{w}'(t) = J\mathbf{w}(t)$$

d'où

$$\mathbf{w}_2(t) = C_2 e^{rt}, \quad \mathbf{w}_1(t) = (C_2 t + C_1)e^{rt},$$

Equations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = 0, \quad y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

- Ecriture sous forme de système d'ordre 1

$$\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t), \quad \mathbf{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \tilde{y}(t) := y'(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix}$$

  - A non diagonalisable

$$A = PJP^{-1}, \qquad J = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{pmatrix}, \qquad r = -\frac{a}{2}$$

et

$$\mathbf{w}(t) = P^{-1}\mathbf{z}(t) \rightsquigarrow \mathbf{w}'(t) = J\mathbf{w}(t)$$

d'où

$$\mathbf{w}_2(t) = C_2 e^{rt}, \quad \mathbf{w}_1(t) = (C_2 t + C_1)e^{rt},$$

et finalement

$$y(t) = \mathbf{z}_1(t) = (Ct + \tilde{C})e^{rt}$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) &= \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) &= \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

De la définition de $y(t)$, il suit

$$y'(t) = \alpha'(t)y_1(t) + \alpha(t){y_1}'(t) + \beta'(t)y_2(t) + \beta(t)y_2'(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) &= \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

De la définition de $y(t)$, il suit

$$y'(t) = \alpha'(t)y_1(t) + \alpha(t){y_1}'(t) + \beta'(t)y_2(t) + \beta(t)y_2'(t)$$

De $\tilde{y}(t) := y'(t)$, il vient alors

$$\alpha'(t)y_1(t) + \beta'(t)y_2(t) = 0$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) &= \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

De plus $\mathbf{z}(t)$ est solution de l'équation avec second membre

$$\tilde{y}'(t) + a\tilde{y}(t) + by(t) = f(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite comme système d'ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) &= \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

De plus $\mathbf{z}(t)$ est solution de l'équation avec second membre

$$\tilde{y}'(t) + a\tilde{y}(t) + by(t) = f(t)$$

et puisque $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ solutions de l'équation homogène

$$\alpha'(t)\tilde{y}_1(t) + \beta'(t)\tilde{y}_2(t) = f(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite sous forme système ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) &= \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{aligned}$$

De plus $\mathbf{z}(t)$ est solution de l'équation avec second membre

$$\tilde{y}'(t) + a\tilde{y}(t) + by(t) = f(t)$$

et puisque $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ solutions de l'équation homogène

$$\alpha'(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2'(t) = f(t)$$

Equations linéaires d'ordre 2 avec second membre

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = f(t), \quad f \in C^0(\mathbb{R})$$

- Méthode de Variation de la constante
  - Hypothèse : On connait deux solutions indépendantes $\mathbf{z}_1(t)$ et $\mathbf{z}_2(t)$ de l'équation homogène écrite sous forme système ordre 1
  - On cherche alors une solution sous la forme

$$\mathbf{z}(t) = \alpha(t)\mathbf{z}_1(t) + \beta(t)\mathbf{z}_2(t)$$

soit encore

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \alpha(t)y_1(t) + \beta(t)y_2(t) \\ \tilde{y}(t) & = & \alpha(t)\tilde{y}_1(t) + \beta(t)\tilde{y}_2(t) \end{array}$$

D'où finalement le système sur $\alpha'(t)$ et $\beta'(t)$

$$\begin{array}{rcl} \alpha'(t)y_1(t) + \beta'(t)y_2(t) & = & 0 \\ \alpha'(t)y_1'(t) + \beta'(t)y_2'(t) & = & f(t) \end{array}$$

qui est un système **algébrique** (sur des fonctions...) !

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = -\frac{1}{at+b}, \quad b \in \mathbb{R}$$

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = -\frac{1}{at+b}, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0$

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - ay_0 t}$$

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = -\frac{1}{at+b}, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0$

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - ay_0 t}$$

- Cas $y_0 > 0$

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = -\frac{1}{at+b}, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0$

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - ay_0 t}$$

- Cas $y_0 > 0$
  - Cas $a < 0$

    $\rightsquigarrow$ Existence globale sur $\mathbb{R}_+$

Equations non linéaires - 1

$$y'(t) = ay^2(t) \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = -\frac{1}{at+b}, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0$

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - ay_0 t}$$

- Cas $y_0 > 0$
  - Cas $a < 0$
    $\rightsquigarrow$ Existence globale sur $\mathbb{R}_+$
  - Cas $a > 0$
    $\rightsquigarrow$ Explosion en temps fini : existence sur l'intervalle $[0, \frac{1}{ay_0}]$

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = (at+b)^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = (at + b)^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0 > 0$

$$y(t) = (at + \sqrt{y_0})^2$$

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = (at + b)^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = y_0 > 0$

$$y(t) = (at + \sqrt{y_0})^2$$

$\rightsquigarrow$ Solution globale sur $\mathbb{R}_+$

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = (at + b)^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = 0$

$$y(t) = a^2 t^2$$

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = (at+b)^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = 0$

$$y(t) = a^2 t^2$$

Mais $y(t) = 0$ est aussi solution !!! $\rightsquigarrow$ Pas unicité

Equations non linéaires - 2

$$y'(t) = 2a\sqrt{y(t)} \quad a \in \mathbb{R}$$

- Equation autonome à variables séparables
- Solution générale

$$y(t) = (at+b)^2, \quad b \in \mathbb{R}$$

- Solution du problème de Cauchy avec $y(0) = 0$

$$y(t) = a^2 t^2$$

Mais $y(t) = 0$ est aussi solution !!! $\rightsquigarrow$ Pas unicité

- Infinité de solutions

$$\forall T_0 \in \mathbb{R}_+ \qquad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \in [0, T_0] \\ a^2(t-T_0)^2 & \text{si} \quad t > T_0 \end{cases}$$

Vidange d'une cuve

- Conservation de l'énergie

$$\frac{u^2}{2} + gz = C_0$$

Vidange d'une cuve

- Conservation de l'énergie

$$\frac{u^2}{2} + gz = C_0$$

  - A la surface

$$u \approx 0$$

Vidange d'une cuve

- Conservation de l'énergie

$$\frac{u^2}{2} + gz = C_0$$

  - A la surface

$$u \approx 0$$

  - Au niveau du robinet

$$z \approx 0$$

Vidange d'une cuve

- Conservation de l'énergie

$$\frac{u^2}{2} + gz = C_0$$

  - A la surface

$$u \approx 0$$

  - Au niveau du robinet

$$z \approx 0$$

$\leadsto$ Vitesse au niveau du robinet

$$u = \sqrt{2gh}$$

Vidange d'une cuve

- Conservation de l'énergie

$$\frac{u^2}{2} + gz = C_0$$

  - A la surface

$$u \approx 0$$

  - Au niveau du robinet

$$z \approx 0$$

  $\rightsquigarrow$ Vitesse au niveau du robinet

$$u = \sqrt{2gh}$$

- Equation sur la hauteur de l'eau dans la cuve

Vidange d'une cuve

- Conservation de l'énergie

$$\frac{u^2}{2} + gz = C_0$$

  - A la surface

$$u \approx 0$$

  - Au niveau du robinet

$$z \approx 0$$

  $\rightsquigarrow$ Vitesse au niveau du robinet

$$u = \sqrt{2gh}$$

- Equation sur la hauteur de l'eau dans la cuve

$$Lh'(t) = -l\sqrt{2gh(t)}$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

- Datation Carbone 14

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -\alpha y(t), \quad y(t_f) = y_f, \quad \alpha > 0$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

- Datation Carbone 14

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -\alpha y(t), \quad y(t_f) = y_f, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$y(t) = y_f e^{\alpha(t_f - t)}$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

- Datation Carbone 14

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -\alpha y(t), \quad y(t_f) = y_f, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$y(t) = y_f e^{\alpha(t_f - t)}$$

- Vidange d'une cuve

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -2\alpha\sqrt{y(t)}, \quad y(t_f) = y_f > 0, \quad \alpha > 0$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

- Datation Carbone 14

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -\alpha y(t), \quad y(t_f) = y_f, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$y(t) = y_f e^{\alpha(t_f - t)}$$

- Vidange d'une cuve

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -2\alpha\sqrt{y(t)}, \quad y(t_f) = y_f > 0, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$y(t) = (-\alpha t + \sqrt{y_f})$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

- Datation Carbone 14

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -\alpha y(t), \quad y(t_f) = y_f, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$y(t) = y_f e^{\alpha(t_f - t)}$$

- Vidange d'une cuve

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -2\alpha\sqrt{y(t)}, \quad y(t_f) = 0, \quad \alpha > 0$$

Accès au passé

- Problème de Cauchy final

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = f(t, y(t)), \quad y(t_f) = y_f$$

- Datation Carbone 14

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -\alpha y(t), \quad y(t_f) = y_f, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$y(t) = y_f e^{\alpha(t_f - t)}$$

- Vidange d'une cuve

$$\forall t \in]-\infty, t_f] \quad y'(t) = -2\alpha\sqrt{y(t)}, \quad y(t_f) = 0, \quad \alpha > 0$$

Solution

$$\exists T_0 \in \mathbb{R}_- \qquad y(t) = \begin{cases} \alpha^2(t - T_0)^2 & \text{si} \quad t < T_0 \\ 0 & \text{si} \quad t \in [T_0, t_f] \end{cases}$$