MACS 1 - Equations Différentielles - TD 1
Equations résolubles par quadrature

1 EDO linéaire ordre 1

On étudie l'équation posée sur $\mathbb{R}$

$$y'(t) + ty(t) = 2t$$

1. Identifier la constante de Lipschitz dans ce cas particulier.
2. Tracer les champs de vecteur dans le plan (t, y) et l'allure des courbes intégrales.
3. Calculer la solution générale de l'équation.
4. Résoudre le problème de Cauchy pour y(1) = 1.

Reprendre les mêmes questions pour les équations

$$y' + 7y = \sin t, \quad y' + 2ty = t, \quad (t \ln t)y' + y = 2 \ln t, \quad ty' + 6y = 3t + 1$$

2 EDO linéaire ordre 2

1. Trouver les solutions générales de l'équation
$$y'' + y' = +x + \operatorname{ch} x$$
2. Trouver les solutions générales de l'équation
$$y'' + y' + y = x^2 + x + 1$$
3. Trouver la solution du problème de Cauchy
$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$$

3 EDO ordre 1 autonome

On considère le problème de Cauchy posé sur $\mathbb{R}$

$$y' = \cos^2 y, \quad y(t_0) = y_0$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution globale.
2. Dans le plan (t, y), tracer les champs de vecteur associés à cette équation.
3. Montrer que la solution est bornée uniformément en temps et donner explicitement les bornes de l'intervalle en fonction de la donnée de Cauchy y_0.
4. En supposant $y0 \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $t_0 = 0$, calculer la solution du problème de Cauchy.

4 Equation de Bernoulli

On fixe $m \in \mathbb{Z}$. On considère ici l'équation suivante, posée sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

$$y'(t) + a(t)\, y(t) + b(t)\, y^m(t) = 0$$

1. Identifier la fonction f qui permet d'écrire cette équation comme un système d'ordre 1. Discuter de son caractère (localement) lipschitzien suivant la valeur du paramètre m.
2. Que peut-on dire des cas $m = 0$ et $m = 1$?
3. Dans les autres cas, et en supposant la solution strictement positive sur l'intervalle J, identifier le changement de variable de la forme $u = y^p$ qui permet de se ramener à une équation linéaire sur la variable u.
4. En déduire la forme de la solution générale de l'équation de Bernoulli.
5. Exemples d'application
$$y' + y = -t, \quad t\, y' + y = y^2\, (\ln t)$$

5 Equation de Ricatti

On fixe $m \in \mathbb{Z}$. On considère ici l'équation suivante, posée sur un intervalle $J \subset \mathbb{R}$.

$$y'(t) + a(t)\, y(t) + b(t)\, y^2(t) = c(t)$$

1. Identifier la fonction f qui permet d'écrire cette équation comme un système d'ordre 1. Montrer qu?elle est localement lipschitzienne.
2. Montrer que, si on connaît une solution exacte $\tilde{y}$, la fonction $u = y?\tilde{y}$ est solution d?une équation de Bernoulli.
3. En déduire une méthode de calcul de la solution générale d'une équation de Ricatti.
4. Exemples d'application

$$t^3 y' + t^2 y + y^2 + 2t^4 = 0, \quad y' + \frac{y}{t} - y^2 + \frac{1}{t^2} = 0$$

6 Equation de Clairaut

On étudie ici une équation de la forme, avec f une fonction continûment dérivable

$$y - xy' + f(y') = 0 \tag{1}$$

1. En dérivant l'équation (1), montrer qu'il existe des solutions telles que $y''(x) = 0$.
2. Montrer que ces solutions sont alors de la forme

   $$y(x) = Cx - f(C), \quad C \in \mathbb{R}$$

3. Montrer que l'enveloppe de ces droites est donnée par la courbe paramétrée

   $$x(t) = f'(t), \quad y(t) = tf'(t) - f(t)$$

4. Montrer que cette enveloppe est solution de l'équation (1).
5. Appliquer le raisonnement ci-dessus dans le cas particulier

   $$f(t) = t^2 + t$$

   Tracer l'ensemble des des courbes intégrales.

7 Equation d'Euler

On étudie ici une équation de la forme, avec f une fonction continue

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y^{(k)}(x) = f(x), \quad a_k \in \mathbb{R} \tag{2}$$

1. On se place sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que les changements de variable $x = e^{-u}$ et $g(u) = y(e^{-u})$ permettent de se ramener à une équation différentielle linéaire à coefficients constants sur g. Adapter le raisonnement sur $\mathbb{R}_-^*$. Que dire du raccordement des solutions en 0 ?
2. Etudier les solutions générales de l'équation sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$

   $$x^2y'' + xy' - 4y = 4x^2$$

   Etudier le raccordement en 0.
3. Etudier les solutions générales de l'équation sur $]-1, +\infty[$ et $\mathbb{R}_+^*$

   $$x^2y'' + 4xy' + 2y = \ln(1 + x)$$

   Etudier le raccordement en 0.

8 Au delà des EDO...

On cherche toutes les fonctions deux fois dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f''(x) + f(-x) = x$$

En introduisant les fonctions

$$g(x) = f(x) + f(-x), \quad h(x) = f(x) - f(-x)$$

montrer qu'on peut ramener le problème à la résoution de deux équations différentielles sur les fonctions g et h. Trouver les solutions générales de ces deux équations et en déduire les solutions du problème posé.

9 Approximations numériques

1. Calculer la solution du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}_+$

$$y'(t) = -y^2(t), \quad y(0) = 1$$

2. Calculer les premières approximations obtenues par la méthode du point fixe en choisissant comme point de départ la fonction constante égale à 1.

3. Calculer les premières approximations obtenues par la méthode de Newton utilisant les développements de Taylor.

4. En se plaçant sur l'intervalle $[0, 10]$, et à l'aide d'un programme MATLAB, calculer les approximations obtenues par la méthode d'Euler avec 100 points. Comparer les trois résultats.