



# TsunaMaths

Mathématiques pour la planète Terre

Equipe projet ANGE

E. Audusse – M.O. Bristeau – R. Hamouda – J. Sainte-Marie

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications  
Institut Galilée – Université Paris 13

# Terre et Mathématiques

Une vieille histoire...

« Les nombres ordonnent le monde. »

*Pythagore (580-495)*

« Que nul n'entre ici s'il n'est géomètre. »

*Platon (428-348)*

« La nature est un livre écrit en langage mathématique. »

*Galilée (1564-1642)*

« Ce qui est incompréhensible, c'est que le monde soit compréhensible. »

*Einstein (1879-1955)*



Deutsches Technikmuseum Berlin - 27 March 2014 to 31 March 2015



Dune-Ash



Future of Glaciers



TsunaMaths

# Tsunami : D'hier...

« Artabaze était depuis trois mois devant Potidée lorsqu'un jour la mer se retira très loin du rivage et pendant longtemps ; quand les Barbares virent les bas-fonds découverts par les eaux, ils passèrent par là pour pénétrer dans la presqu'île de Pallène. Ils avaient déjà fait les deux-cinquièmes du chemin, lorsque la mer se mit à monter, plus haut qu'elle ne l'avait jamais fait, selon les gens de ce pays où de telles marées sont fréquentes. Les soldats qui ne savaient pas nager périrent, et les gens de Potidée vinrent en barque massacrer les autres. Cette marée si forte et le malheur des Perses eurent pour cause, disent les Potidéates, la profanation du temple de Poséidon et de sa statue, qui sont dans le faubourg de la ville, par les soldats perses, ceux-là justement que la mer fit périr ; en en donnant cette cause, ils me paraissent d'ailleurs dire vrai. »

*L'enquête. Hérodote (484-420)*

« On vit à Orobiaï, en Eubée, la mer s'éloigner de ce qui était alors le rivage, puis se soulever et déferler sur une partie du territoire de cette cité, dont une certaine étendue resta submergée, alors qu'ailleurs les flots se retiraient. [...] Ces raz de marée sont provoqués, selon moi, par les séismes. Là où la secousse est la plus forte, les flots sont entraînés loin du rivage, avant de revenir brusquement pour déferler sur les terres avec d'autant plus de violence. Je ne crois pas que ce phénomène puisse se produire s'il n'y a pas de tremblement de terre. »

*La guerre du Péloponnèse. Thucydide (460-395)*

# Tsunami : D'hier...

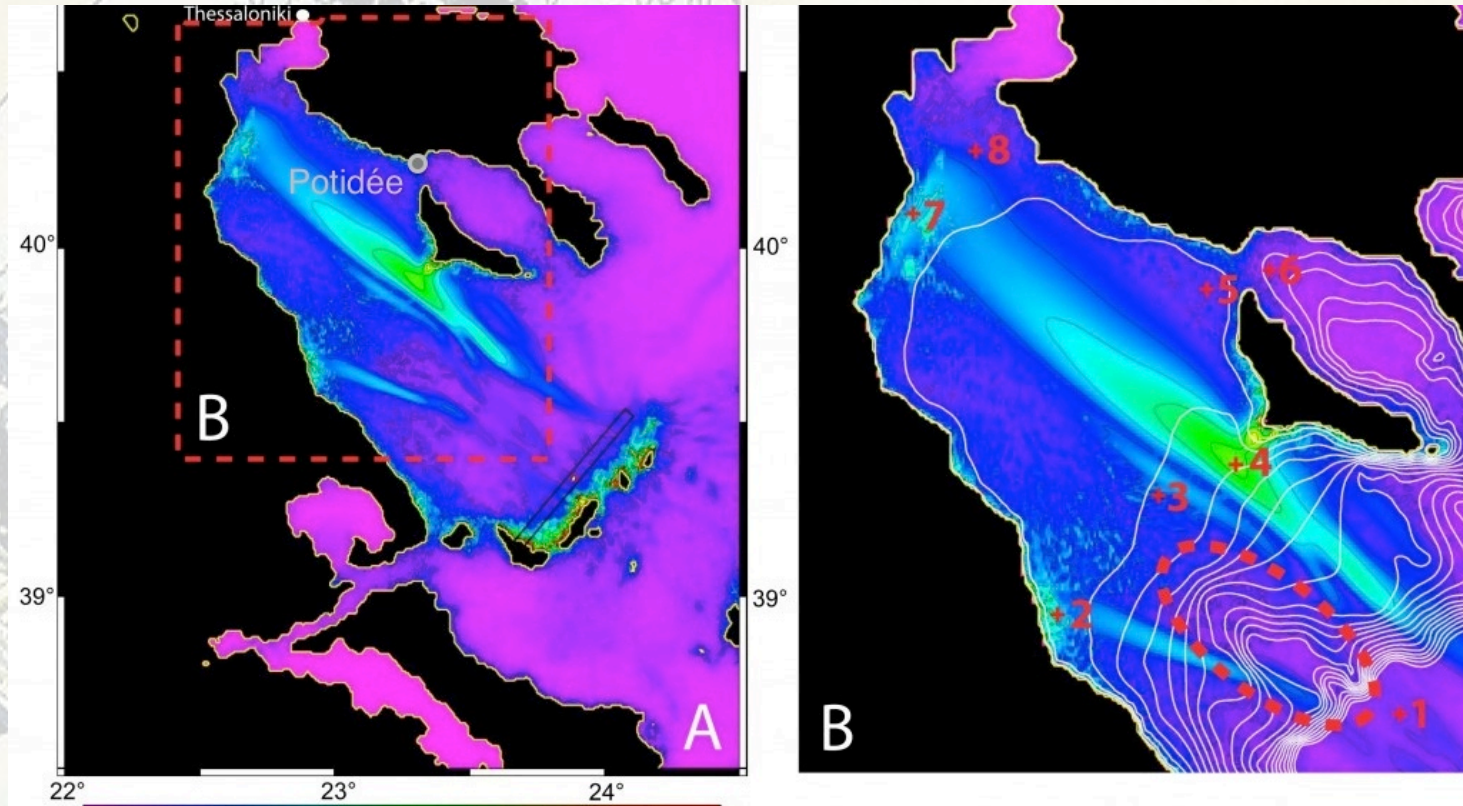
« Artabaze était depuis trois mois devant Potidée lorsqu'un jour la mer se retira très loin du rivage et pendant longtemps ; quand les Barbares virent les bas-fonds découverts par les eaux, ils passèrent par là pour pénétrer dans la presqu'île de Pallène. Ils avaient déjà fait les deux-cinquièmes du chemin, lorsque la mer se mit à monter, plus haut qu'elle ne l'avait jamais fait, selon les gens de ce pays où de telles marées sont fréquentes. Les soldats qui ne savaient pas nager périrent, et les gens de Potidée vinrent en barque massacrer les autres. Cette marée si forte et le malheur des Perses eurent pour cause, disent les Potidéates, la profanation du temple de Poséidon et de sa statue, qui sont dans le faubourg de la ville, par les soldats perses, ceux-là justement que la mer fit périr ; en en donnant cette cause, ils me paraissent d'ailleurs dire vrai. »

*L'enquête. Hérodote (484-420)*

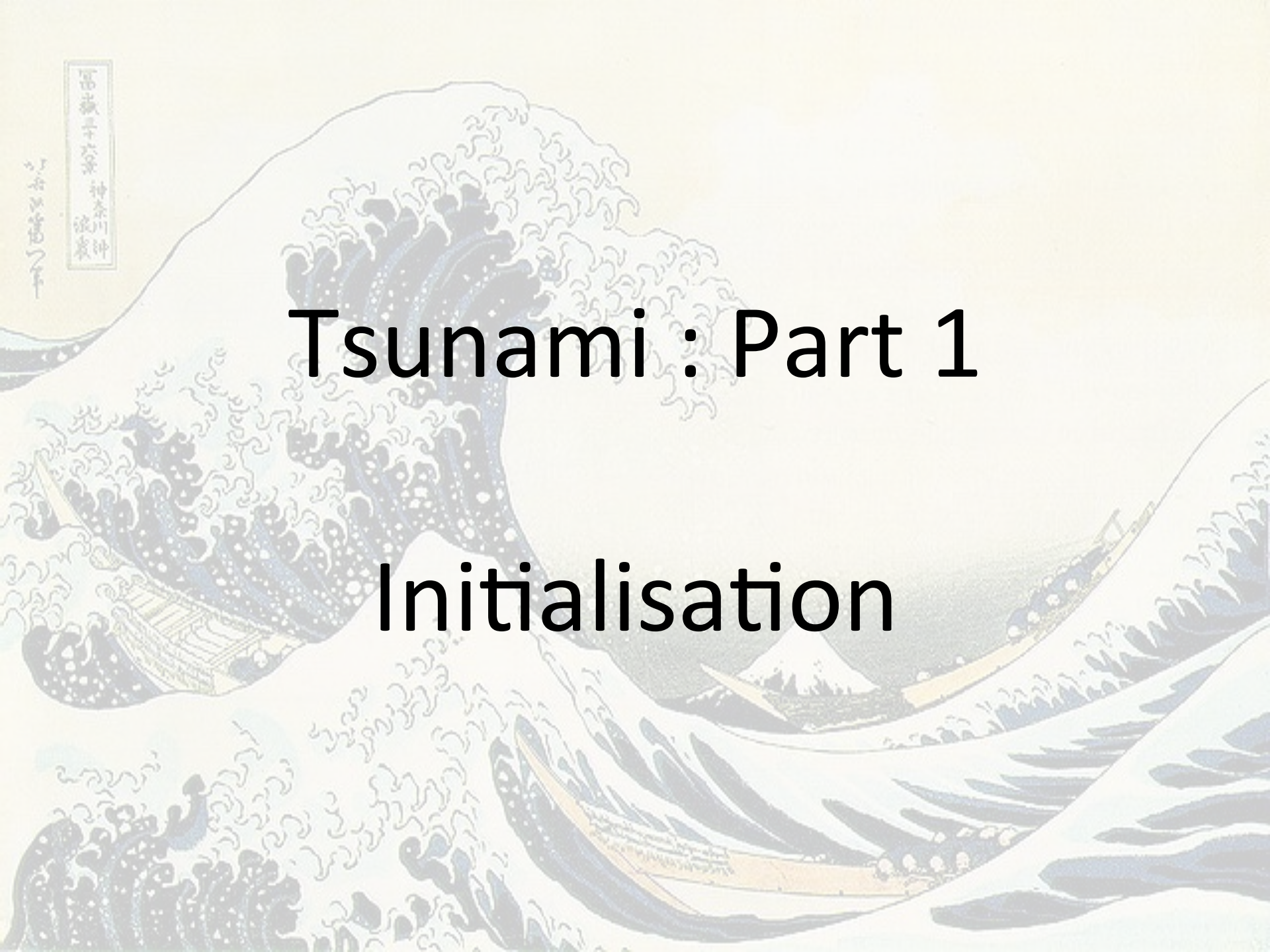
« On vit à Orobiaï, en Eubée, la mer s'éloigner de ce qui était alors le rivage, puis se soulever et déferler sur une partie du territoire de cette cité, dont une certaine étendue resta submergée, alors qu'ailleurs les flots se retiraient. [...] Ces raz de marée sont provoqués, selon moi, par les séismes. Là où la secousse est la plus forte, les flots sont entraînés loin du rivage, avant de revenir brusquement pour déferler sur les terres avec d'autant plus de violence. Je ne crois pas que ce phénomène puisse se produire s'il n'y a pas de tremblement de terre. »

*La guerre du Péloponnèse. Thucydide (460-395)*

# ...à aujourd'hui



**Holocene tsunamigenic sediments and tsunami modelling in the  
Thermaikos Gulf area (northern Greece)**  
Zeitschrift für Geomorphologie, Reicherter et al. (2010)



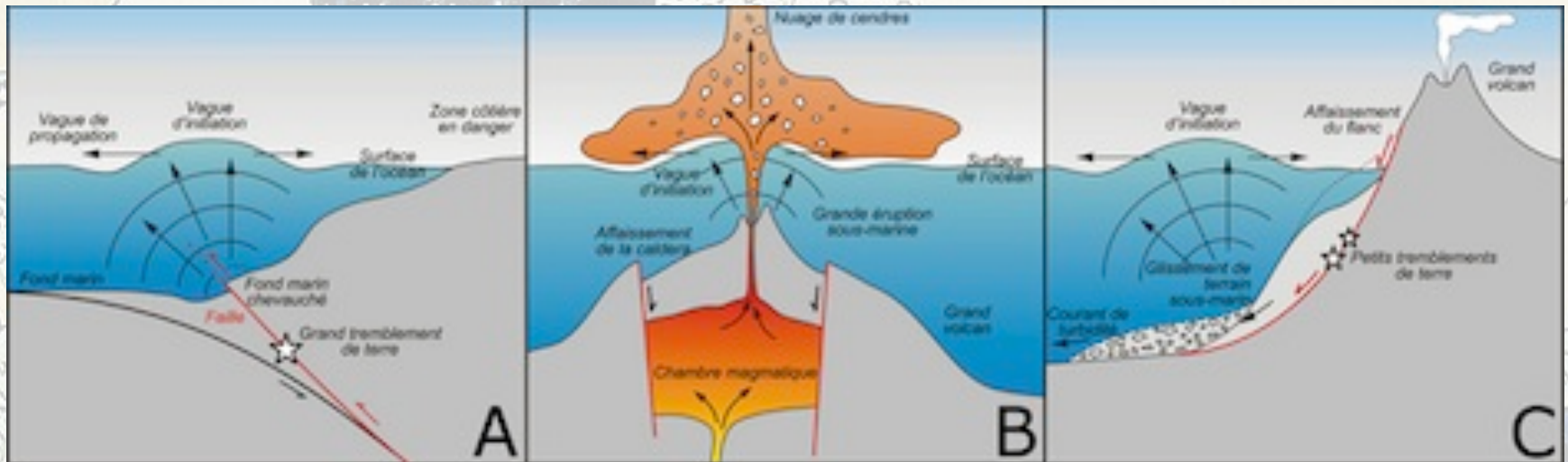
富嶽三十六景 神奈川沖  
波裏

一八三〇年

# Tsunami : Part 1

## Initialisation

# Tsunamis : Causes possibles



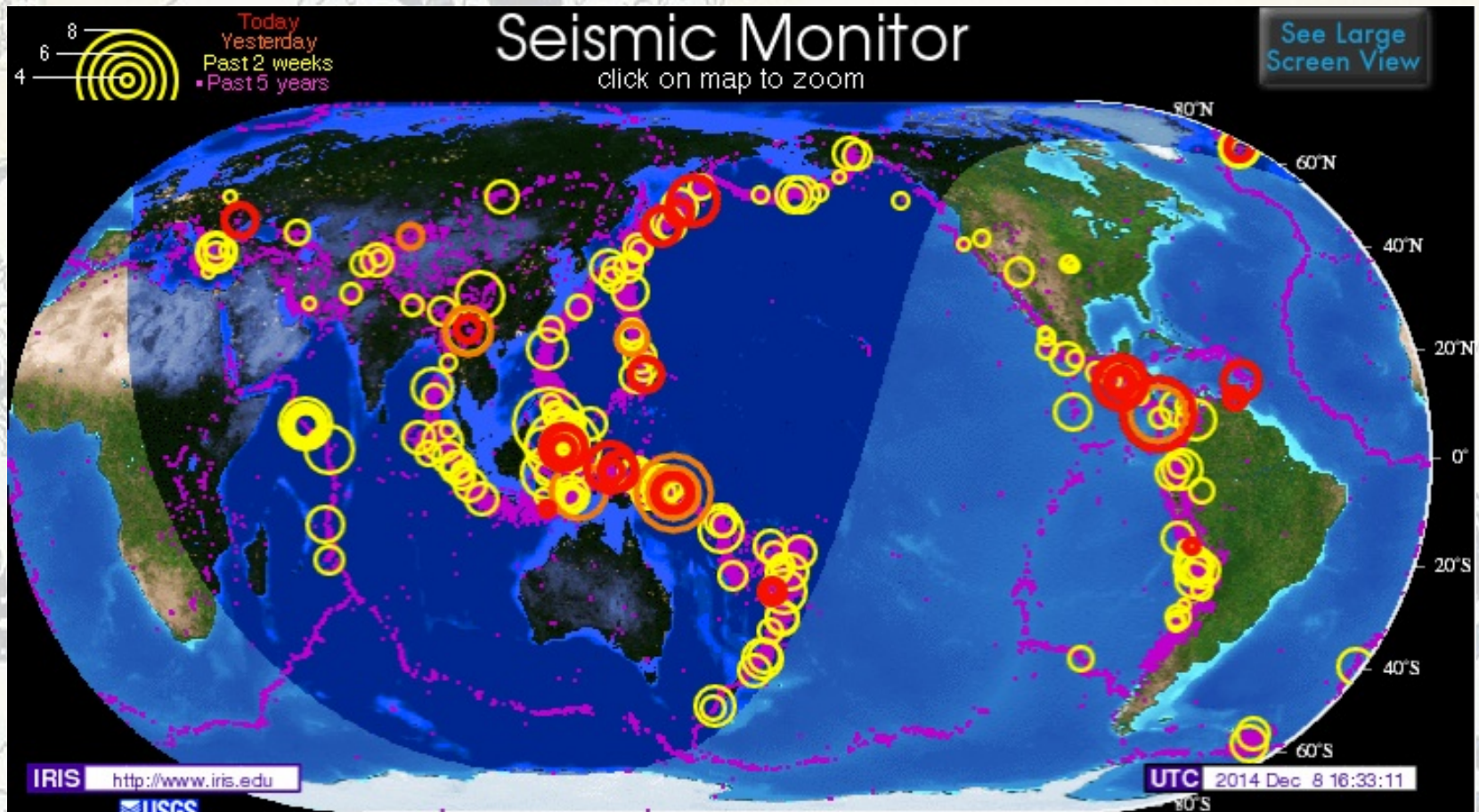
Séismes

Eruption  
volcanique

Glissement  
de terrain



# Séismes : Où ont-ils lieu ?



Source : Incorporated Research Institutions for Seismology,  
United States Geological Survey

# Séismes : Où ont-ils lieu ?



Source : AFP

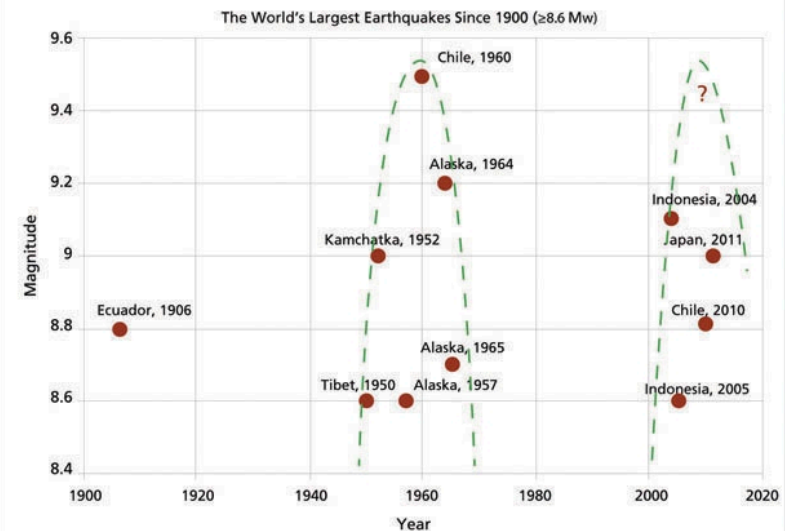
# Séismes : Quand ont-ils lieu ?

## Le Pacifique théâtre des plus puissants séismes



Trop peu de données pour tirer des conclusions statistiques...  
 mais la répartition n'est manifestement pas uniforme !

TEMPORAL DISTRIBUTION OF  $\geq 8.6$  Mw AND LARGER EARTHQUAKES WORLDWIDE SINCE 1900

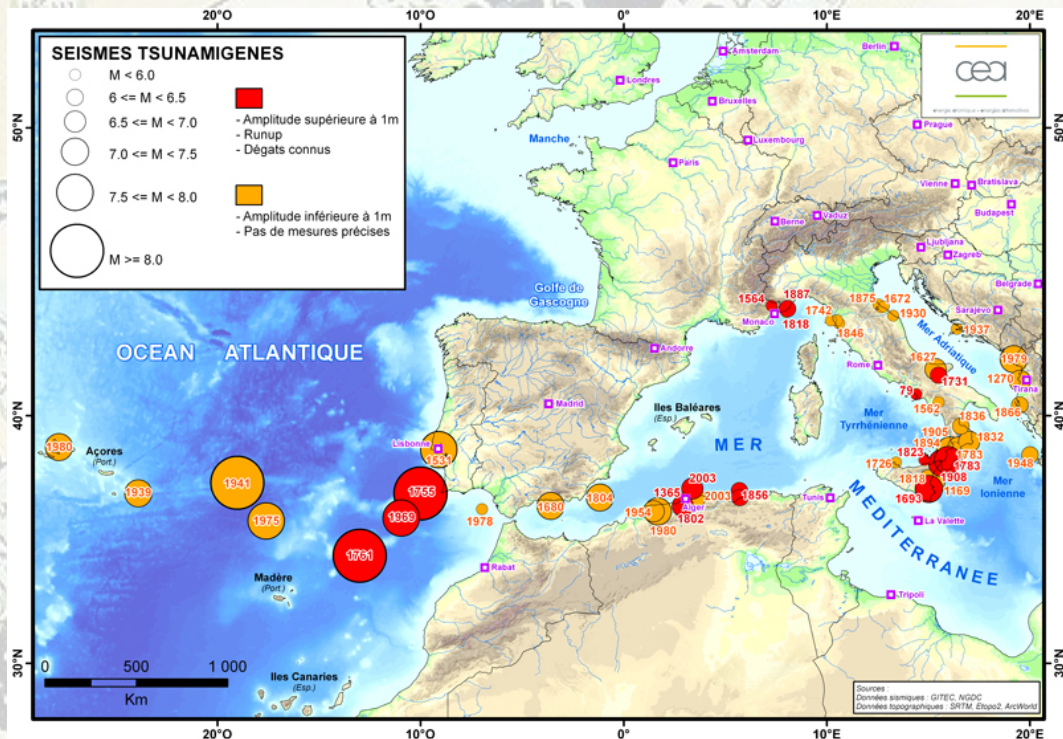


Source : AFP

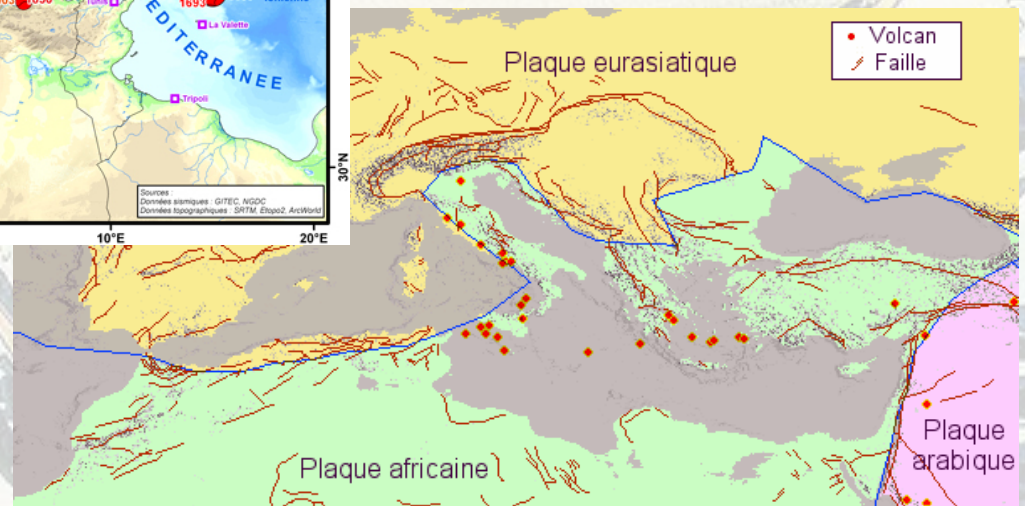
Source : BSSA, 2005

Source: Bufe, C.G., and D.M. Perkins (2005). "Evidence for a Global Seismic-Moment Release Sequence", *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol. 95, pp. 833-843.

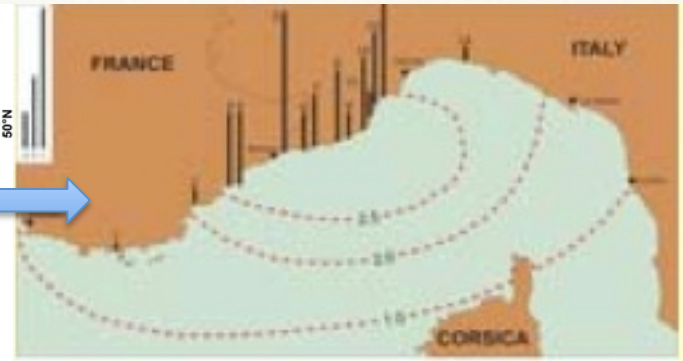
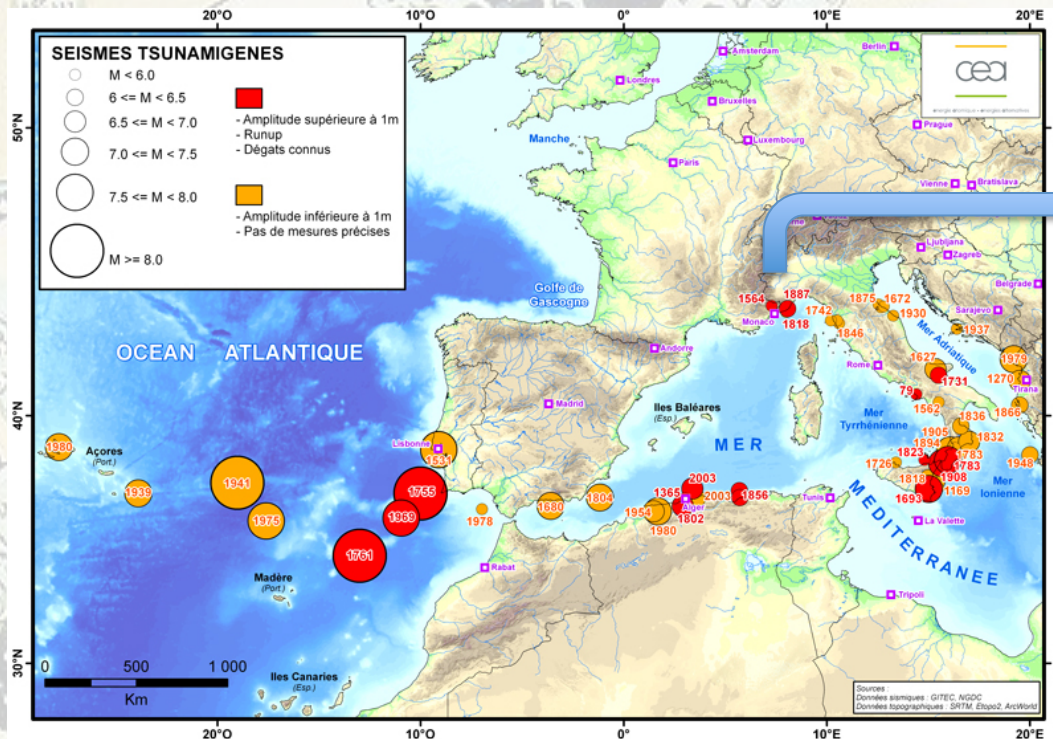
# Séismes : En Méditerranée aussi !



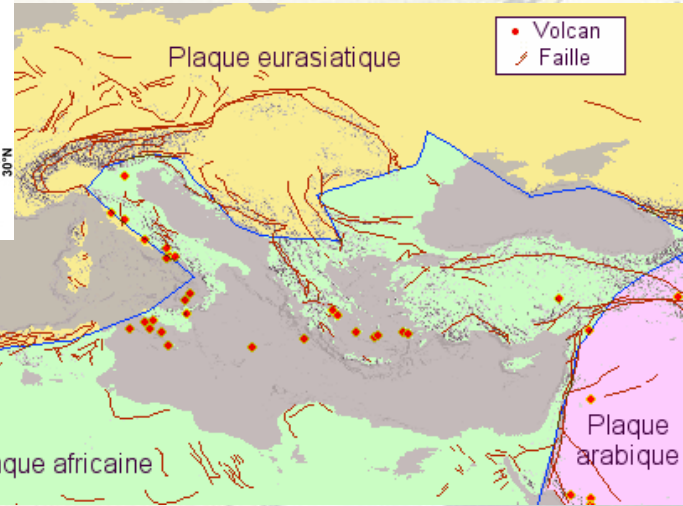
Source : CEA, CENALT



# Séismes : En Méditerranée aussi !



Source : GeoAzur, IRSN



Source : CEA, CENALT

# Tsunamis en Méditerranée

Date	Lieu d'origine	Magnitude	Vague
Vers - 1650	Santorin	Eruption volcanique	> 40m ?
365	Crête	8,5	10m ?
373	Helike	7	10m ?
1303	Rhodes	8	???
1365	Alger	7	???
1755	Lisbonne	8	4m
1908	Messine	7	8m

7 évènements importants en 3000 ans...

# Tsunamis au Japon

Année	Magnitude	Amplitude maximale du tsunami mesurée par un marégraphe	Dommages (selon la classification japonaise)
1933	8.1	143	6
1944	7.9	115	5
1946	8.0	280	5
1952	8.2	100	1
1960	8.5/9.5	305	4
1964	7.5	140	2
1968	7.5	116	2
1968	7.9	295	2
1969	7.8	130	2
1973	7.4	>280	2
1983	7.7	194	4
1993	7.8	>175	5
1994	8.2	168	2
1996	8.1	104	1
2003	8.0	255	3
2004	7.1	66	1

16 évènements importants en 70 ans !!!

# Séismes : Echelle de Richter

Magnitude	Effets engendrés
9	Destruction totale à l'épicentre, et possible sur plusieurs milliers de km
8	Dégâts majeurs à l'épicentre, et sur plusieurs centaines de km
7	Importants dégâts à l'épicentre, secousse ressentie à plusieurs centaines de km
6	Dégâts à l'épicentre dont l'ampleur dépend de la qualité des constructions
5	Tremblement fortement ressenti, dommages mineurs près de l'épicentre
4	Secousse sensible, mais pas de dégâts
3	Seuil à partir duquel la secousse devient sensible pour la plupart des gens
2	Secousse ressentie uniquement par des gens au repos
1	Secousse imperceptible

- Mesures établies à partir des données relevées par les sismographes

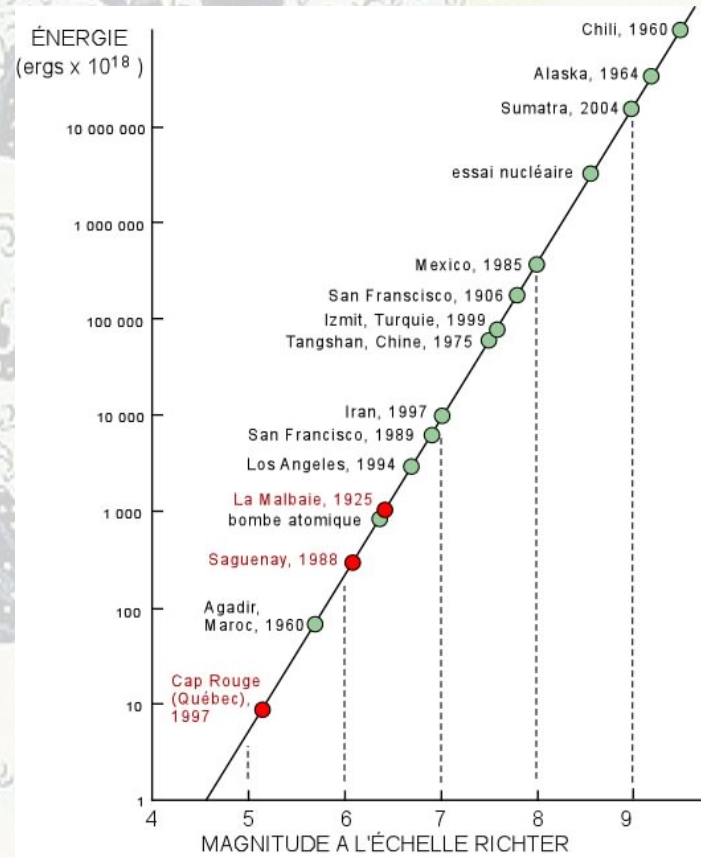


# Séismes : Echelle de Richter

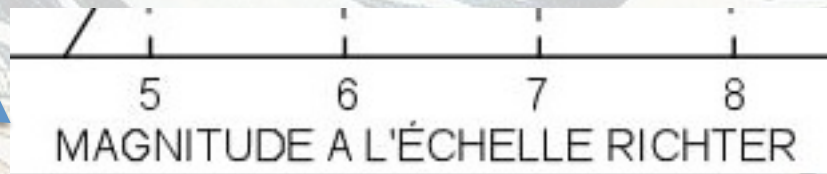
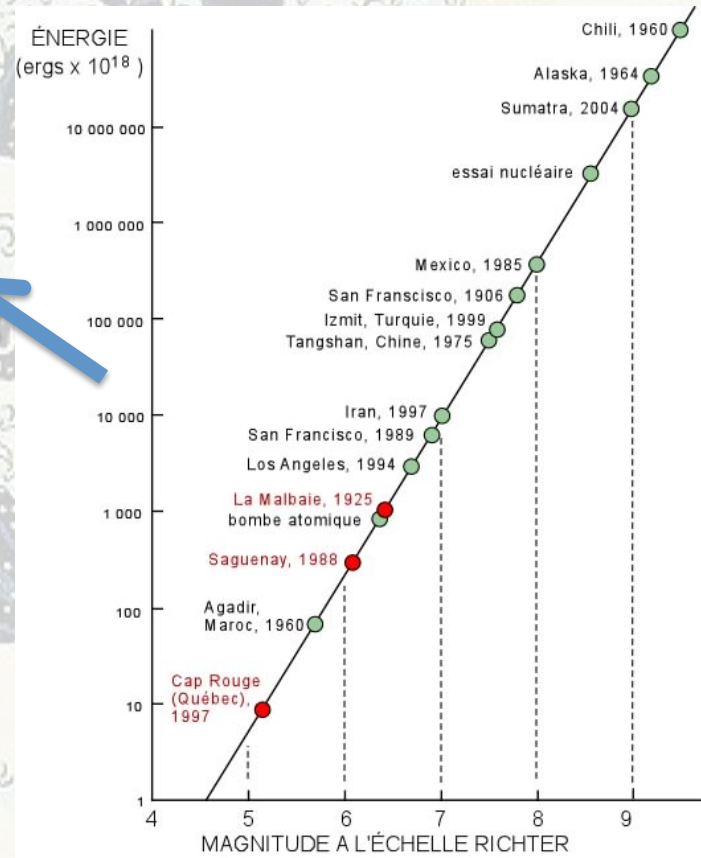
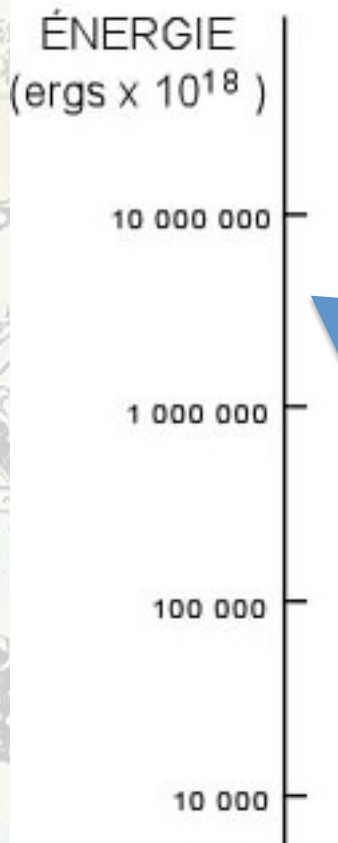
Magnitude	Effets engendrés
9	Destruction totale à l'épicentre, et possible sur plusieurs milliers de km
8	Dégâts majeurs à l'épicentre, et sur plusieurs centaines de km
7	Importants dégâts à l'épicentre, secousse ressentie à plusieurs centaines de km
6	Dégâts à l'épicentre dont l'ampleur dépend de la qualité des constructions
5	Tremblement fortement ressenti, dommages mineurs près de l'épicentre
4	Secousse sensible, mais pas de dégâts
3	Seuil à partir duquel la secousse devient sensible pour la plupart des gens
2	Secousse ressentie uniquement par des gens au repos
1	Secousse imperceptible

- Mesures établies à partir des données relevées par les sismographes
- Echelle basée sur la quantité d'énergie libérée par le séisme
- Pas de minimum ni de maximum a priori
- **Echelle LOGARITHMIQUE !**

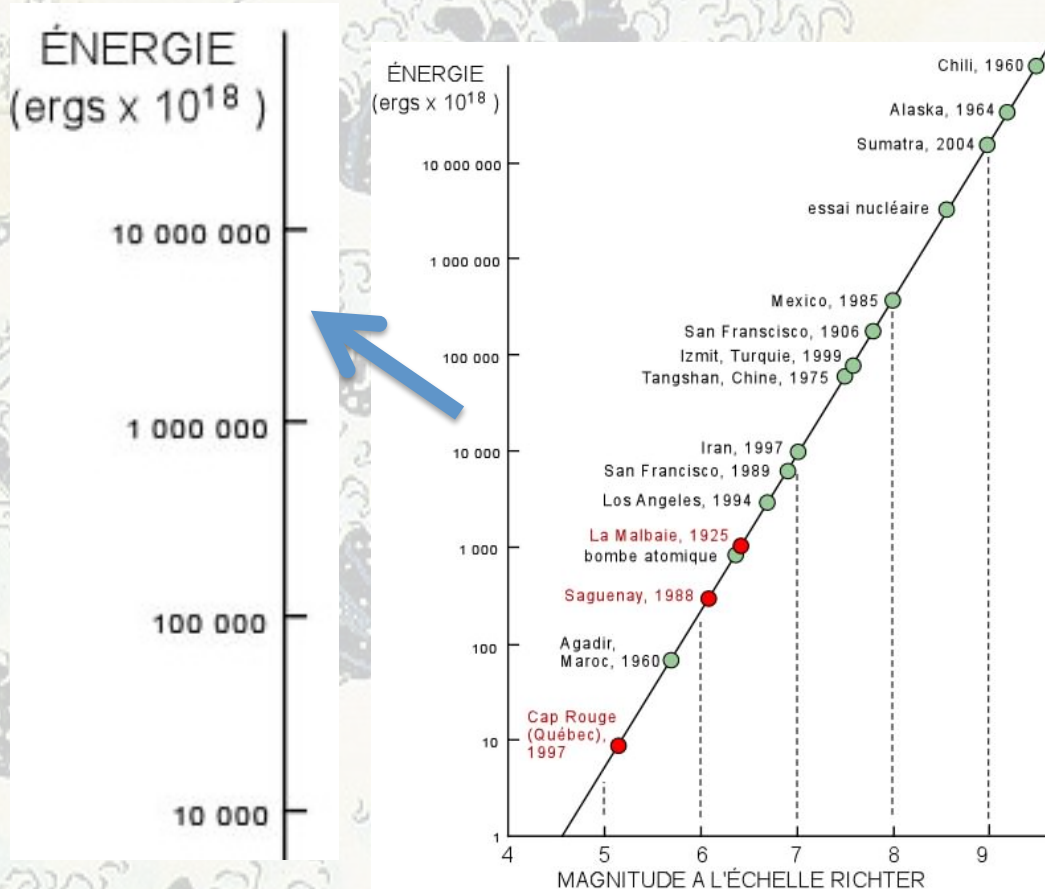
# Séismes : Echelle de Richter



# Séismes : Echelle de Richter

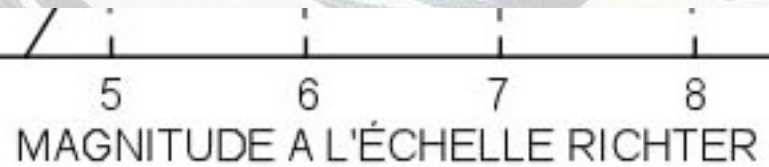


# Séismes : Echelle de Richter

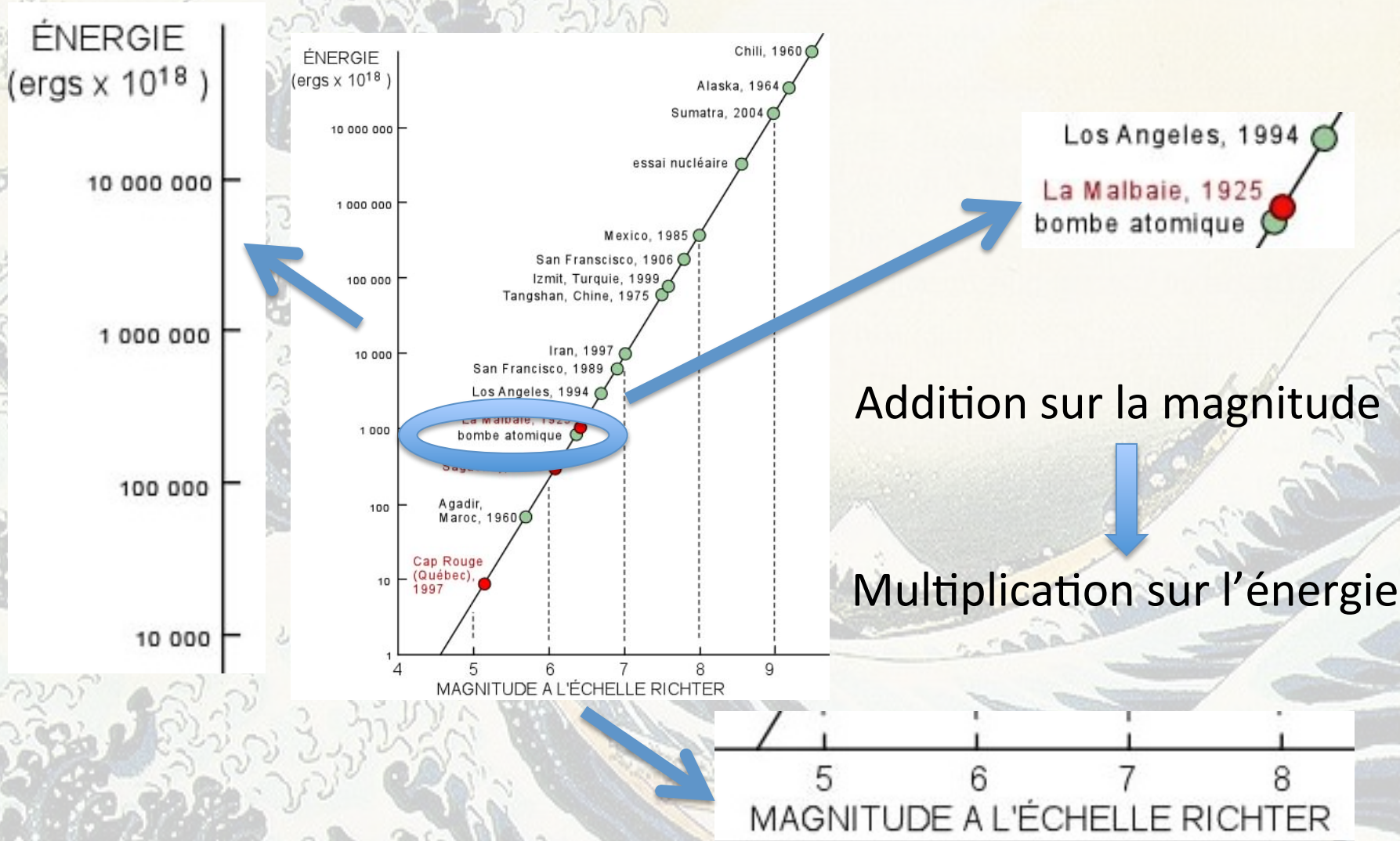


Addition sur la magnitude

Multiplication sur l'énergie



# Séismes : Echelle de Richter



Addition sur la magnitude

Multiplication sur l'énergie

# Magnitude et énergie


Relation linéaire  
entre le logarithme de l'énergie  $E$  et la magnitude  $M$

$$\text{Log}_{10}(E) = \alpha * M + \beta$$

Relation de type exponentielle  
entre l'énergie  $E$  et la magnitude  $M$

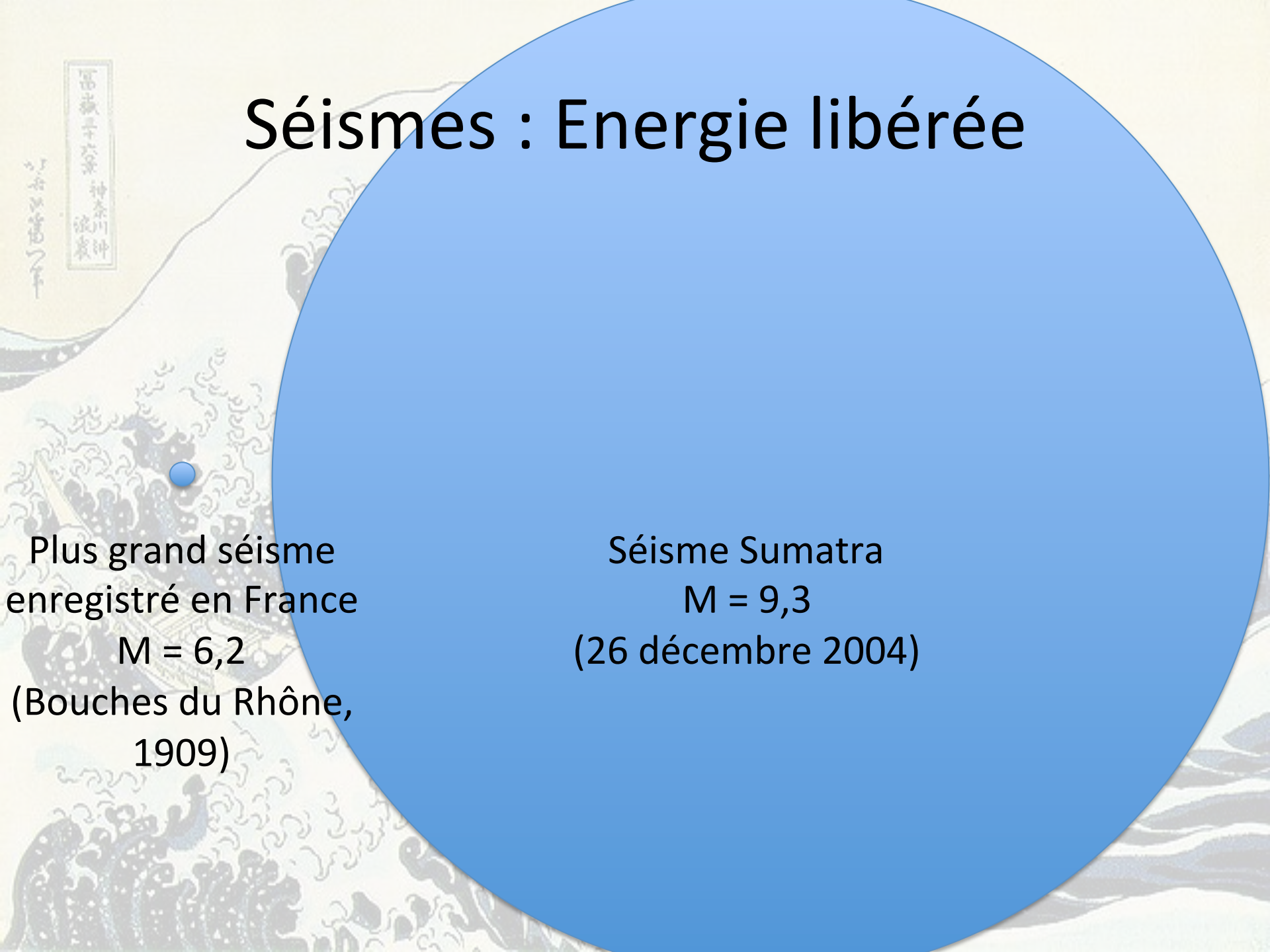
$$E = b * 10^{\alpha M}$$

# Séismes : Energie libérée



Plus grand séisme  
enregistré en France  
M = 6,2  
(Bouches du Rhône,  
1909)

# Séismes : Energie libérée



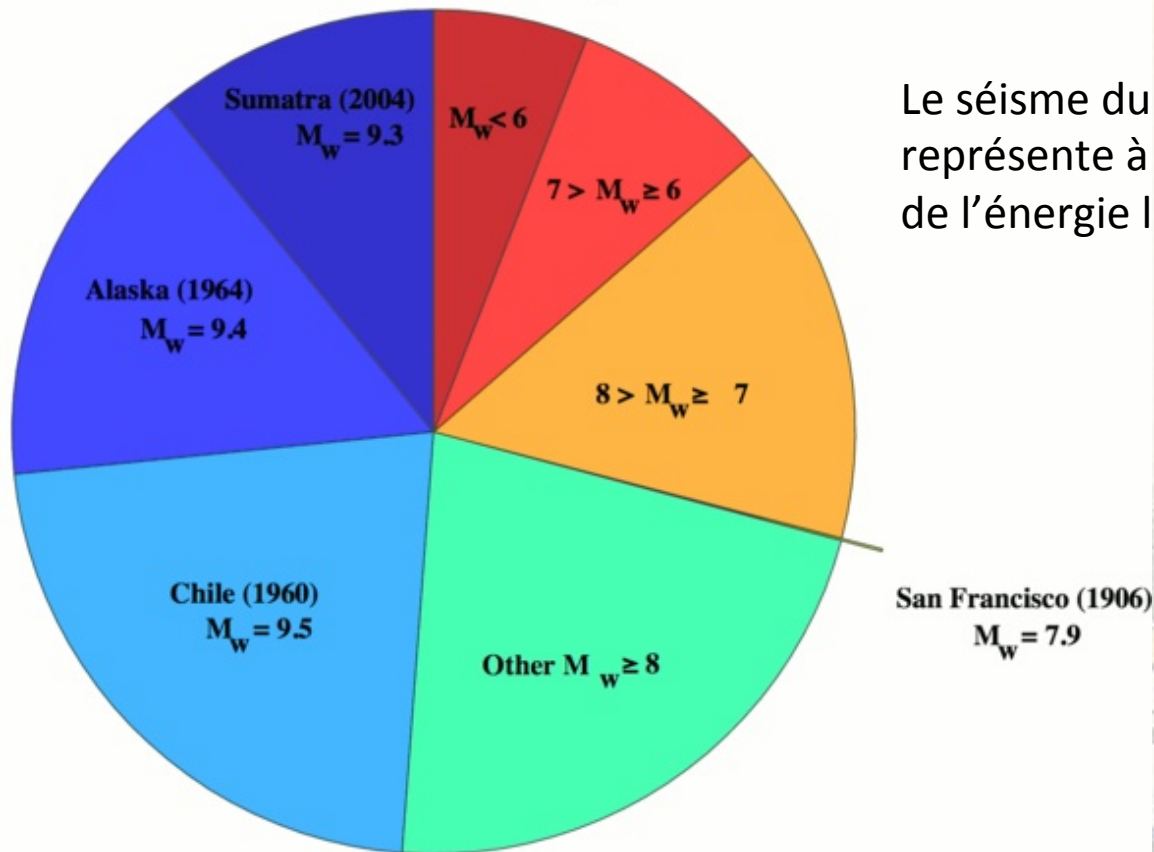
Plus grand séisme  
enregistré en France  
M = 6,2  
(Bouches du Rhône,  
1909)

Séisme Sumatra  
M = 9,3  
(26 décembre 2004)



# Séismes : Energie libérée

Global Seismic Moment Release January 1906 - December 2005

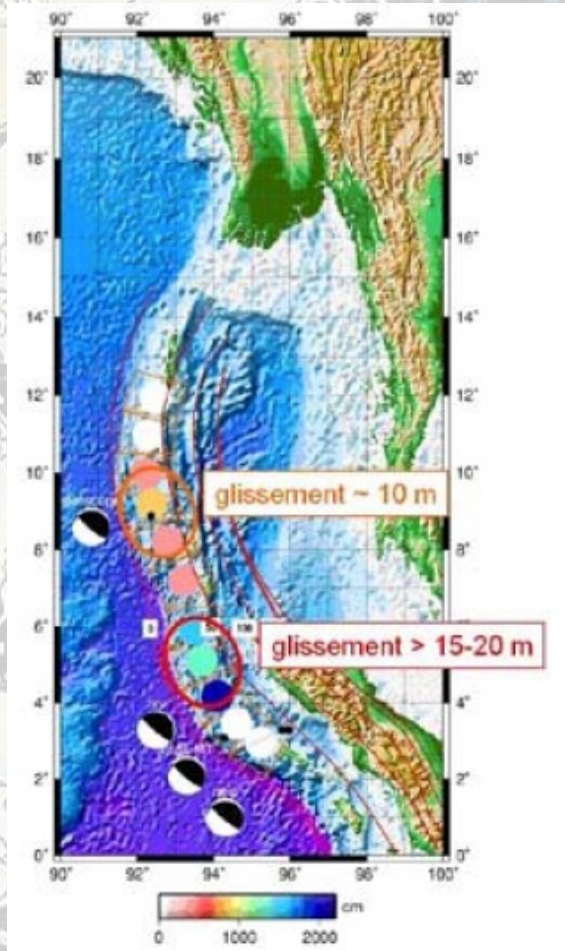


Le séisme du Chili, en 1960 représente à lui seul 25% de l'énergie libérée en un siècle !

Total Moment:  $1.0 \times 10^{24}$  Newton-meters

Source : CEA

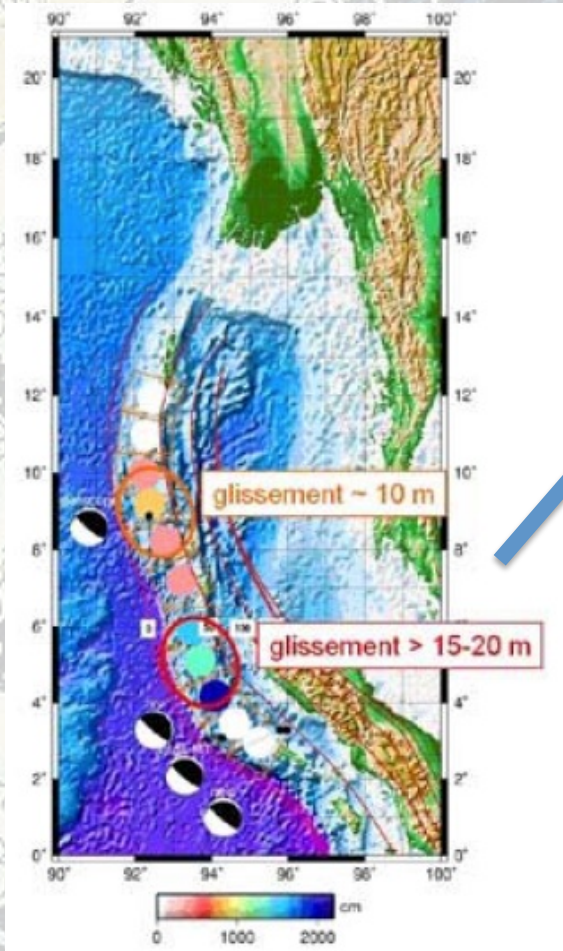
# Séisme : Zone de rupture



# Séisme : Zone de rupture

Latitude

Longitude

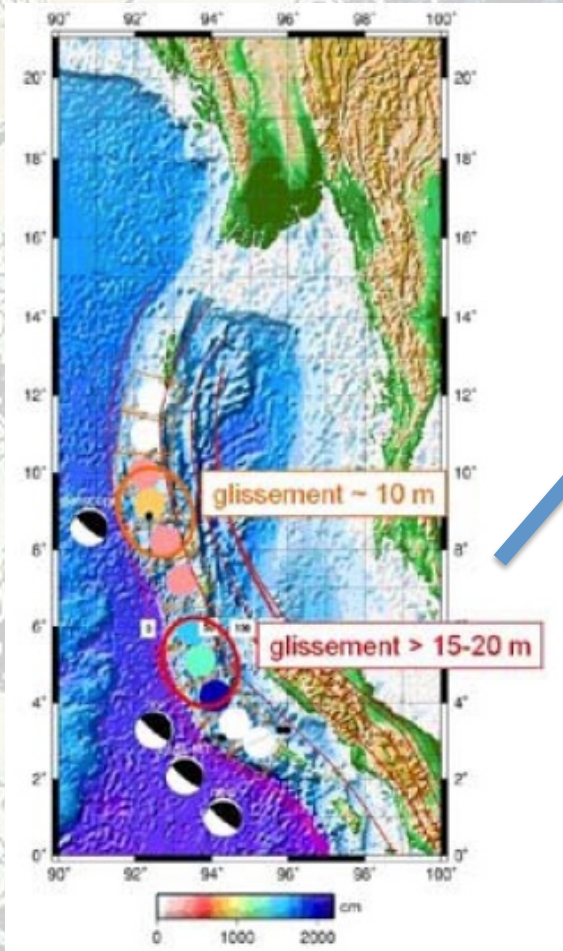


# Séisme : Zone de rupture

Rayon terrestre :  
6 370 km

Latitude

Longitude



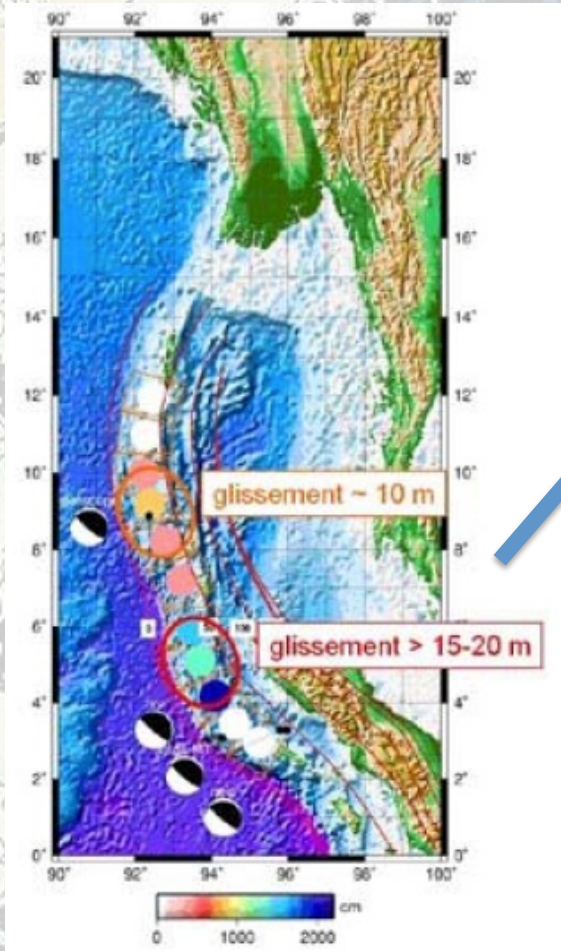
# Séisme : Zone de rupture

Rayon terrestre :  
6 370 km

Circonférence de la Terre :

Latitude

Longitude



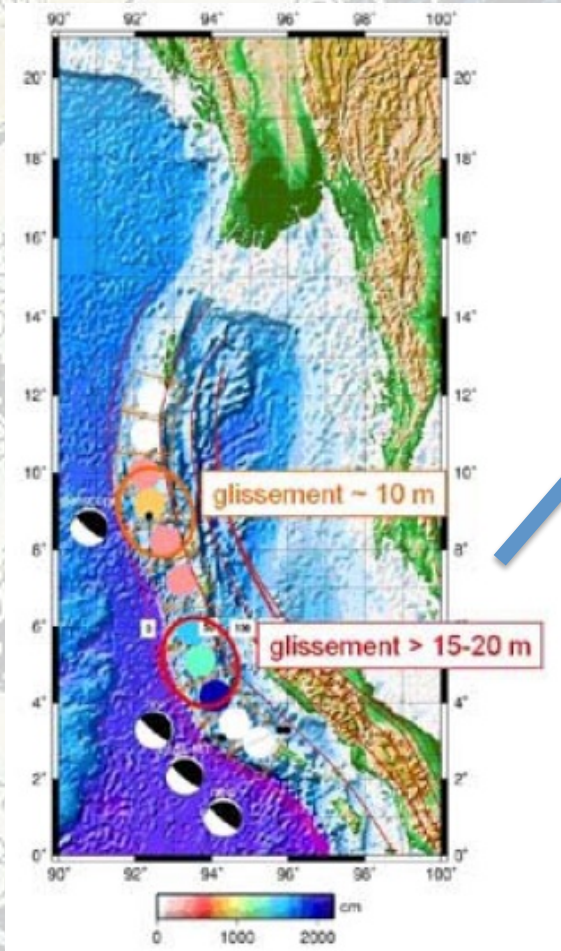
# Séisme : Zone de rupture

Rayon terrestre :  
6 370 km

Circonférence de la Terre :  
 $2 * \pi * R \approx 40\,000$  km

Latitude

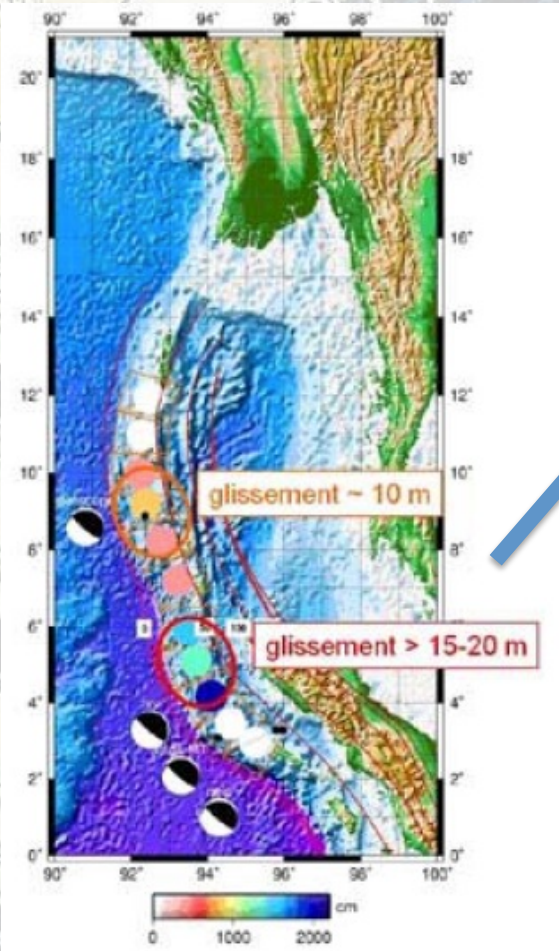
Longitude



# Séisme : Zone de rupture

Latitude

Longitude



Rayon terrestre :  
6 370 km

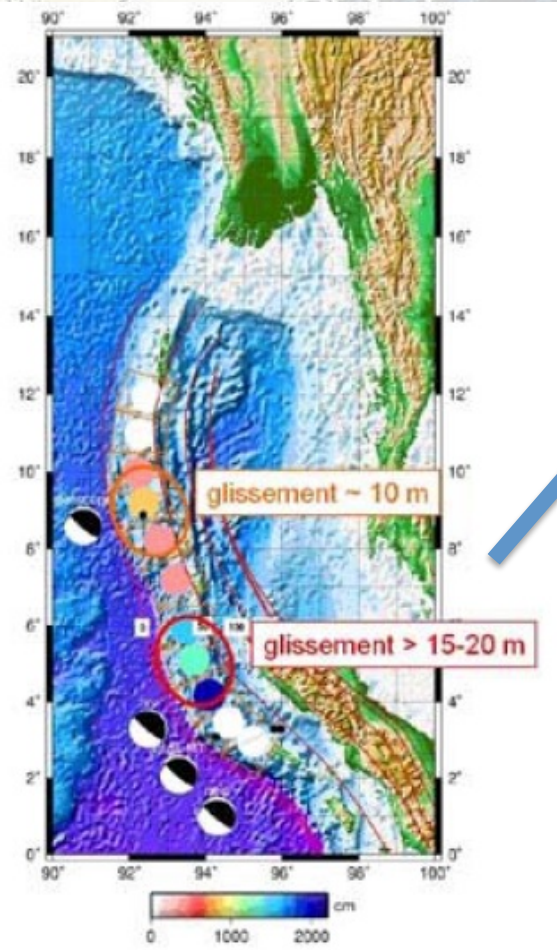
Circonférence de la Terre :  
 $2 * \pi * R \approx 40\,000$  km

Longueur d'un arc  
(1 degré de latitude) :

# Séisme : Zone de rupture

Latitude

Longitude



Rayon terrestre :  
6 370 km

Circonférence de la Terre :  
 $2 * \pi * R \approx 40\,000$  km

Longueur d'un arc  
(1 degré de latitude) :

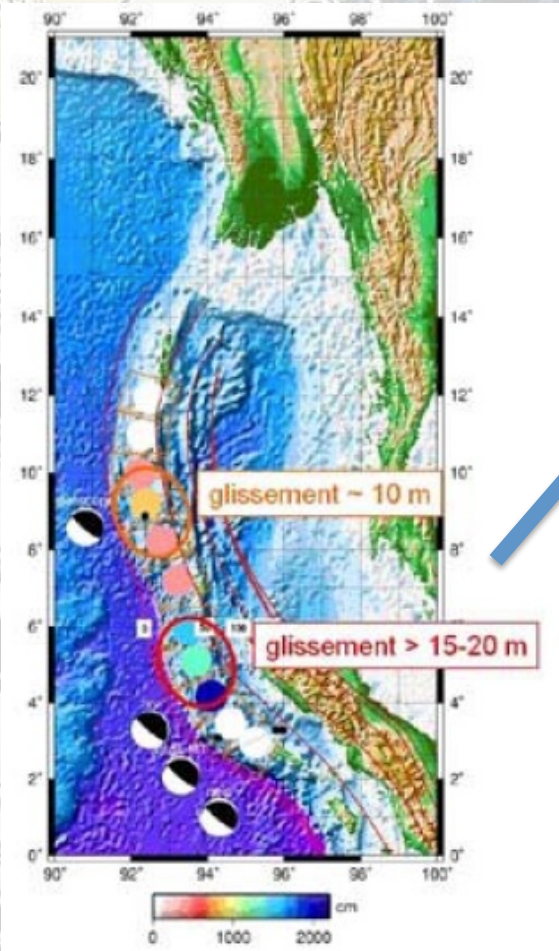
$$\frac{40000}{360} \approx 100 \text{ km}$$



# Séisme : Zone de rupture

Latitude

Longitude



Rayon terrestre :  
6 370 km

Circonférence de la Terre :  
 $2 * \pi * R \approx 40\,000$  km

Longueur d'un arc  
(1 degré de latitude) :

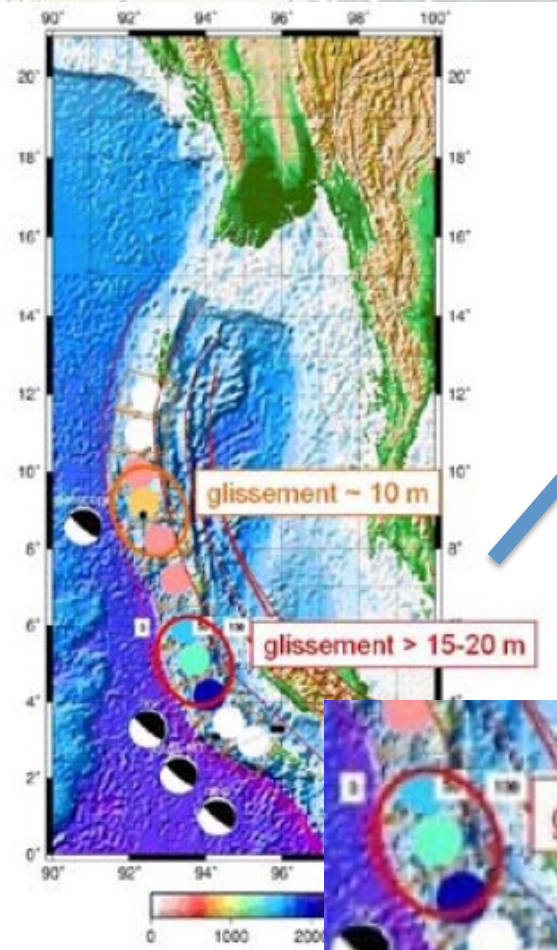
$$\frac{40000}{360} \approx 100 \text{ km}$$

Zone de rupture :  
> 1000 km

# Séisme : Zone de rupture

Latitude

Longitude



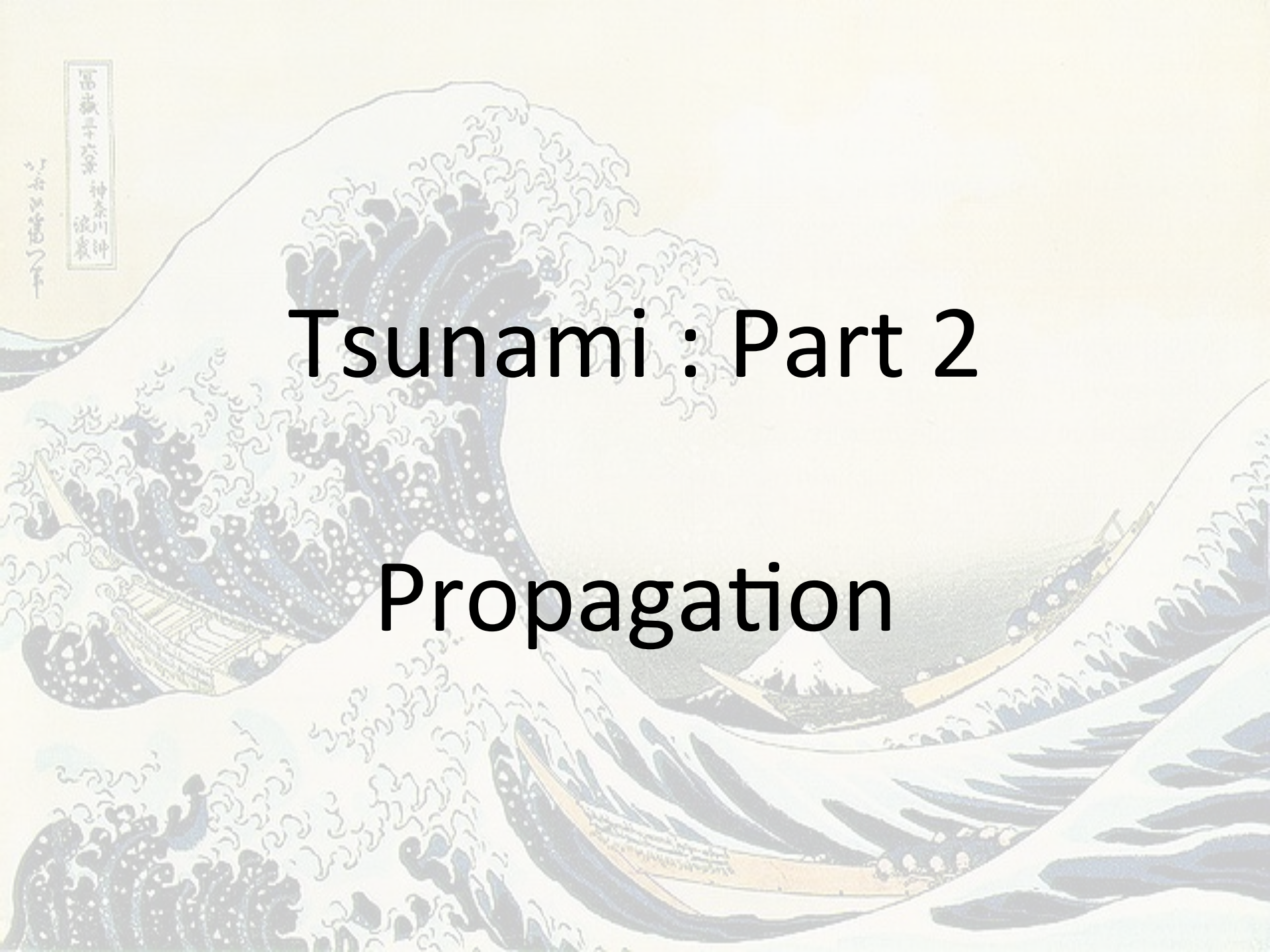
Rayon terrestre :  
6 370 km

Circonférence de la Terre :  
 $2 * \pi * R \approx 40\,000$  km

Longueur d'un arc  
(1 degré de latitude) :

$$\frac{40000}{360} \approx 100 \text{ km}$$

Zone de rupture :  
> 1000 km



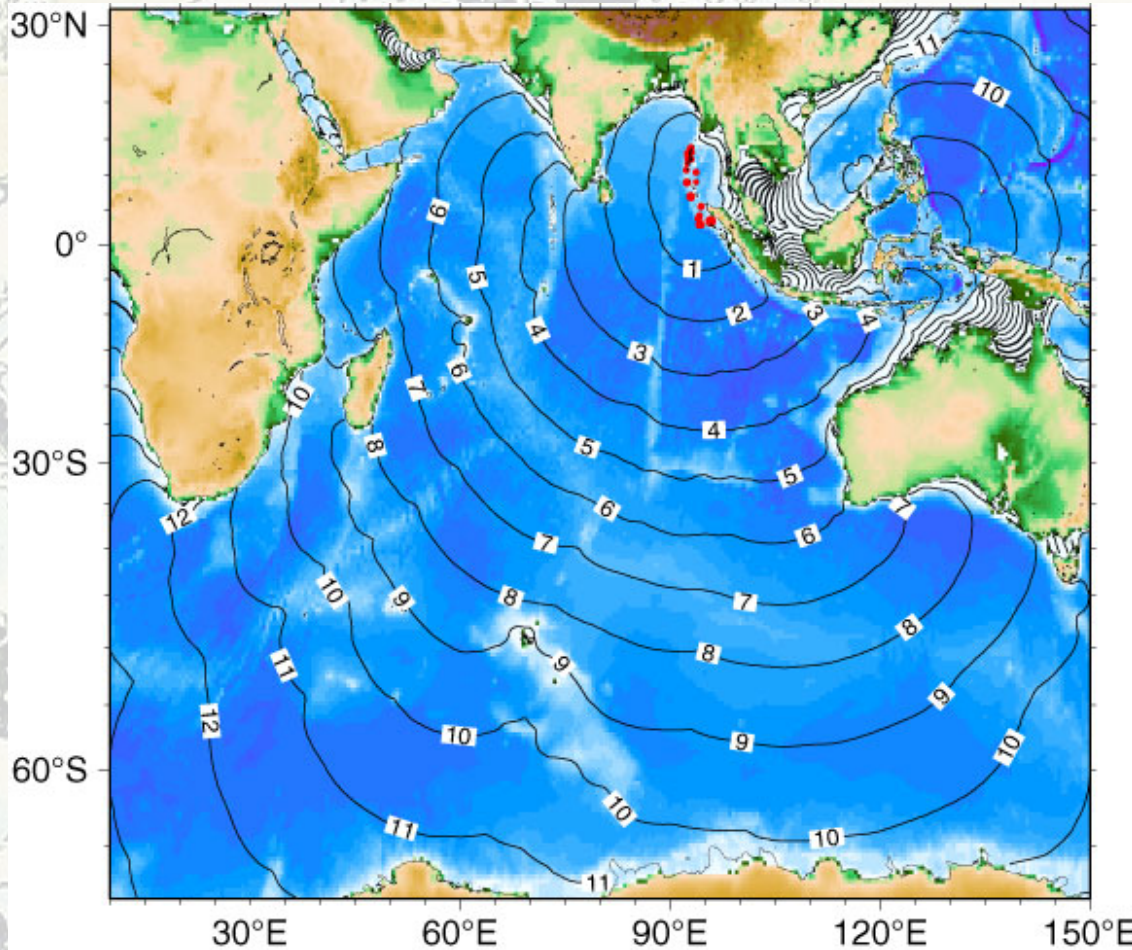
富嶽三十六景 神奈川沖  
波裏

一  
一

# Tsunami : Part 2

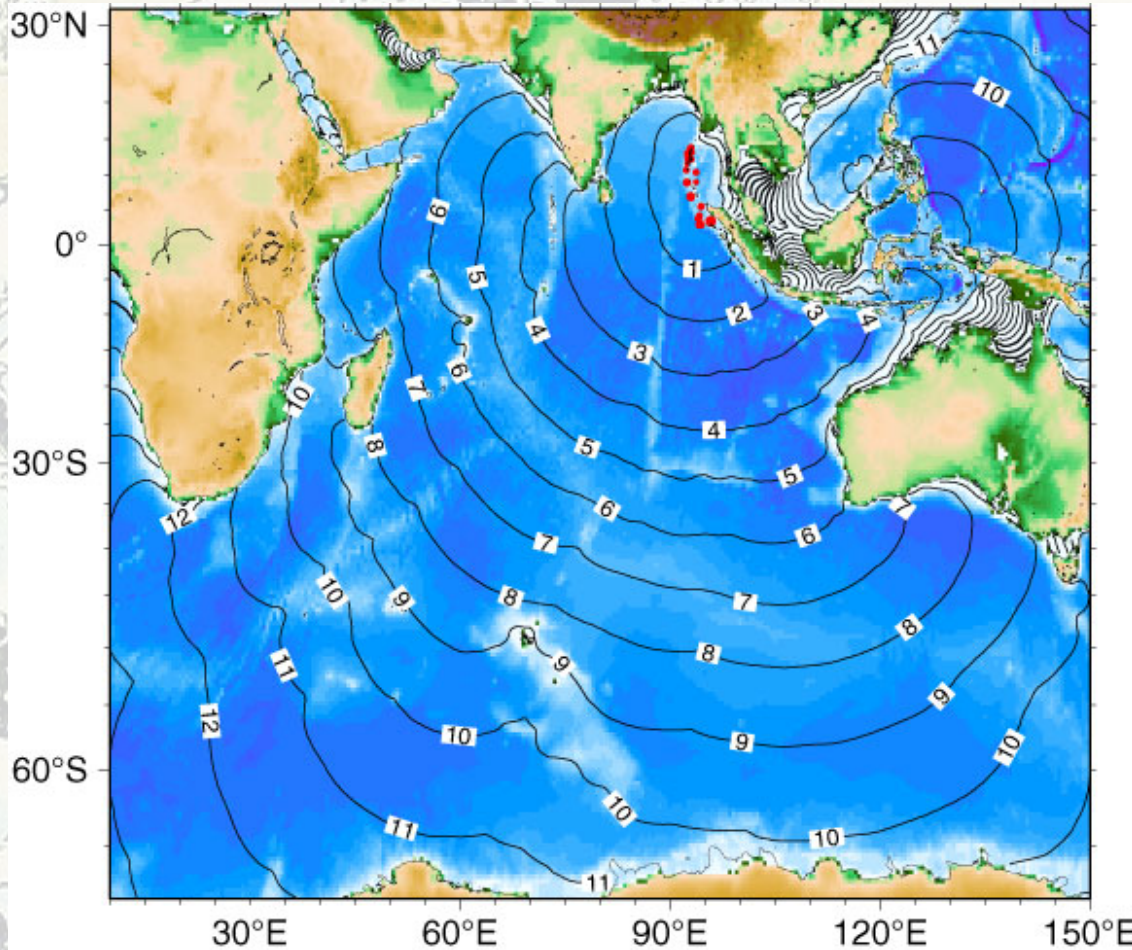
## Propagation

# Tsunami de Sumatra (2004)



Source : Indiana Univ.

# Tsunami de Sumatra (2004)



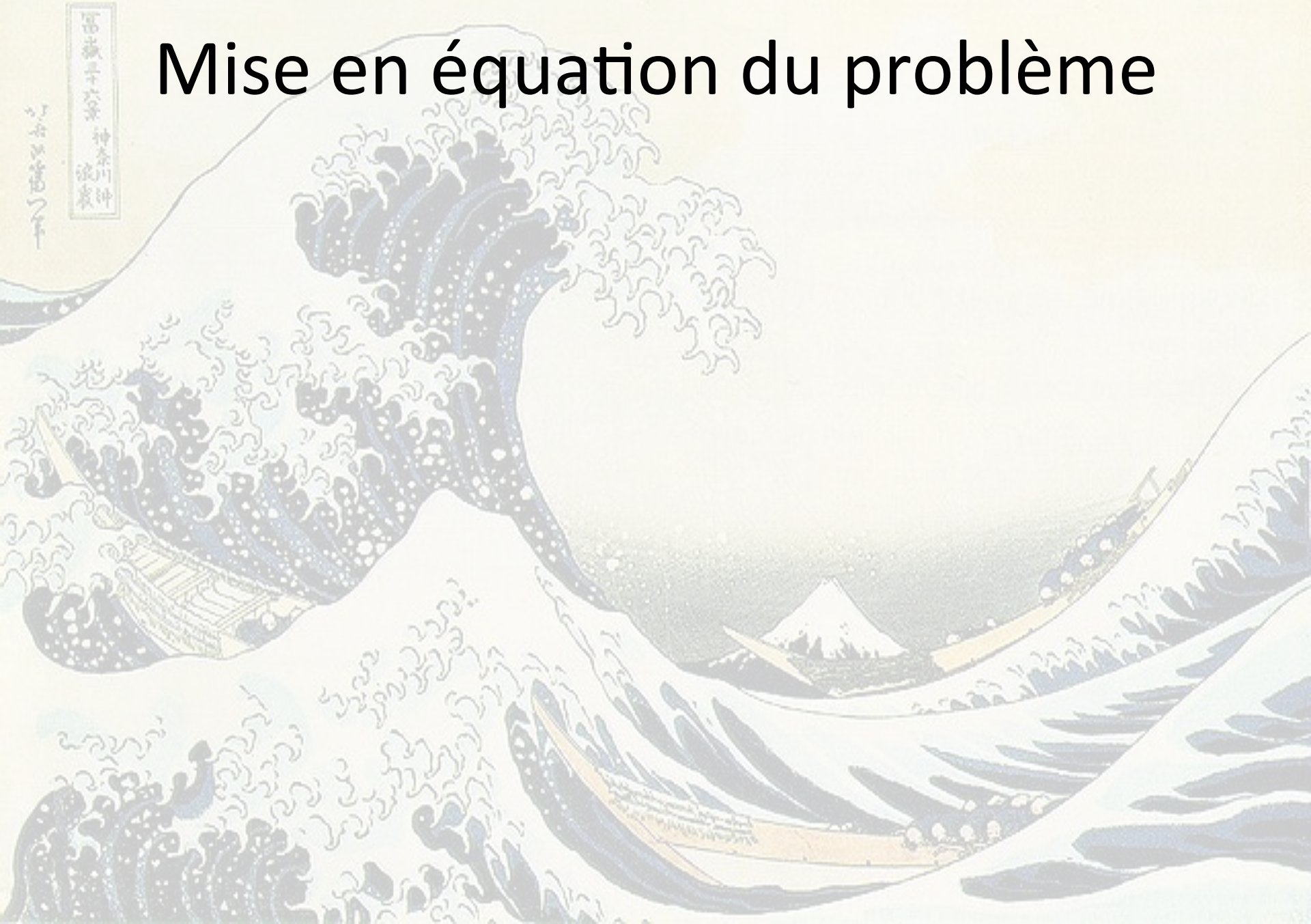
Bonne connaissance  
de la propagation  
du tsunami



Plans d'alerte  
plus efficaces

Source : Indiana Univ.

# Mise en équation du problème



# Mise en équation du problème

Equation linéaire

$$2 * x + 5 = 0$$

Equation non-linéaire (degré 2)

$$3 * x^2 - 2 * x + 5 = 0$$

Equations non-linéaires

$$\ln(\sqrt{x}) + 4 \cos(4x^2 + \pi) - e^{3x} + x^5 = 0$$

# Mise en équation du problème

Equation linéaire

$$2 * x + 5 = 0$$

Equation non-linéaire (degré 2)

$$3 * x^2 - 2 * x + 5 = 0$$

Equations non-linéaires

$$\ln(\sqrt{x}) + 4 \cos(4x^2 + \pi) - e^{3x} + x^5 = 0$$

L'inconnue « x »  
désigne un nombre réel,  
éventuellement  
un nombre complexe.



# Mise en équation du problème

Systeme d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2 * x - 5 * y + 5 = 0 \\ 3 * x + 4 * y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ecriture sous forme « matricielle »

$$A * X = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Mise en équation du problème

Systeme d'équations linéaires

$$\begin{cases} 2 * x - 5 * y + 5 = 0 \\ 3 * x + 4 * y - 2 = 0 \end{cases}$$

L'inconnue « X »  
désigne un vecteur  
(à deux composantes).

Ecriture sous forme « matricielle »

$$A * X = b$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

# Mise en équation du problème

Une fonction

$$f(x) = 2 * x - 5$$

Une fonction à plusieurs variables

$$f(t, x) = 3 * t^2 + \cos(t * x) + 2 * x - 5$$

# Mise en équation du problème

Une fonction

$$f(x) = 2 * x - 5$$

Une fonction à plusieurs variables

$$f(t, x) = 3 * t^2 + \cos(t * x) + 2 * x - 5$$

On va écrire  
des équations  
dont les inconnues  
sont des fonctions !

# Mise en équation du problème

Dérivée d'une fonction

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables

$$\frac{d}{dt} f(t, x) = \frac{f(t+k, x) - f(t, x)}{k}$$

$$\frac{d}{dx} f(t, x) = \frac{f(t, x+h) - f(t, x)}{h}$$

# Mise en équation du problème

Dérivée d'une fonction

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Les équations  
vont faire intervenir  
les dérivées des fonctions.

Dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables

$$\frac{d}{dt} f(t, x) = \frac{f(t+k, x) - f(t, x)}{k}$$

$$\frac{d}{dx} f(t, x) = \frac{f(t, x+h) - f(t, x)}{h}$$

# Mise en équation du problème

Les fonctions inconnues

$h(t, x, y)$  : profondeur de l'océan

$u(t, x, y)$  : vitesse (composante est-ouest)

$v(t, x, y)$  : vitesse (composante nord-sud)

Les variables

$(t, x, y)$  : temps, longitude, latitude

Les données

$b(t, x, y)$  : altitude du fond de l'océan

# Mise en équation du problème

Les fonctions inconnues

$$h(t, x, y)$$

$$u(t, x, y)$$

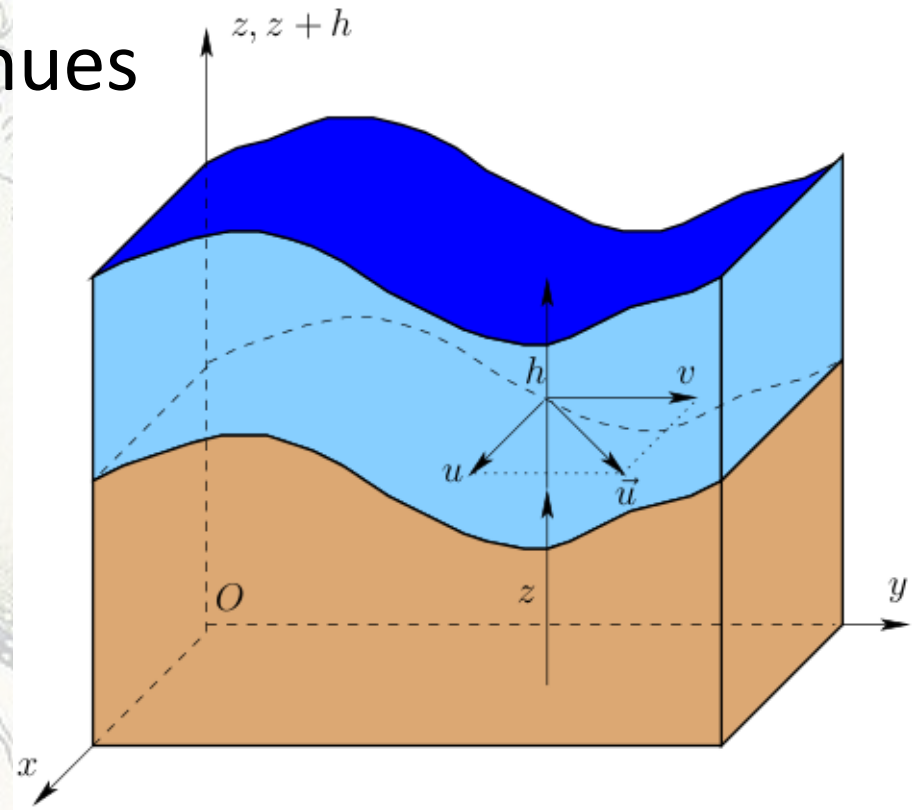
$$v(t, x, y)$$

Les variables

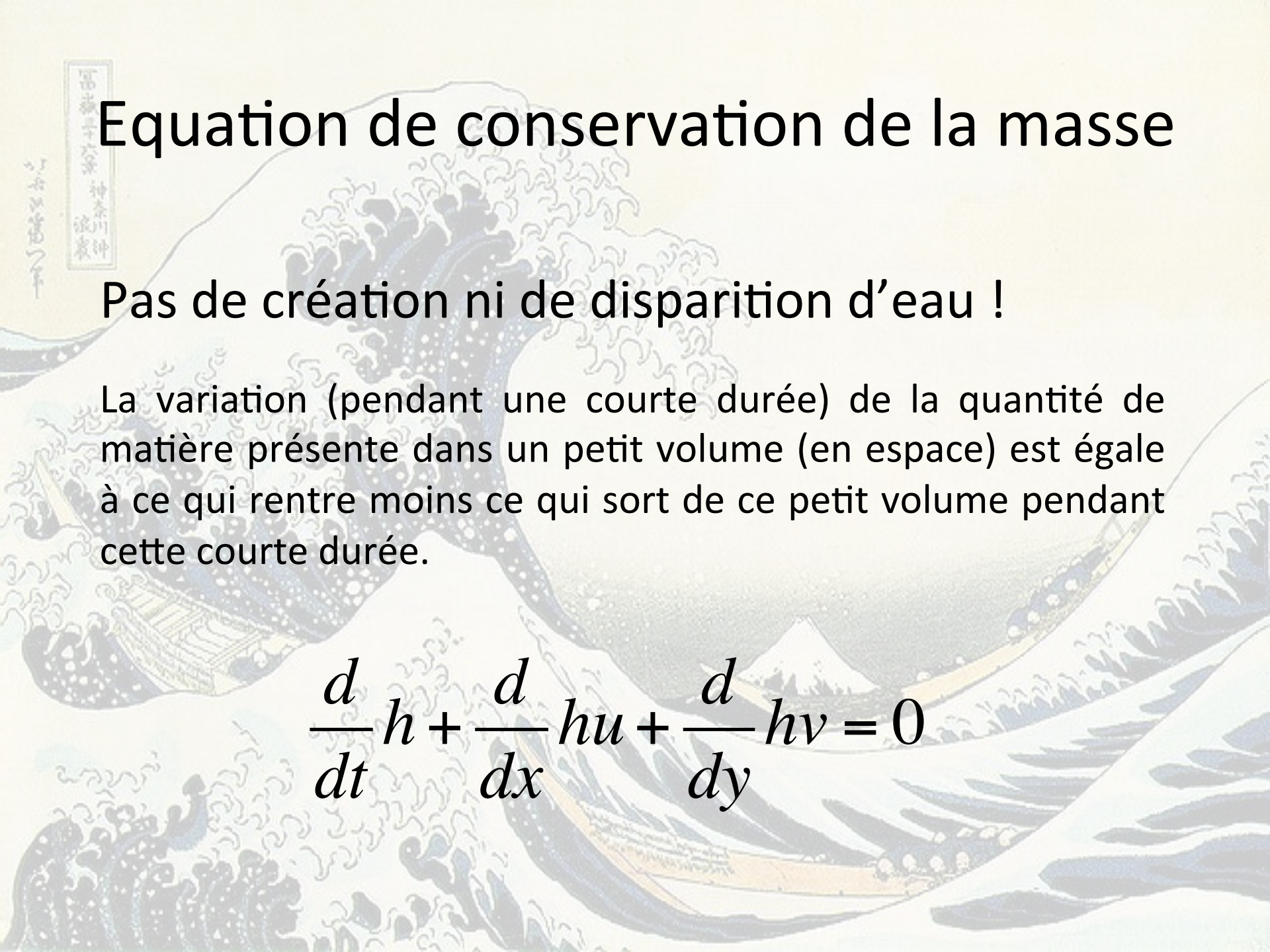
$$(t, x, y)$$

Les données

$$b(t, x, y) : \text{altitude du fond de l'océan}$$







# Equation de conservation de la masse

Pas de création ni de disparition d'eau !

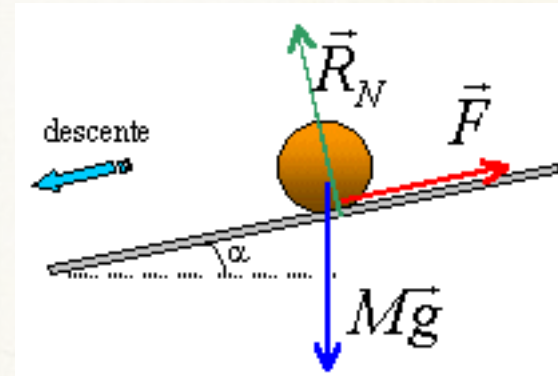
La variation (pendant une courte durée) de la quantité de matière présente dans un petit volume (en espace) est égale à ce qui rentre moins ce qui sort de ce petit volume pendant cette courte durée.

$$\frac{d}{dt} h + \frac{d}{dx} hu + \frac{d}{dy} hv = 0$$

# Equation de la dynamique

## Seconde loi de Newton

Le produit de la masse par l'accélération est égal à la somme des forces exercées sur le système.



$$\frac{d}{dt} u + u \frac{d}{dx} u + v \frac{d}{dy} u + g \frac{d}{dx} (h + b) = 0$$

$$\frac{d}{dt} v + u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dy} v + g \frac{d}{dy} (h + b) = 0$$

# Equation de la dynamique

Seconde loi de Newton

Accélération

Force : poids

$$\frac{d}{dt} u + u \frac{d}{dx} u + v \frac{d}{dy} u + g \frac{d}{dx} (h + b) = 0$$

$$\frac{d}{dt} v + u \frac{d}{dx} v + v \frac{d}{dy} v + g \frac{d}{dy} (h + b) = 0$$

# Bilan d'énergie

En l'absence de frottement, l'énergie se conserve (elle est simplement transportée par l'écoulement)

$$\frac{d}{dt} hE + \frac{d}{dx} hEu + \frac{d}{dy} hEv = 0$$

$$E = \frac{u^2}{2} + g(h + b)$$

# Bilan d'énergie

En l'absence de frottement, l'énergie se conserve (elle est simplement transportée par l'écoulement)

$$\frac{d}{dt} hE + \frac{d}{dx} hEu + \frac{d}{dy} hEv = 0$$

$$E = \frac{u^2}{2} + g(h + b)$$

Energie  
cinétique

Energie  
potentielle

# Modèle et réalité

Le système d'équations obtenu est un **modèle** de la réalité.  
Il n'est pas la réalité !!!

Il est issu de **grands principes**  
qui ont montré leur pertinence.

On a choisi d'écarter des phénomènes  
qu'on a estimé **négligeables** pour nos applications.

Il doit être **validé** en montrant qu'il permet  
de retrouver des résultats cohérents.

# Utilisation du modèle

Les équations du tsunamis sont en général impossibles à résoudre exactement.

Deux approches sont alors possibles :

- Considérer des modèles simplifiés pour lesquels on peut calculer des solutions exactes et voir dans quels cas ces modèles sont valables.
- Considérer le cas général et développer des **algorithmes numériques** pour calculer des solutions approchées.



# Vitesse de propagation d'un tsunami

En « haute mer », on peut introduire un modèle Simplifié qui permet d'estimer la vitesse de propagation.

Dans ce cas, quand le tsunami se propage, **ce n'est pas l'eau qui se déplace** (ou très peu), mais seulement une « information » !

C'est le « même » phénomène que maintenant, quand je vous parle... L'air ne bouge presque pas !

On dit qu'une « onde » se propage.

**Peut-on estimer la vitesse de cette onde ?**



# Vitesse de propagation d'un tsunami

Vitesse de l'onde du tsunami

$$u_{\text{Onde}} \approx \sqrt{gh}$$

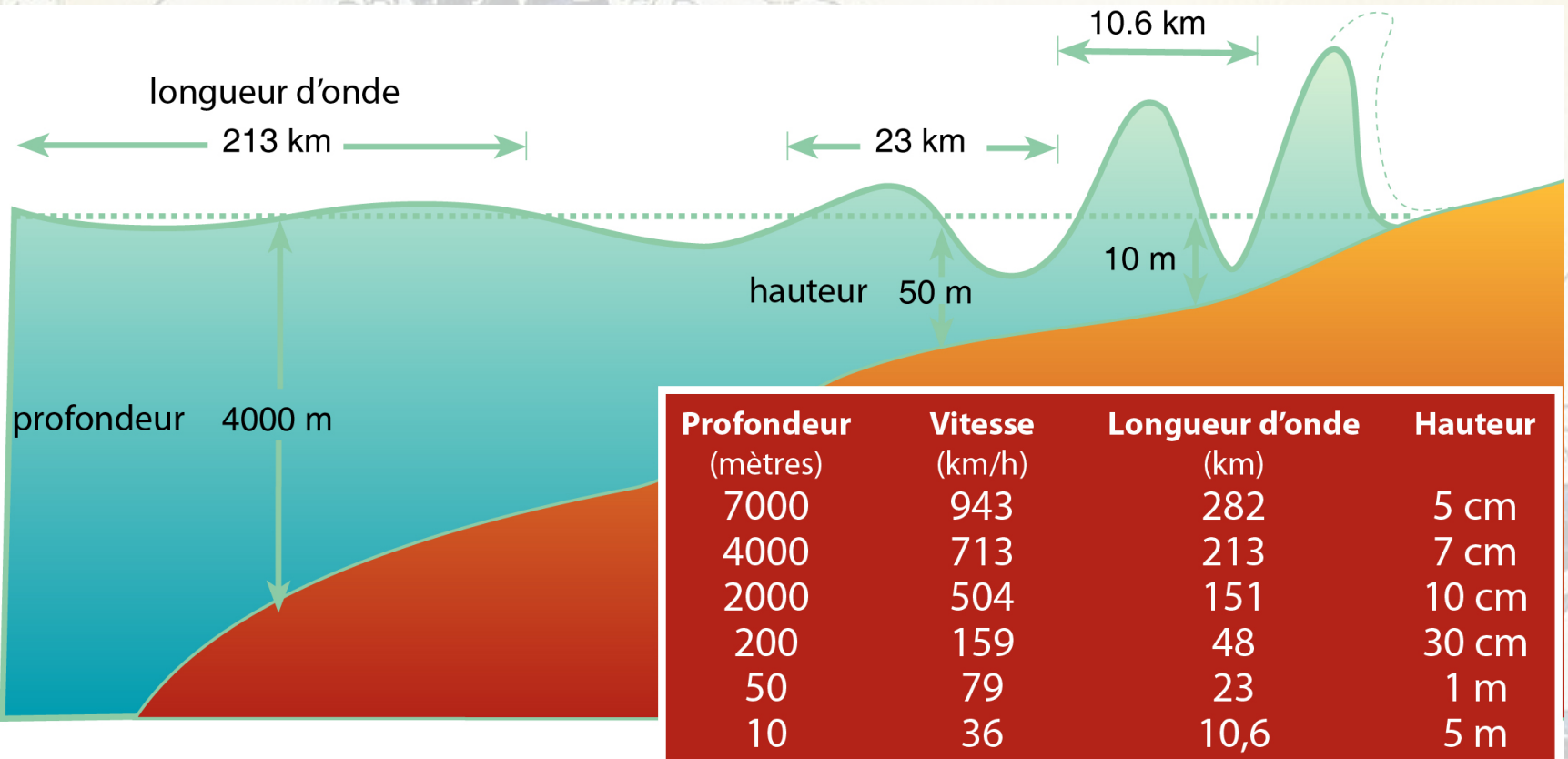
Calcul pour un océan de 4km de profondeur

$$u_{\text{Onde}} \approx \sqrt{10 * 4000} \approx 200 \text{ m/s, soit } > 700 \text{ km/h}$$

Vitesse de l'eau dans l'océan

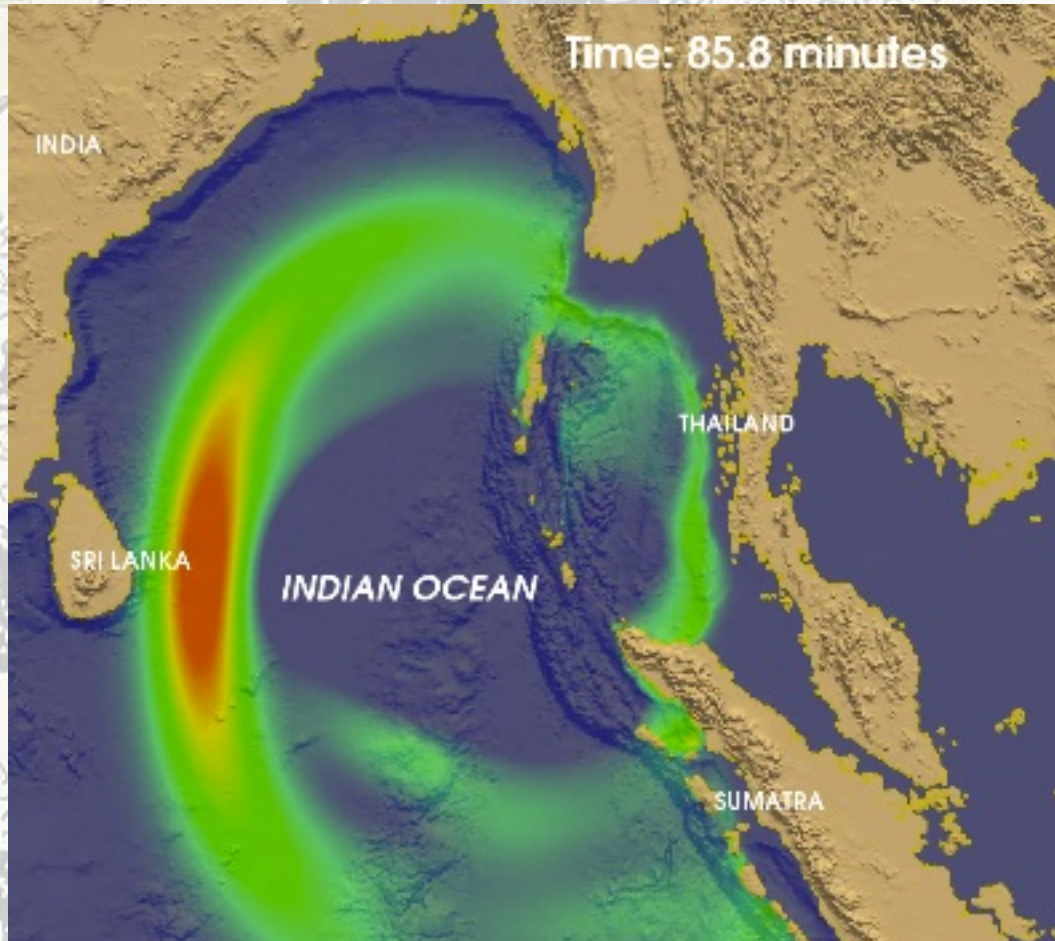
$$u_{\text{Eau}} \approx 1 \text{ m/s}$$

# Vitesse de propagation d'un tsunami



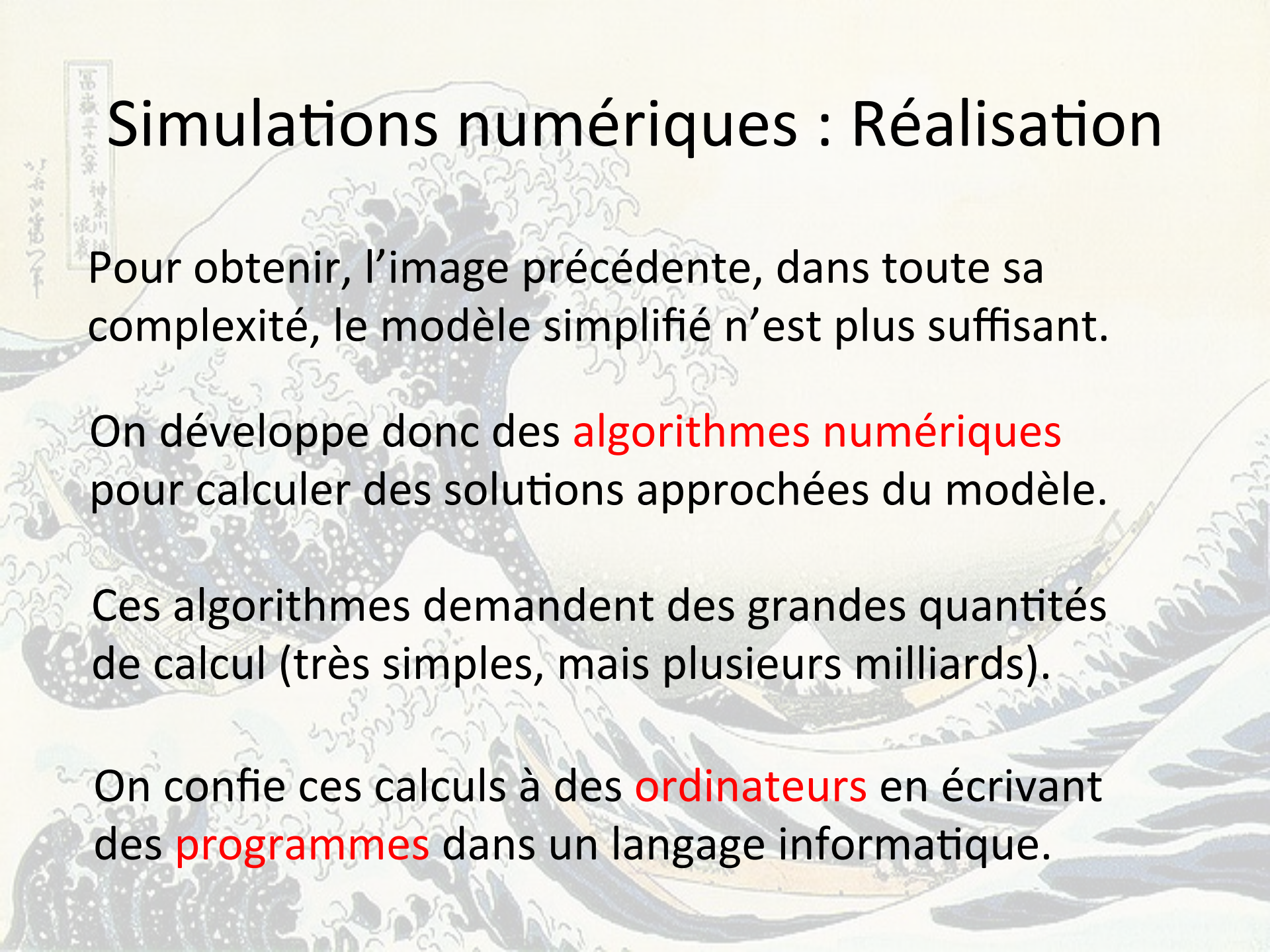
Source : CEA

# Vitesse de propagation d'un tsunami : le Tsunami de Sumatra



Les observations et les simulations numériques valident cette estimation.

La vague a atteint en même temps le Sri Lanka (à plus de 2000 km) et la Thaïlande (à moins de 1000 km).



# Simulations numériques : Réalisation

Pour obtenir, l'image précédente, dans toute sa complexité, le modèle simplifié n'est plus suffisant.

On développe donc des **algorithmes numériques** pour calculer des solutions approchées du modèle.

Ces algorithmes demandent des grandes quantités de calcul (très simples, mais plusieurs milliards).

On confie ces calculs à des **ordinateurs** en écrivant des **programmes** dans un langage informatique.

# Simulations numériques : Validation

On s'assure que les solutions numériques vérifient quelques **propriétés importantes** :

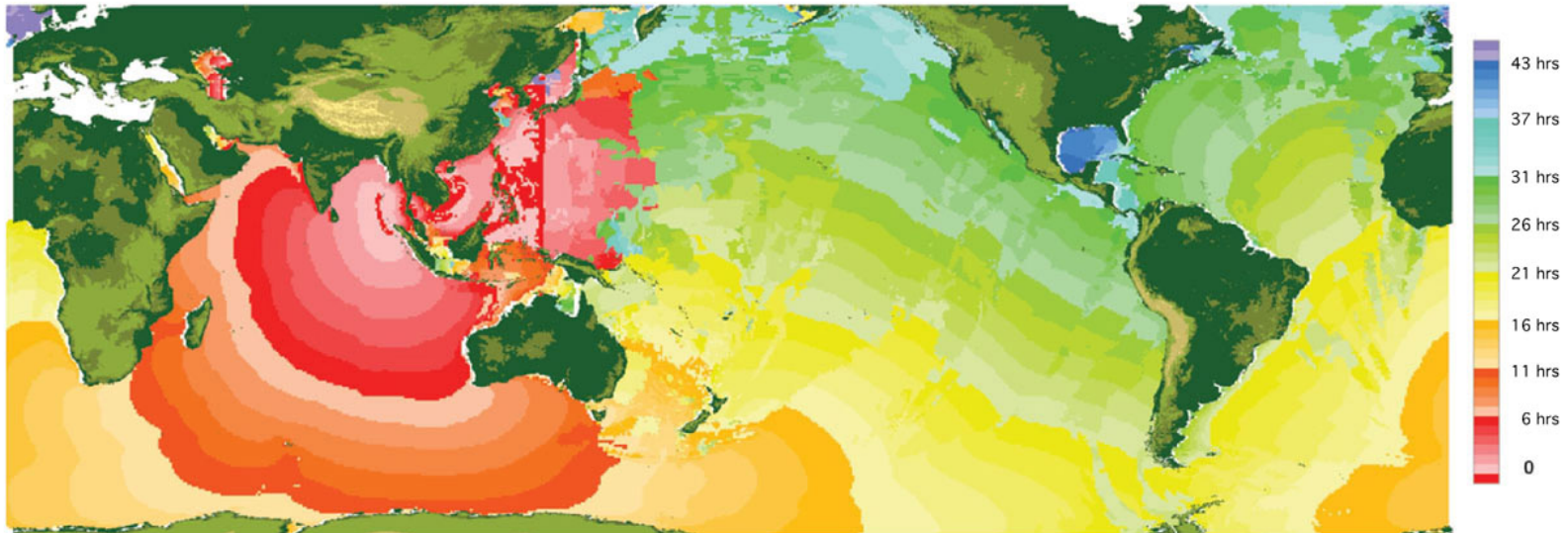
- la hauteur d'eau  $h(t,x,y)$  doit être positive.
- l'énergie totale  $E(t)$  doit décroître.

On compare les résultats numériques à des **solutions exactes** dans des cas simples.

On compare les résultats numériques avec des **mesures expérimentales**.

# Simulations numériques :

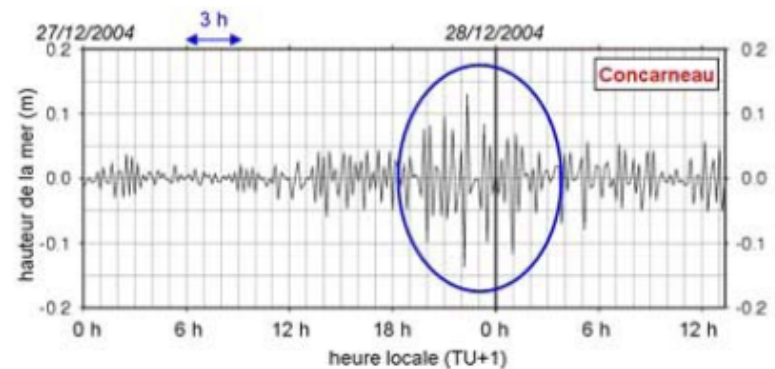
## Le tsunami de Sumatra fait le tour du monde !

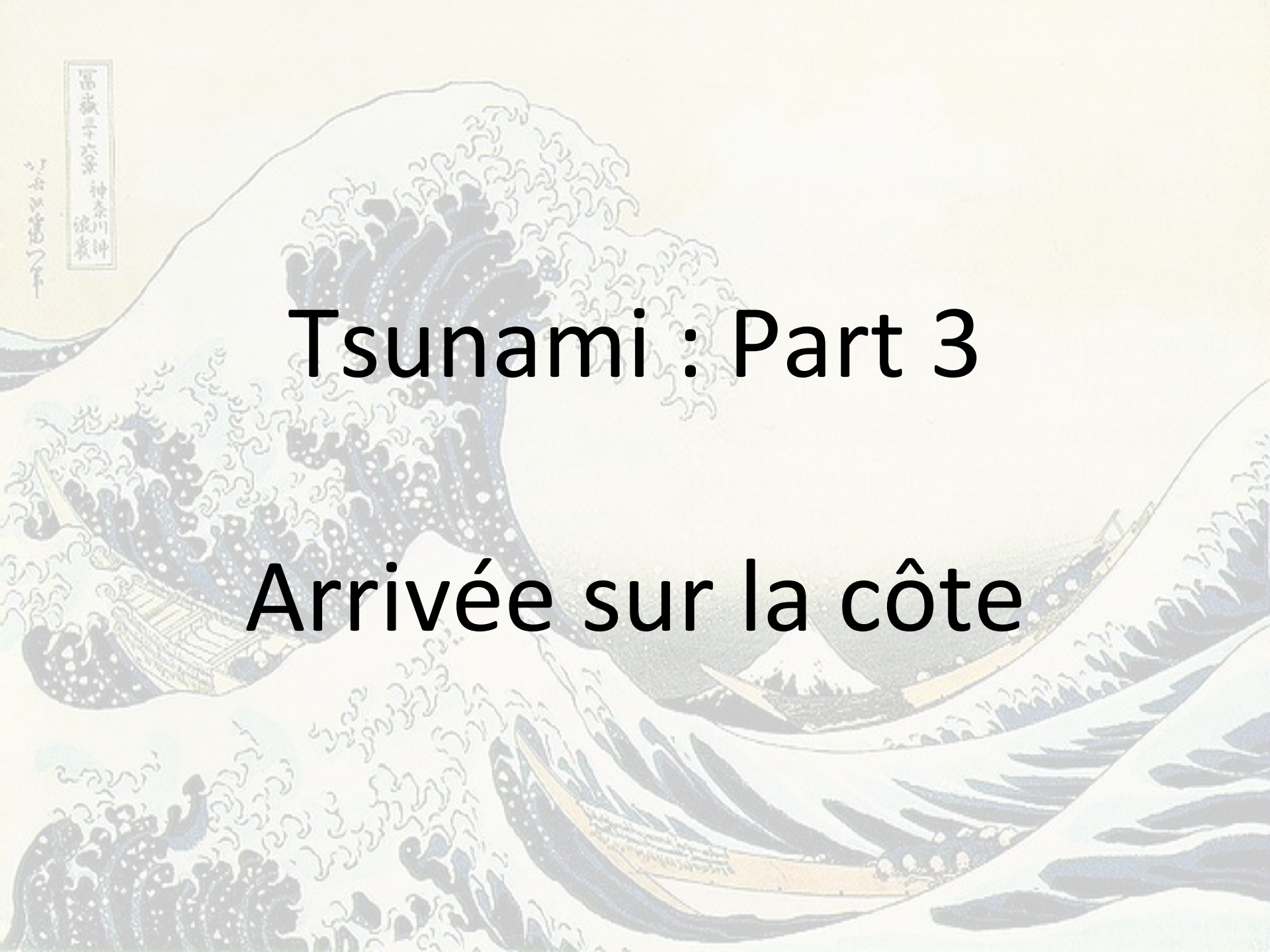


Arrival Time of First Waves (sec) - 2004 12 26 Indian Ocean Tsunami Simulation



Tsunami Research Program  
NOAA OAR Pacific Marine Environment  
Seattle, Washington (Credit NOAA)





富嶽三十六景 神奈川沖  
波裏

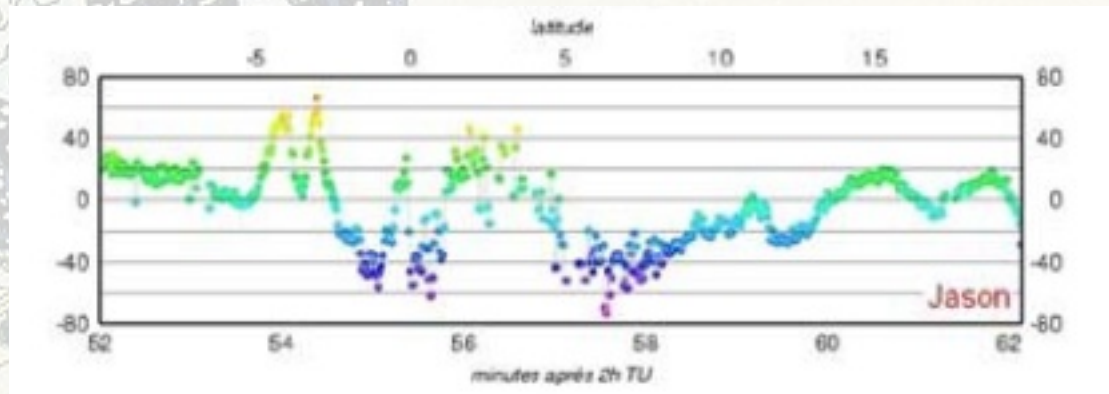
一  
一

# Tsunami : Part 3

## Arrivée sur la côte

# Hauteur de la vague : Pleine mer

En « haute mer », le tsunami est une **vague très longue** (dizaines, voire centaines de kilomètre) **mais pas haute** (quelques mètres, voire moins).



Source :  
CEA

Un tsunami ne peut donc pas être détecté par un observateur placé sur un bateau, d'où son nom...



# Hauteur de la vague : Près des côtes

La vitesse de la vague dépend de la profondeur

$$u_{\text{Onde}} \approx \sqrt{gh}$$

A l'approche des côtes, **la vague ralentit.**

Et **l'énergie s'accumule**

(comme quand un avion franchit le mur du son !)

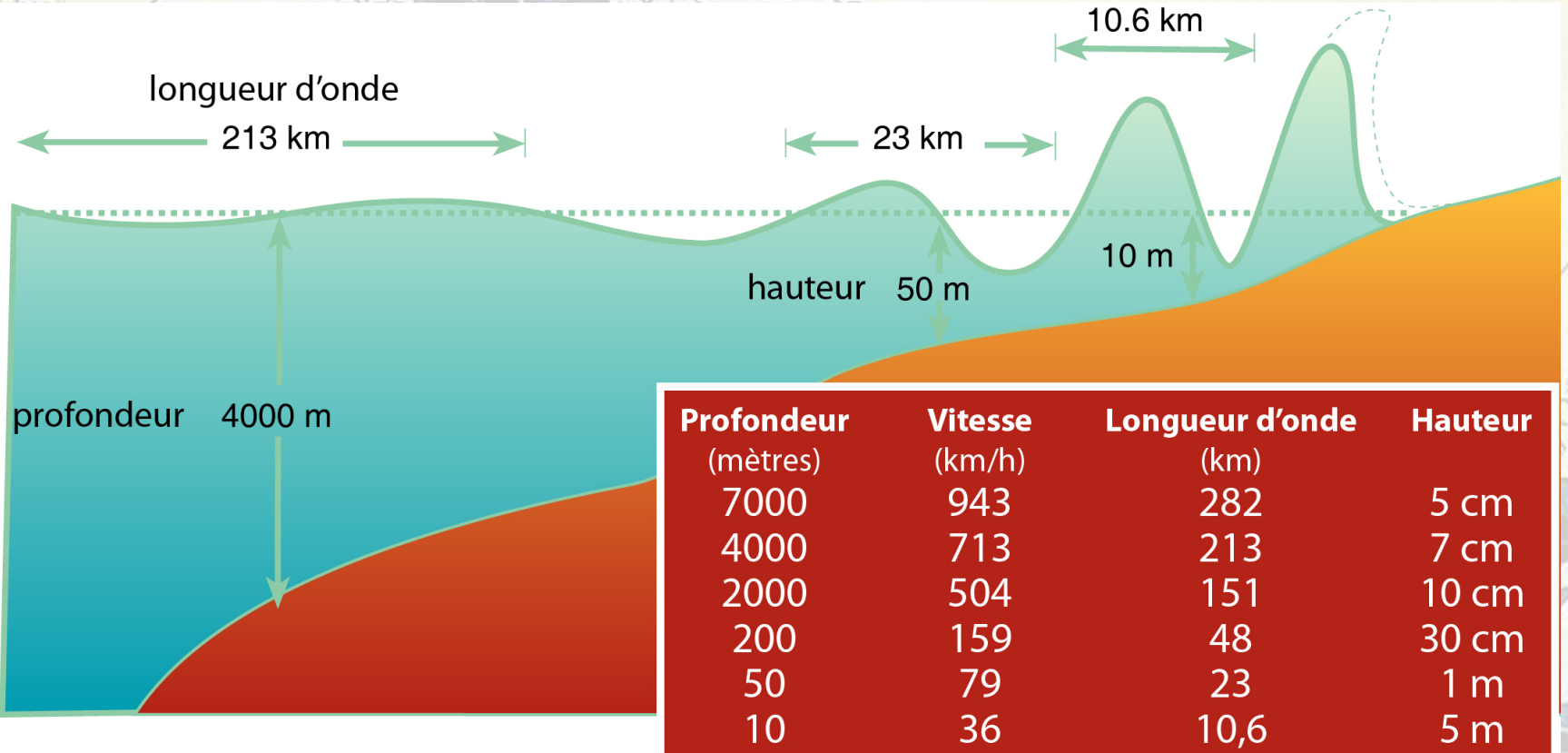
$$E = \frac{u^2}{2} + g(h + b)$$

La vague

devient **plus haute** (h)

et l'eau va **plus vite** (u) !

# Hauteur de la vague



Source : CEA

# Hauteur de la vague

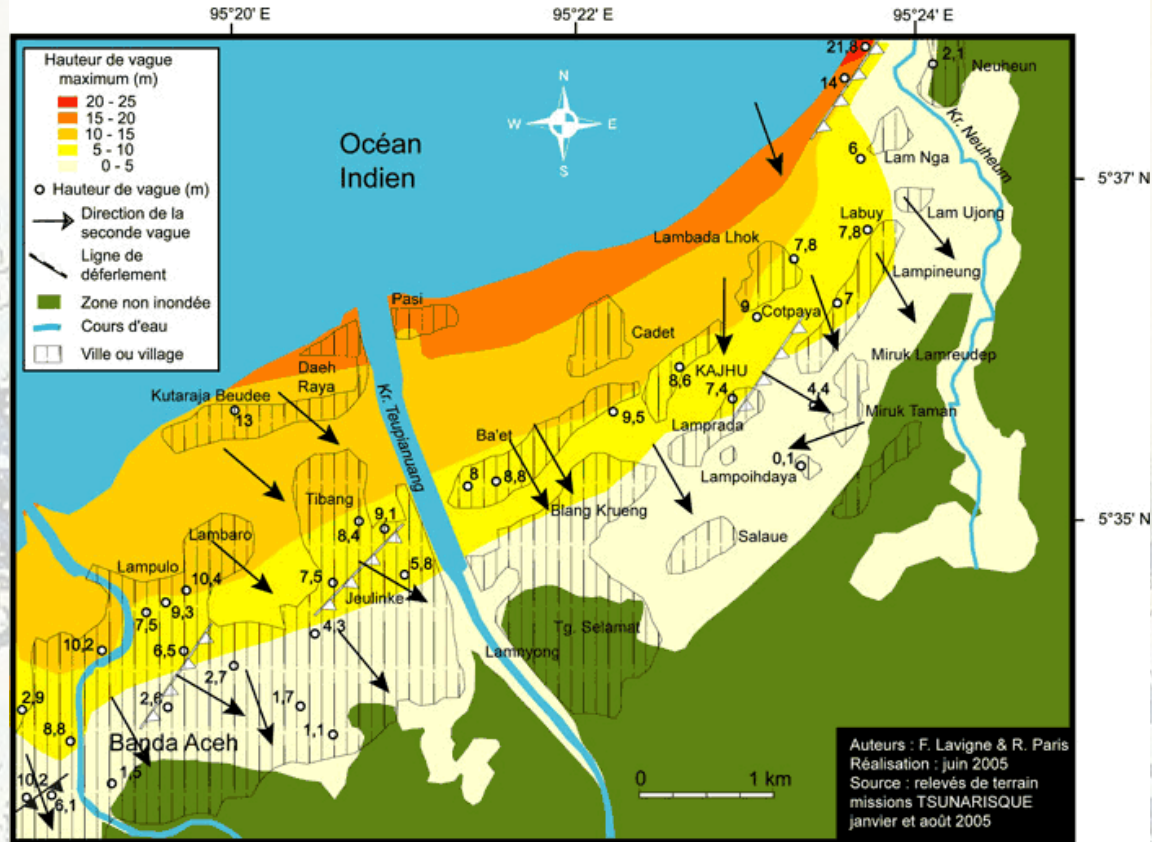
La hauteur maximale dépend très fortement de la **géométrie de la côte**.

Il y a des effets de **résonance**, liés à la réflexion des ondes sur la côte (comme le son dans une pièce « mal insonorisée »).

Les plus grandes vagues mesurées atteignent « couramment » **des hauteurs de 30 ou 40 mètres...**

# Hauteur de la vague

Orientations et hauteur des vagues du tsunami, 26 décembre 2004, Sumatra, secteur de Banda Aceh, partie nord



Source :  
Tsunarisque

# Pour aller plus loin...

Maths pour la planète Terre :

Des dizaines de brèves, de modules et de films

<http://mpt2013.fr/>

IMAGINARY, Open Mathematics :

Une plateforme pour des maths ludiques et artistiques

<http://imaginary.org/fr>

Des TPEs sur les tsunamis :

<http://tsunamis.pagesperso-orange.fr/TPE%20-%20les%20tsunamis/accueil.htm>

et des dizaines d'autres exemples !!!



# Hokusai au Grand palais

<http://www.grandpalais.fr/fr/hokusai>

Jusqu'au 18 janvier 2015