I CW-KOMPLEXE

Ein Ziel der alg. Topologie ist es, stetige Ab. $f: X \to Y$ bis auf Homotopie zu klassifizieren;
Problem: es ist allgemein schwierig, Abbildung überhaupt zu konstruieren.

CW-Komplexe sind Räume, die induktiv durch Anheften von "Zellen" konstruiert werden. Das erlaubt uns auch Abbildungen zwischen CW-Komplexe induktiv zu konstruieren. Ausserdem verfügen CW-Komplexe über viele gute Eigenschaften, und bilden eine Kategorie von Räumen, die den Zwecken der alg. Topologie gut dient. Zum Beispiel:

- ein CW-Paar (X, A) ist immer ein gutes Paar;
- Satz von J.H.C Whitehead: Sind X, Y CW-Komplexe, dann ist eine Ab. $f: X \to Y$ genau dann ein Homotopie-Äquiv., wenn $f_*: \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, f(x_0))$ ein Iso für alle $x \in X$ und alle $n \geq 0$ ist.

<u>1.1 Definition</u>: Sei X ein Raum, $n \geq 0$. Eine n-Zelle $e = e^n \subset X$ ist ein Teilraum, der homöomorph mit $\mathring{D}^n$ ist:

$$D^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^n,$$
$$\mathring{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_2 < 1 \} \subset \mathbb{R}^n$$

(Insbesondere ist $\mathring{D}^0 = D^0 = \{0\}$ ein Punkt)

<u>1.2 Definition</u> Sei X ein Hausdorff-Raum. Eine <u>CW-Zerlegung</u> von X ist ein Paar (K, Φ), wobei:

$$K \subset \{ U \mid U \subset X \text{ ein Teilraum} \}$$

eine Familie von Zellen in X ist, und

$\Phi = \{ \chi_e : D^n \to X \mid e = e^n \in K \}$

eine Familie von stetigen Ab. ist, so dass folg. Eig. gelten:

(a) $X = \coprod_{e \in K} e$ (disjunkte Vereinigung als <u>Menge</u>!)

Wir definieren $K^{(n)} = \{ e \in K \mid e = e^m, 0 \leq m \leq n \} \subset K$

und $X^{(n)} = \coprod_{e \in K^{(n)}} e$ als Menge, versehen mit der Teilraumtopologie: $X^{(n)} \subset X$.

(b) Für alle $e = e^n \in K$ definiert χ_e eine Ab. von Paaren $\chi_e : (D^n, S^{n-1}) \to (X^{(n-1)} \cup e, X^{(n-1)})$ mit $\chi_e(\mathring{D}^n) \subset e$ und $\chi_e|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \to e$ ist ein Homöo.

(c) Der Abschluss $\bar{e}$ von e in X ist in einer <u>endlichen</u> Vereinigung von Zellen aus K enthalten.

(d) Die Topologie von X ist die schwache Topologie bezüglich K: $U \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $U \cap \bar{e}$ für alle $e \in K$ abgeschlossen ist.

Ein <u>CW-Komplex</u> ist ein Hausdorff-Raum X mit einer gegebenen CW-Zerlegung. Der Teilraum $X^{(n)} \subset X$ heißt der <u>n-Gerüst</u> (oder n-Skelet) von X. Wir setzen $X^{(m)} = \emptyset$ für $m < 0$. Wir erhalten die <u>Zelluläre-Filtrierung</u>

$$\emptyset = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \dots \subset X^{(n)} \subset \dots \subset X.$$

Existiert $d = \min \{ n \geq -1 \mid X^{(n)} = X \}$, so definieren wir die <u>Dimension</u> von X als $\dim(X) = d$; ansonsten setzen wir $\dim(X) = \infty$. Ist K endlich, so heißt X ein <u>endlicher CW-Komplex</u>. Die Abbildung $\chi_e : D^n \to X$ heißt die <u>charakteristische Abbildung</u> von e, und $\chi_e|_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to X^{(n-1)}$ heißt die <u>Klebe-Abbildung</u> von e

<u>1.3 Bemerkungen</u>: (a) CW-Komplexe wurden 1947 von J.H.C. Whitehead eingeführt.

<u>CW</u>: "C" steht für <u>closure finite</u> (das ist 1.2.(c)),
"W" steht für <u>weak topology</u> (das ist 1.2.(d)).

(b) $X = \emptyset$ ist als CW-Komplex zugelassen. Es gilt
$X = \emptyset \iff X^{(0)} = \emptyset$

(c) Es gilt $\overline{e^n} = \chi_e(D^n)$: "$\supset$" folgt aus der Stetigkeit von χ_e, "$\subset$" gilt weil $\chi_e(D^n)$ abgeschlossen ist (kompakter Teilraum eines Hausdorff-Raumes).

⚠ Es wird nicht verlangt, dass $\chi_e|_{S^{n-1}}$ injektiv ist, und $\chi_e : D^n \to \overline{e^n}$ ist im allgemeinen kein Homöo.

(d) Ist X ein endlicher CW-Komplex, so sind die Bedingungen 1.2.(c) und (d) der Definition unnötig (automatisch erfüllt).

<u>1.4 Beispiele</u>: (a) Ein diskreter Raum $X \neq \emptyset$ besitzt die Struktur eines 0-dimensionalen CW-Komplex; jeder 0-dimensionaler CW-Komplex ist ein diskreter Raum.

(b) Sei $e^0 = \{N\} \subset S^n$, und $e^n = S^n \setminus e^0$, mit N = Nord-Pol $= (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Dann besitzt S^n ein CW-Struktur mit Zellen $K = \{e^0, e^n\}$: $\chi^0 : D^0 \to S^n$, $0 \mapsto N$, und zum Beispiel $\chi^n : D^n \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, gegeben durch
$x \mapsto \left(\left(2\sqrt{1-\|x\|^2} \right) \cdot x ,\ 2\|x\|^2 - 1 \right)$. Dann gilt, dass
$\chi^n(S^{n-1}) \subset e^0 = S^{n\,(0)}$, und $\chi^n|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \to e^n$ ist ein Homöo. Dank 1.3.(d) ist dies also eine CW-Struktur auf S^n.

(c) Wir haben auf $\mathbb{R}$ eine CW-Struktur mit 0-Zellen die Punkten aus $\mathbb{Z}$ und 1-Zellen die Intervalle $(n, n+1)$ für $n \in \mathbb{Z}$. Bedingungen (a, b, c) aus 1.2 sind offensichtlich erfüllt, (d) ist eine leichte Aufgabe!

1.5 Definition: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex und sei $L \subset K$. Sei $\Phi_L = \{ \chi_e \in \Phi \mid e \in L \}$, und $Y = \coprod_{e \in L} e \subset X$ (mit der Teilraum-Topologie versehen). Der Teilraum Y heißt ein Unterkomplex oder CW-Teilraum, falls $\chi_e(D^n) \subset Y$ für alle $e = e^n \in L$, und (L, Φ_L) eine CW-Zerlegung von Y ist.

1.6 Lemma: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex und $L \subset K$ endlich. Dann ist $Y = \coprod_{e \in L} e \subset X$ genau dann ein Unterkomplex von X, wenn Y in X abgeschlossen ist.
So folgt: sind $Y_1, \dots, Y_m$ endliche Unterkomplexe von X, so sind $\bigcap_{i=1}^m Y_i$ und $\bigcup_{i=1}^m Y_i$ auch Unterkomplexe.

Beweis: ist Y ein Unterkomplex, dann gilt $\bar{e} = \chi_e(D^n) \subset Y$ für alle $e = e^n \in L$, also $Y = \bigcup_{e \in L} \bar{e}$, und dies ist abgeschlossen (L endlich).
Umgekehrt, ist Y abgeschlossen, $e \in L$, so folgt aus $e \subset Y \Rightarrow \bar{e}^X \subset Y$, also $\chi_e(D^n) = \bar{e}^X \subset Y$.
Zu prüfen: (L, Φ_L) ist eine CW-Zerlegung von Y.
1.2. (a) ist klar, (b) auch weil $Y^{(n)} = Y \cap X^{(n)}$.
(c) und (d) folgen aus L endlich. #

1.7 Lemma: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex, $e \in K$. Dann liegt $\bar{e}$ in einem endlichen Unterkomplex von X.
Beweis: Induktion auf n mit $e = e^n$; $n = 0$ klar.
Sei $n \geq 1$ und Lemma bewiesen für $e = e^m$, $m < n$.
Wir haben $\bar{e} \setminus e \subset X^{(n-1)}$ und $\bar{e} \setminus e \subset \bigcup_{i=1}^r e_i$, $e_i \in K$.
Durch Induktion: $\bar{e}_i \subset X_i \subset X$ endl. Unterkomplex.
Also ist $e \cup X_1 \cup \dots \cup X_r = \bar{e} \cup X_1 \cup \dots \cup X_r$ eine abg. Vereinigung von Zellen, also ein Unterkomplex dank 1.6 #

1.8 Korollar: Die Topologie eines CW-Komplexes X ist die schwache Topologie bezüglich den endlichen Unterkomplexen: $A \subset X$ abgeschlossen $\Leftrightarrow$ $\forall\, Y \subset X$ endl. Unterkomplex, $A \cap Y$ ist abgeschlossen in Y.

Beweis: "$\Rightarrow$" klar; "$\Leftarrow$": Sei $e \in K$, wähle Y endl. Unterkomplex mit $\bar{e} \subset Y$; $A \cap Y$ abgeschlossen $\Rightarrow$ $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen in $\bar{e}$. Also ist A abgeschlossen. #

1.9 Theorem: Sei X ein CW-Komplex; ist $A \subset X$ kompakt, so existiert ein endlicher Unterkomplex $Y \subset X$ mit $A \subset X$. Insbesondere ist X genau dann kompakt, wenn X ein endlicher CW-Komplex ist.

Beweis: Sei (K, Φ) die CW-Zerl. von X; sei $L = \{ e \in K \mid e \cap A \neq \emptyset \}$. Für $e \in L$ wähle $x_e \in e \cap A$, und sei $B = \{ x_e \mid e \in L \}$. Dann gelten

(i) B ist abgeschlossen in X: ist $Y \subset X$ ein endlicher Unterkomplex, so ist $B \cap Y$ eine endliche Menge, also abgeschlossen in Y. 1.8 $\Rightarrow$ B abgeschlossen.

(ii) B ist diskret: $x \in B \Rightarrow B \setminus \{x\}$ abgeschlossen: wie (i)!

Da B kompakt ist (abgeschlossen in A kompakt), ist B endlich; also L ebenso. Dank 1.7 + 1.6 wissen wir, dass $\bigcup_{e \in L} e$ in einem endlichen Unterkomplex $Y \subset X$ liegt, und $K \subset \bigcup_{e \in L} e \subset Y$. #

1.10 Satz: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex, und $L \subset K$; sei $Y = \bigcup_{e \in L} e$; die folg. Eigen. sind äquiv.:

(a) (Y, L, Φ_L) ist ein Unterkomplex,

(b) Y ist abgeschlossen in X,

(c) $e \in L \Rightarrow \bar{e} \subset Y$.

Beweis: Wir benutzen noch folgender Eigenschaft:

(d) Ist $A \subset Y$ mit $\bar{e} \cap A$ abgeschlossen in $\bar{e}$ für alle $e \in L$, so ist A abgeschlossen in X.

(a) ⇒ (c) und (b) ⇒ (c) sind offensichtlich.

Nun (c) ⇒ (d); dank 1.8 genügt es zu zeigen: für alle endliche Unterkomplexe $Z \subset X$ ist $Z \cap A$ abgeschlossen in Z. Es existieren $e_1, \dots, e_r \in L$ mit $Z \cap Y = e_1 \cup \dots \cup e_r = \bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_r$ (die zweite Gleichung gilt weil Z abgeschlossen ist, (1.6), und $\bar{e}_i \subset Y$ (Voraussetzung (c))). Also

$Z \cap A = A \cap (\bar{e}_1 \cup \dots \cup \bar{e}_r) = \bigcup_i (A \cap \bar{e}_i)$ abgeschlossen in Z.

(d) ⇒ (b): nimm $A = Y$.

(d) ⇒ (a): (Y, L, Φ_L) ist ein CW: 1.2(a) ist gegeben; 1.2(b) gilt weil $e \in L \Rightarrow \bar{e} \subset Y$ (dank (d) ⇒ (b) schon bewiesen). 1.2(c) ist klar (weil X ein CW ist), und 1.2(d) folgt aus unsere Voraussetzung (d). #

1.11 Korollar: Sei X ein CW Komplex, und $\{ Y_i \mid i \in I \}$ eine Familie von Unterkomplexen von X. Dann sind $\bigcap_{i \in I} Y_i$ und $\bigcup_{i \in I} Y_i$ auch Unterkomplexen.

Beweis: Y_i Unterkomplex $\forall i \overset{(a) \Rightarrow (b)}{\Rightarrow} Y_i$ abg. in X $\forall i$ $\Rightarrow \bigcap Y_i$ abgeschlossen $\overset{(b) \Rightarrow (a)}{\Rightarrow} \bigcap Y_i$ Unterkomplex. Ebenso (a) ⇔ (c) in 1.10 impliziert, dass $\bigcup_{i \in I} Y_i$ ein Unterk. ist. #

1.12 Korollar: Sei X ein CW-Komplex und sei N die Menge der n-Zellen in X für $n \geq 0$ gegeben. Sei $J \subset N$. Dann ist $X^{(n-1)} \cup \bigcup_{e \in J} e$ ein Unterkomplex von X. Insbesondere ist $X^{(n-1)}$ ein Unterkomplex, und jede n-Zelle $e \in N$ ist offen in $X^{(n)}$.

<u>Beweis</u>: 1.10 (c) gilt für $Y = X^{(n-1)} \cup \bigcup_{e \in J} e$.

Mit $J = \emptyset \Rightarrow X^{(n)}$ ist ein Unterkomplex.

Mit $J = N \setminus \{e\} \Rightarrow X^{(n-1)} \cup \bigcup_{e \in J} e$ abges. in X (und in $X^{(n)}$).

Die Zelle e ist das Komplement davon in $X^{(n)}$, also offen. #

<u>1.13 Satz</u> Sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, und sei (Y, L, Ψ) ein CW-Komplex der Dimension $d < n$. Sei $\{\varphi_\alpha : S^{n-1} \to Y\}_{\alpha \in J}$ eine Familie von stetigen Ab.. Sei J mit der diskreten Top. versehen, und sei $Z = Y \amalg (D^n \times J)$. Sei $\sim$ die Äquiv. Rel. auf Z, die durch $\varphi_\alpha(x) \sim (x, \alpha)$ für alle $(x, \alpha) \in S^{n-1} \times J$ erzeugt ist. Sei $Z \xrightarrow{\pi} Z/\sim =: X$ der Quotientenraum.

In anderen Worten: X ist als Push-Out

$$\begin{tikzcd} \coprod_J S^{n-1} \arrow[r, "\amalg \varphi_\alpha"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & Y \arrow[d, hook] \\ \coprod_J D^n \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

definiert.

Sei $\chi_\alpha : D^n \cong D^n \times \{\alpha\} \hookrightarrow Z \xrightarrow{\pi} X$ und sei $e_\alpha := \chi_\alpha(\mathring{D}^n)$, für alle $\alpha \in J$. Setze $K = \{e \mid e \in L\} \cup \{e_\alpha \mid \alpha \in J\}$ und $\Phi = \{\chi_e \mid e \in L\} \cup \{\chi_\alpha \mid \alpha \in J\}$. Dann ist (X, K, Φ) ein CW-Komplex (der Dimension n falls $J \neq \emptyset$), und (Y, L, Ψ) ist ein Unterkomplex mit $Y = X^{(d)}$.

<u>Beweisen</u>: Wir überprüfen (a), (b), (c), (d) in 1.2:

(a) Die Einschränkung der Quot. Ab. $\pi : Y \amalg (\mathring{D}^n \times J) \to X$ ist bijektiv : daraus folgt $X = \coprod_{e \in K} e$.

(b) Die Einschrä. $\pi : Y \to X$ ist ein Homöo auf $\pi(Y) \subset X$. In der Tat ist $\pi : Y \to \pi(Y)$ stetig und bijektiv; sie ist auch abgeschlossen: Sei $A \subset Y$ abgeschlossen; $\pi^{-1}\pi(A) = A \amalg \left(\coprod_{\alpha \in J} (\varphi_\alpha^{-1}(A), \alpha) \right)$ abg. in Z, also $\pi(A)$ abg.

Wir identifizieren nun Y mit $\pi(Y) \subset X$.

Daraus Folgt, dass (b) für alle $X_e \in \Phi$, $e \in L$ gilt. ⑧

Analog: die Einschr. $\pi : \mathring{D}^n \times \{\alpha\} \to e_\alpha \subset X$ ist ein Homöo: stetig und bijektiv, und offen:

Für $U \subset \mathring{D}^n \times \{\alpha\}$ gilt $\pi^{-1}(\pi(U)) = U$.

Also ist $\chi_\alpha : \mathring{D}^n \to e_\alpha$ ein Homöo. Daraus folgt dass $\{e_\alpha \mid \alpha \in J\}$ aus n-Zellen besteht, und dass $X^{(n-1)} = Y$.

Es folgt $\chi_\alpha(S^{n-1}) \subset Y = X^{(n-1)}$. Damit ist auch (b) ok.

Bevor wir (c) beweisen können, müssen wir zeigen: X ist ein Hausdorffraum; Seien $x, y \in Z$ mit $\pi(x) \neq \pi(y)$.

Wir suchen offene Umgeb. U, V von x, y in Z mit $U = \pi^{-1}\pi(U)$, $V = \pi^{-1}\pi(U)$, U und V disjunkt; dann sind $\pi(U)$ und $\pi(V)$ disjunkte Umgebungen von $\pi(x), \pi(y)$.

(i) $x, y \in Y \subset Z$; Wähle U', V' offen und disjunkt in Y, mit $x \in U'$, $y \in V'$. Setze

$$U = U' \cup \{(x, \alpha) \in D^n \times J \mid \|x\| > 0, \varphi_\alpha\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in U\}.$$

und analog für V.

(ii) $x = (z, \alpha) \in \mathring{D}^n \times J$, $y \in Y$:

$$U = \{(\omega, \beta) \in D^n \times J \mid \|\omega\| < \tfrac{1}{2}(1 + \|z\|)\}$$

$$V = Y \amalg D^n \times (J \setminus \alpha) \amalg \{(\omega, \alpha) \in D^n \mid \|\omega\| > \tfrac{1}{2}(1 + \|z\|)\}.$$

(iii) $x, y \in \mathring{D}^n \times J$: Wähle U und V in $\mathring{D}^n \times J$.

Damit ist bewiesen, dass X Hausdorffsch ist.

(c) Dieses Axiom gilt für $e \in L$ da Y ein CW ist.

Sei $\alpha \in J$; Wir haben $\overline{e_\alpha} = \chi_\alpha(D^n)$ weil X Hausdorffsch. Insbesondere $\overline{e_\alpha} \subset e_\alpha \cup \varphi_\alpha(S^{n-1})$;

Nun $\varphi_\alpha(S^{n-1})$ ist ein kompakter Teilraum von Y, also ist in ein endlicher Unterkomplex $T = e_1 \cup \dots \cup e_r$ enthalten. Also $\overline{e_\alpha} \subset e_\alpha \cup e_1 \cup \dots \cup e_r$.

(d) Sei $A \subset X$ mit $A \cap \bar{e}$ abgeschlossen in $\bar{e}$ für alle $e \in K$. Es genügt zu zeigen: $\pi^{-1}(A) \subset Z$ ist abgeschlossen. Wir haben

$$\pi^{-1}(A) = Y \cap A \amalg \coprod_{\alpha} \left(\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \bar{e}_\alpha) \times \{\alpha\} \right).$$

Nun ist $Y \cap A$ abgeschlossen in Y, da Y die schwache Topologie bezüglich $\{\bar{e} \mid e \in L\}$ hat.
Ebenso ist $\varphi_\alpha : D^n \to \bar{e}_\alpha$ stetig und $A \cap \bar{e}_\alpha$ abgeschl. in $\bar{e}_\alpha$, also $\varphi_\alpha^{-1}(A \cap \bar{e}_\alpha)$ ist abg. in D^n.
Das beweist, dass $\pi^{-1}(A) \subset Z$ abgeschlossen ist.
Damit ist der Beweis beendet, dass X ein CW ist.
Wir haben $Y = X^{(d)}$, und Y ist also ein Unterkomplex.
#

<u>1.14 Definition:</u> In der Lage von Satz 1.13 sagen wir, dass man X von Y durch Anheften von n-Zellen (entlang die φ_α, $\alpha \in J$) erhält.

<u>1.15 Satz</u> (Induktive Konstruktion eines CW). Sei X ein Raum, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Unterräumen, mit
(a) X_0 ist diskret
(b) $X_{n-1} \subset X_n$, und X_n erhält man (bis auf Homöomorphismus) durch Anheften von n-Zellen $\{e_\alpha \mid \alpha \in J_n\}$ an X_{n-1}, für alle $n \geq 1$.
(c) $X = \bigcup_{n \geq 0} X_n$, und X hat die schwache Topologie bezüglich $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.
Dann ist X ein CW-Komplex mit 0-Zellen $e \in X_0$ und n-Zellen $\{e_\alpha \mid \alpha \in J_n\}$, $n \geq 1$, und Char. Ab. wie 1.13 gegeben. Es gilt $X^{(n)} = X_n \ \forall n \geq 0$.

<u>Bemerkung:</u> oft werden die X_n iterativ durch Anheften konstruiert, und <u>dann</u> definiert man $X := \bigcup X_n$, mit der schwache Topologie.

Beweis: durch iterierte Anwendung von 1.13 erhalten wir eine CW-Struktur auf X_n für alle $n \geq 0$, und $X_n \subset X_{n+1}$ ist ein Unterkomplex. Sei $K = X_0 \cup \{ e_\alpha \mid n \geq 1, \alpha \in J_n \}$. Dann gilt $X = \bigcup_{e \in K} e$.

(i) X ist Hausdorff. Seien $x, y \in X$. Wähle n mit $x, y \in X_n$. Da X_n Hausdorff ist, existieren U_n, V_n offen in X_n, disjunkt, mit $x \in U_n$, $y \in V_n$.

Wir konstruieren für alle $m \geq n+1$ offene, disjunkte Teilräume $U_m, V_m \subset X_m$, mit $U_m \cap X_{m-1} = U_{m-1}$ und $V_m \cap X_{m-1} = V_{m-1}$: das tun wir durch Induktion auf m; sind U_m und V_m gegeben, so werden U_{m+1} und V_{m+1} wie im Beweis von 1.13, Teil (b) (i) konstruiert.

Sei $U = \bigcup_{m \geq n} U_m$, $V = \bigcup_{m \geq n} V_n$; dann sind U und V disjunkt in X, und offen ($U \cap X_m = U_m$ offen X_m, schwache Topologie). Da $x \in U$, $y \in V$, ist X Hausdorff.

(ii) X hat die schwache Topologie bezüglich $\{ \bar{e} \mid e \in K \}$: Klar, weil jedes $\bar{e}$ liegt in ein X_n, und X hat die schwache Topologie bezüglich $\{X_n\}_{n \geq 0}$, und jeder X_n hat die schwache Topologie bezüglich $\{ \bar{e} \mid e \in K, \bar{e} \subset X \}$.

(iii) Die anderen Axiome (b) und (c) aus 1.2 sind klar, weil jeder Zelle in ein X_n liegt, und X_n ein CW ist. #

1.16 Bemerkung: In Satz 1.13 (und 1.15) gibt es keine Bedingung auf die Klebe Abbildungen $S^{n-1} \to X^{(n-1)}$ (außer die Stetigkeit!), was für viel Flexibilität in der Konstruktion von CW-Komplexe sorgt.

<u>1.17 Beispiele</u>: CW-Strukturen auf S^n, $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$ kann man leicht induktiv definieren, durch Anheften von Zellen. Die einzige "Schwierigkeit" ist dabei zu zeigen, dass die Räume, die wir so erhalten, homöomorph mit den bereits definierte "Originale" sind.

(a) $S^0 = \{e^0_+, e^0_-\}$ diskret. Ist S^{n-1} bereits für $n \geq 1$ definiert, so wird S^n durch Anheften von zwei n-Zellen e^n_+, e^n_- an S^{n-1} erhalten, beide mit klebe Abbildung $id: S^{n-1} \to S^{n-1}$.

Dann hat S^n zwei k-Zellen in jede dimension $0 \leq k \leq n$, insgesamt $\{e^0_\pm, e^1_\pm, \dots, e^n_\pm\}$. Die so abstrakt-definierte Sphäre S^n_{CW} ist homöomorph mit $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$; als Zellen nimmt man

$e^k_\pm = S^n \cap (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}_{\gtrless 0} \times 0)$, mit charakteristische Ab.

$\chi^k_\pm : D^k \longrightarrow S^n$, $(x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_k, \pm\sqrt{1-\|x\|^2}, 0 \dots 0)$.

So erhält man ein induktiv-konstruierte Homöo $S^n_{CW} \xrightarrow{f} S^n$ durch die Faktorisierung

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \amalg D^n \amalg D^n \arrow[r, "i \amalg \chi^n_+ \amalg \chi^n_-"] \arrow[d, "\pi"] & S^n \\ S^n_{CW} \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

f ist stetig und bijektiv, also ein Homöo (Kompakt $\to$ Hausdorff).

Ebenso besitzt $S^\infty := \bigcup_{n \geq 0} S^n$, mit der schwachen Topologie bezüglich $\{S^n\}_{n \geq 0}$, eine CW-Struktur mit zwei Zellen in jede dimension $k \geq 0$.

Vorteile von diesen Konstruktion auf die von Beispiel 1.4 (b):

- $S^{n-1} \subset S^n$ ist ein Unterkomplex
- CW-Zerlegung ist verträglich mit der Antipodale $\mathbb{Z}/2$-Wirkung.

(b) $\mathbb{R}P^0 = \{e^0\}$, $\mathbb{R}P^1_{cw}$ hat zwei Zellen $\{e_0, e_1\}$ ($\mathbb{R}P^1 = S^1$ mit CW-Struktur wie in 1.4.(b)). Wir erhalten $\mathbb{R}P^n_{CW}$ durch Anheften einer n-Zelle e^n entlang $S^{n-1} \xrightarrow{q} S^{n-1}/\mathbb{Z}/2 \cong \mathbb{R}P^{n-1}_{CW}$

Um zu prüfen dass das Ergebnis in der Tat homöomorph mit $\mathbb{R}P^n$ ist, betrachte $b: D^n \to D^n$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-x_1, \dots, -x_n)$.

Dann haben wir ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \amalg D^n \amalg D^n \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "q \amalg id \amalg b"] & S^n \arrow[d, "q"] \\ \mathbb{R}P^{n-1} \amalg D^n \arrow[r, dashed, "\pi"] \arrow[dr] & \mathbb{R}P^n \\ & \mathbb{R}P^n_{CW} \arrow[u, dotted, "f"'] \end{tikzcd}$$

Wiederum ist f stetig und bijektiv, also ein Homöo ($Kpt \to T_2$).

Also kann man auf $\mathbb{R}P^n$ eine CW-Struktur mit einer Zelle e^k jede Dimension $0 \leq k \leq n$, die entlang

$$S^{k-1} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P^{k-1} = (\mathbb{R}P^n)^{(k-1)}$$

geklebt wird. Wir definieren $\mathbb{R}P^\infty := \bigcup_n \mathbb{R}P^n$ mit der schwachen Topologie: es ist ein CW-Komplex mit einer Zelle in jede Dimension.

(c) $\mathbb{C}P = \{e^0\}$, und $\mathbb{C}P^n$ erhält man durch Anheften einer $2n$-Zelle e^{2n} an $\mathbb{C}P^{n-1}$, entlang $S^{2n-1} \to S^{2n-1}/S^1 \cong \mathbb{C}P^{n-1}$.
Man definiert $\mathbb{C}P^\infty = \bigcup_{n\geq 1} \mathbb{C}P^n$, mit der Schwache Topologie.
Im detail: Aufgabe 1.3.

(d) CW-Zerlegungen von D^n: Wir können mit einer CW-Zerlegung von S^{n-1} anfangen, und dann eine n-Zelle entlang $S^{n-1} \xrightarrow{id} S^{n-1}$ kleben. Zum Beispiel, ist S^{n-1} wie in 1.4 (b) zerlegt, so haben wir eine CW-Zerlegung von D^n mit 3 Zellen: $\{e^0, e^{n-1}, e^n\}$, $n \geq 1$. Oder: $D^n \cong \Delta^n$ mit $\binom{n}{k}$ k-Zellen.

Nun beschäftigen wir uns etwas mit der Topologie von CW-Komplexen.

<u>1.18 Definition</u> Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex, und sei $K \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{R}_{>0}$ eine Funktion auf der diskreten Menge K.
Sei $A \subset X$. Wir definiere ein offene Umgebung $N^n_\varepsilon(A)$ von $X^{(n)} \cap A$ in $X^{(n)}$ induktiv, wie folgt:

(i) $N^0_\varepsilon(A) = X^{(0)} \cap A$

(ii) $n \geq 1$ und $N^{n-1}_\varepsilon(A)$ bereits definiert. Betrachte

$$\pi : Z = X^{(n-1)} \amalg D^n \times J_n \to X^{(n)} \quad \text{(Quotienten Ab.)}$$

mit $J_n = \{e \in K \mid \dim(e) = n\}$ diskret.

Sei $\mathcal{U}^n_\varepsilon \subset Z$ als $\mathcal{U}^n_\varepsilon = N^{n-1}_\varepsilon(A) \amalg \coprod_{e \in J_n} V_e(A)$

mit

(∗) $V_e(A) = \{ B_{\varepsilon(e)}(x) \cap \mathring{D}^n \mid x \in \mathring{D}^n \times \{e\},\ \chi_e(x) \in A \}$

$\cup \{ \omega \mid \omega \in D^n \times \{e\},\ \|\omega\| > 1-\varepsilon,\ \chi_e\left(\frac{\omega}{\|\omega\|}\right) \in N^{n-1}_\varepsilon(A) \}$

Dann ist $V_e(A)$ offen in $D^n \times \{e\}$, und $\mathcal{U}^n_\varepsilon$ ist offen in Z, mit $\mathcal{U}^n_\varepsilon = \pi^{-1}(\pi(\mathcal{U}^n_\varepsilon))$. Insbesondere ist $N^n_\varepsilon(A) = \pi(\mathcal{U}^n_\varepsilon)$ offen in $X^{(n)}$, und enthält $X^{(n)} \cap A$.
Ausserdem gilt $N^n_\varepsilon(A) \cap X^{(n-1)} = N^{n-1}_\varepsilon(A)$.
Sei $N_\varepsilon(A) = \bigcup_n N^n_\varepsilon(A) \subset X$. Dann ist $N_\varepsilon(A)$ eine offene Umgebung von A in X.

<u>1.19 Lemma</u>: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex, und $A, B \subset X$ zwei abgeschlossen Teilmenge. Dann existiert $\varepsilon : K \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $N_\varepsilon(A) \cap N_\varepsilon(B) = \emptyset$. Insbesondere ist X <u>normal</u>.

<u>Beweis</u>: Sei $K_n = \{ e \in K \mid \dim(e) \leq n \}$ und $J_n = \{ e \in K \mid \dim(e) = n \}$. Wir definieren $\varepsilon : K_0 \to \mathbb{R}_{>0}$ als konstant mit Wert 1: $N^0_\varepsilon(A) = A \cap X^{(0)}$, also ist klar dass $N^0_\varepsilon(A) \cap N^0_\varepsilon(B) = \emptyset$. Sei $n \geq 1$, und nehmen wir an, $\varepsilon : K_{n-1} \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $N^{n-1}_\varepsilon(A) \cap N^{n-1}(B) = \emptyset$ wurde definiert. Sei $e \in J_n$.
In $D^n = D^n \times \{e\} \subset Z$ haben wir folgenden Teilraum: $\Pi(A) = \chi_e^{-1}(N^{n-1}_\varepsilon(A))$, $\Pi(B) = \chi_e^{-1}(N^{n-1}_\varepsilon(B))$ beide in $S^{n-1} \subset D^n$, und $\chi_e^{-1}(A)$, $\chi_e^{-1}(B)$. Wir haben für die Euklidische Metrik d:

$$\left.\begin{array}{ll} (a) & d(\Pi(A), \chi_e^{-1}(B)) = \delta_1 > 0 \\ (b) & d(\Pi(B), \chi_e^{-1}(A)) = \delta_2 > 0 \\ (c) & d(\chi_e^{-1}(A), \chi_e^{-1}(B)) = \delta_3 > 0. \end{array}\right\} \quad \text{Wähle } \varepsilon(e) \text{ mit } 2\varepsilon(e) < \delta_i \text{ für } i = 1,2,3.$$

Um (a), (b), (c) zu beweisen benutzt man die Kompaktheit von $\chi_e^{-1}(A)$, $\chi_e^{-1}(B)$. Zu (a): gilt $d(\Pi(A), \chi_e^{-1}(B)) = 0$, so wähle eine Folge $\{x_n\} \subset \chi_e^{-1}(B)$ mit $d(\Pi(A), x_n) < \frac{1}{n}$. Da $\chi_e^{-1}(B)$ kompakt ist, existiert eine Teilfolge $\{y_n\}$, die in $\chi_e^{-1}(B)$ gegen y konvergiert. Wir haben $y \in \chi_e^{-1}(B) \cap S^{n-1}$. Aber $\Pi(B)$ ist dann eine offene Umgebung von y in S^{n-1}, die disjunkt ist von $\Pi(A)$: also $d(\Pi(A), y) > 0$, ein Widerspruch. Ebenso werden (b), (c) bewiesen.

Mit der obigen Wahl von $\varepsilon(e)$ ist nun klar, dass

$V_e(A)$ und $V_e(B)$ (wie in Def. 1.18 (*)) disjunkt in $D^n \times \{e\}$ sind. Somit ist $\varepsilon : K^n \to \mathbb{R}_{>0}$ definiert, mit $N_\varepsilon^n(A) \cap N_\varepsilon^n(B) = \emptyset$. #

<u>1.20 Lemma</u>: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex. Dann ist X lokal-zusammenziehbar.

<u>Beweis</u>: Sei $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x. Nach Lemma 1.20 existiert $\varepsilon : K \to \mathbb{R}_{>0}$ mit $N = N_\varepsilon(\{x\}) \subset \overline{N} \subset U$. Wir zeigen: $N \simeq \{x\}$ rel $\{x\}$.

Sei $N^n = N \cap X^{(n)}$. Es existiert genau eine Zelle $f \in K$ mit $x \in f$; sei $l = \dim(f)$.

Betrachte $\chi_f : D^n \to \overline{f}$; sei $y = \chi_f^{-1}(x)$. Wir können annehmen, dass $\varepsilon(f)$ klein genug is so dass

$B_{\varepsilon(f)}(y) = \chi_f^{-1}(N) \subset \mathring{D}^n$.

Für $e \in K$, sei $V_e = \chi_e^{-1}(N \cap e) \subset D^n$ wie in 1.18.

Wir haben

$$V_e = \begin{cases} \emptyset & \dim e \leq l,\ e \neq f \\ B_\varepsilon(y) & e = f \\ \{ w \in D^n \mid \|w\| > 1 - \varepsilon(e),\ \chi_e\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \in N^{n-1} \} & \text{falls } \dim e = n > l. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $B_\varepsilon(y) \to \{y\}$ eine Deformations-Retraktion, und wir haben ebenso eine "radiale" Defor.-Retraktion $V_e \xrightarrow{R_e} V_e \cap S^{n-1}$ falls $\dim e > \ell$:

Da $N^\ell = \chi_\ell(B_\varepsilon(y))$ bekommen wir eine Deformations-Retraktion $N^\ell \xrightarrow{P_\ell} \{x\}$ mit Homotopie $h^\ell : id_{N^\ell} \simeq P_\ell \circ i$ rel $\{x\}$, $\{x\} \overset{i}{\hookrightarrow} N^\ell$.

Ebenso haben wir Deformations-Retraktionen $N^{n+1} \xrightarrow{P_{n+1}} N^n$ für alle $n > \ell$: betrachte die Quotienten-Abbildung $X^{(n)} \amalg \coprod_{e \in J_{n+1}} D^{n+1} \xrightarrow{\pi} X^{(n+1)}$, und das komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
{[0,1] \times \left(N^n \amalg \coprod_{e\in J_{n+1}} V_e\right)} \arrow[r, "id \times \pi"] \arrow[d, "\tilde{h}^n"'] & {[0,1] \times N^{n+1}} \arrow[d, "h^{n+1}"] \\
N^n \amalg \coprod_{e\in J_{n+1}} V_e \arrow[r, "\pi"] & N^{n+1}
\end{tikzcd}$$

Hier gilt $\tilde{h}^n\big|_{[0,1]\times N^n} = id$ und $\tilde{h}^n\big|_{[0,1]\times V_e}$:
$[0,1]\times V_e \to V_e$ ist eine "radiale" Homotopie zwischen id_{V_e} und $i \circ R_e : V_e \to V_e \cap S^{n-1} \hookrightarrow V_e$.

Bemerke dass $id \times \pi$ eine Quotienten Abbildung ist, weil $[0,1]$ lokal-kompakt und Hausdorff ist! Daraus gewinnen wir die stetige Abbildung h^{n+1}, die eine Homotopie ist zwischen $id_{N^{n+1}}$ und $h^{n+1}(1,-) : N^{n+1} \xrightarrow{P_{n+1}} N^n \hookrightarrow N^{n+1}$.

Nun reskalieren wir die Homotopien auf kleinen Intervalle:

$$h^n : [1/2^{n-\ell+1}, 1/2^{n-\ell}] \times N^n \to N^n$$

Durch Zusammensetzen von Homotopie erhalten wir
$H^n : [1/2^{n-\ell+1}, 1] \times N^n \to N^n$ mit $H^n(1/2^{n-\ell+1}, -) = id$ und $H^n(1, z) = x$ für alle $z \in N^n$.

Sei nun $H : [0,1] \times N \to N$ durch $H(0,z) = z$, $\forall z \in N$,
und
$$H(t,x) = \begin{cases} x & \text{falls } x \in N^n,\ t \leq 1/2^{n-\ell+1}, \\ H_n(t,x) & \text{falls } x \in N^n,\ t \geq 1/2^{n-\ell+1}. \end{cases}$$ definiert.

Dann ist H stetig, da $H/_{[0,1] \times N^n}$ für alle $n \geq \ell$ stetig ist, und $[0,1] \times N$ die schwache Topologie bezüglich $\{[0,1] \times N^n\}_{n \geq \ell}$ hat.

Erklärung: $[0,1] \times X$ hat die schwache Topologie bezüglich $\{[0,1] \times X^{(n)}\}_{n \geq 0}$: Hier benutzt man dass (Siehe Aufg. 2.3) $[0,1] \times \coprod_{e \in K} D^{\dim(e)} \xrightarrow{id \times \phi} [0,1] \times X$ ein Quotienten-Abbildung ist, weil ϕ es ist und $[0,1]$ lokal kompakt Hausdorff ist (Vergleiche Aufgabe 3.1).

Nun: $[0,1] \times N$ ist offen in $[0,1] \times X$, und daraus ist leicht zu zeigen: $[0,1] \times N$ hat auch die schwache Topologie bezüglich $\{[0,1] \times N^n = ([0,1] \times X^{(n)}) \cap ([0,1] \times N^n)\}_{n \geq \ell}$. #

<u>1.21 Lemma</u>: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex, $A \subset X$ ein Unterkomplex, und $\varepsilon : K \to \{1/2\}$.
Dann ist $A \hookrightarrow N_\varepsilon(A)$ ein Deformations-Retrakt.
Insbesondere ist (X, A) ein gutes Paar.

<u>Beweis</u>: Genau wie für Lemma 1.20: wir definieren induktiv Homotopien
$$h^n : [0,1] \times N^n_\varepsilon(A) \to N^n_\varepsilon(A)$$
mit $h^n(0,-) = id$ und $h^n(1,-) : N^n_\varepsilon \xrightarrow{p_n} A^{(n)} \cup N^{n-1}_\varepsilon \overset{i}{\hookrightarrow}$ $\hookrightarrow N^n_\varepsilon$: hier ist h^n Quotient der Abbildung
$$[0,1] \times \left(N^{n-1}_\varepsilon(A) \amalg \coprod_{e \in J_n} V_e\right) \xrightarrow{\tilde{h}^n} N^{n-1}_\varepsilon(A) \amalg \coprod_{e \in J_n} V_e.$$
Diesmal gilt
$$V_e = \begin{cases} D^n, & \text{falls } e \in A \\ \{ w \in D^n \mid \|w\| > 1 - \varepsilon,\ \chi_e\left(\frac{w}{\|w\|}\right) \in N^{n-1}_\varepsilon(A)\} & \text{sonst.} \end{cases}$$
Im Ersten Fall ($e \in A$) ist $\tilde{h}^n|_{[0,1] \times V_e}(t,-)$ die Identität für alle $t \in [0,1]$; Ansonsten ist es die "Radiale Homotopie".

Der Rest des Arguments läuft identisch. #

1.22 Korollar: Sei X ein CW-Komplex. Dann ist X

(a) lokal wegzusammenhängend,

(b) semi-lokal einfachzusammenhängend.

$\Big\}\Rightarrow$ Ist X wegzusammenhängend, so besitzt X eine universelle Überlagerung.

Beweis: (a) und (b) folgen aus der Tat, dass X lokal zusammenziehbar ist. (a) + (b) + wegzusamenhängend $\Rightarrow$ X besitzt eine universelle Überlagerung: siehe Topologie 1, Satz 4.48. #

1.23 Korollar: Sei X ein CW-Komplex. Dann sind die Wegzusammenhangskomponenten gleich den Zusammenhangskomponenten.

Beweis: gilt allgemein für local wegzusammenhängende Räume: die Wegzusamenhangskomponenten sind dann offen, und liegen (wie immer) in Zusamenhangs Komponente.

$\Rightarrow$ Ist C eine Zus. Komp., so gilt $C = \coprod_{i \in I} P_i$ mit P_i wegzus. Komp, alle offen; $\Rightarrow \# I = 1$. #

Mit dem folgenden Lemma wird 1.20 ein Korollar von 1.21:

1.24 Lemma: Sei (X, K, Φ) ein CW-Komplex, und sei $x \in X$. Dann existiert ein CW-Zerlegung (L, Ψ) von X, mit $x \in L$ eine 0-Zelle.

Beweis: Sei $e \in K$ die Zelle mit $x \in e$. Wir beweisen das Lemma durch Induktion auf $n = \dim(e)$.

(a) $n = 0$: $(L, \Psi) = (K, \Phi)$.

(b) $n = 1$: Betrachte $\chi_e : D^1 = [-1, 1] \longrightarrow \bar{e}$;

Sei $a \in (-1, 1)$ mit $\chi_e(x)$; Nimm $L = K \setminus \{e\} \cup \{x, e_1', e_2'\}$ mit $e_1' = \chi_e((-1, a))$, $e_2' = \chi_e((a, 1))$.

(c) Sei $n \geq 2$, und Lemma gilt für $n-1$. Sei $\chi_e : D^n \to \bar{e}$; wir können annehmen, dass $a = \chi_e^{-1}(x) = 0$: verwende einen Homöo $g : D^n \to D^n$ mit $g(0) = a$ und $g|_{S^{n-1}} = id_{S^{n-1}}$.
Sei $S^{n-1}_- = S^n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\leq 0})$ der Süd Hemisphäre.
Betrachte $f : S^{n-1}_- \to S^{n-1}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (-2x_1x_n, \dots, -2x_{n-1}x_n, 1-2x_n^2)$. Dann ist f surjektiv, und die Einschränkung von f auf $S^{n-1} \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{<0})$ ist ein Homöo auf $S^{n-1} \setminus \{N\}$, $N = (0, \dots, 0, 1)$.
Sei nun $D^n_- = D^n \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_{\leq 0})$. Definiere $\varphi : D^n_- \to D^n$ durch $\varphi(x) = \|x\| \cdot f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ für $x \neq 0$, und $\varphi(0) = 0$.

Sei $I = \{(0, \dots, 0, t) \mid t \in [0,1]\} \subset D^n$.
Dann ist die Einschränkung $\mathring{D}^n_- \xrightarrow{\varphi} \mathring{D}^n \setminus I$ ein Homöo.
Offensichtlich sind D^n_- und D^n homöomorph, also erhalten wir eine surjektive Abbildung $\Theta : D^n \xrightarrow{\cong} D^n_- \xrightarrow{\varphi} D^n$ mit $\Theta : \mathring{D}^n \to \mathring{D}^n \setminus I$ ein Homöo.
Nun zurück nach X: per Induktions-Voraussetzung können wir annehmen, dass $\chi_e(N) \in X^{(n-1)}$ ein 0-Simplex ist. Sei $L = K \setminus \{e\} \cup \{x, e^1, e^n\}$, mit $e^1 = \chi_e(I \setminus \{0, N\})$, $e^n = \chi_e \circ \Theta(\mathring{D}^n)$. Die Klebe-Abbildungen für e^1 ist $\chi_{e^1} : D^1 \xrightarrow{\cong} I \xrightarrow{\chi_e} \bar{e}^1$, die für e^n ist $\chi_e \circ \Theta$.
Die Axiome $\underline{C}$ und $\underline{W}$ sind offensichtlich von dieser neuen Zerlegung erfüllt. #

Wir haben gesehen, dass ein CW-Komplex <u>normal</u> ist.
Als wichtige Folgerungen gelten das Lemma von Urysohn und Tietze Erweiterungs Theorem. Zur Erinnerung:

<u>1.25 Lemma von Urysohn</u>: Sei X normal, $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen. Dann existiert eine stetige Funktion
$$f : X \to [0,1] \subset \mathbb{R}$$
mit $f(a) = 0$ für alle $a \in A$, $f(b) = 1$ für alle $b \in B$.

<u>1.26 Tietzes Erweiterungstheorem</u>: Sei X normal, $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $f : A \to [0,1]$ eine stetige Funktion. Dann existiert eine stetige Funktion $F : X \to [0,1]$ mit $F = f|A$.

<u>Für Beweise</u>: sie Ana III oder Munkres, Topology, § 33 und 35.

Eine weiter wichtige Eigenschaft von CW ist, dass sie <u>Parakompakte</u> Räume sind (Äquivalent zur Existenz von Zerlegungen der 1)

<u>1.27 Definition</u>: Ein Raum X heißt <u>Parakompakt</u>, wenn jede offene Überdeckung $\mathcal{F}$ von X eine locale endliche Verfeinerung besitzt.

<u>1.28 Definition</u>: Sei X ein Raum, $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von X. Eine Zerlegund der Eins, die $\mathcal{F}$ untergeordnet ist, ist eine Familie $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von Funktionen $\phi_\alpha : X \to [0,1]$ so dass

(a) $\mathrm{supp}(\phi_\alpha) = \overline{\{x \in X \mid \phi_\alpha(x) \neq 0\}} \subset U_\alpha$;

(b) $\{\mathrm{supp}(\phi_\alpha)\}_\alpha$ ist lokal endlich;

(c) $\sum_I \phi_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in X$.

<u>1.29 Theorem</u> Sei X ein Hausdorff Raum. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(a) X ist Parakompakt.

(b) Zu jeder offenen Überdeckung $\mathcal{F}$ von X existiert eine Zerlegung der Eins, die $\mathcal{F}$ untergeordnet ist.

<u>Beweis</u>: Munkres § 41.

Die Existenz von Zerlegungen der Eins auf CW-Komplexe spielt eine wichtige Rolle im "Zusammenkleben" von lokalen Konstruktionen: siehe zum Beispiel die Darstellbarkeitssätze in topologische K-Theorie: $\mathrm{Vekt}_{\mathbb{C}^n}(X) \cong [X, BU(n)]$.

Bemerke: Kompakt $\Rightarrow$ parakompakt (klar)

Kompakt + Hausdorff $\Rightarrow$ Normal (Munkres §32).

Um die Parakompaktheit von CW zu beweisen, erstmal ein Hilfslemma:

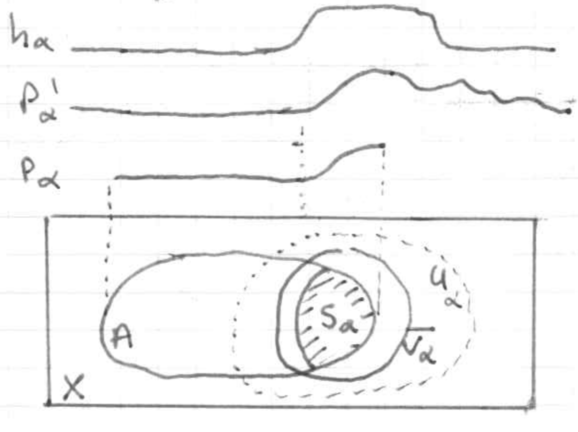
1.30 Lemma: Sei X ein kompakter Hausdorff-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen. Sei $\mathcal{F} = \{U_\alpha \mid \alpha \in I\}$ eine offene Überdeckung von X, und sei $\mathcal{F}|_A = \{U_\alpha \cap A \mid \alpha \in I\}$. Sei $\{p_\alpha : A \to [0,1]\}_{\alpha \in I}$ eine Zerlegung der Eins, die $\mathcal{F}|_A$ untergeordnet ist. Dann existiert eine Zerlegung der Eins $\{q_\alpha : X \to [0,1]\}_{\alpha \in I}$, die $\mathcal{F}$ untergeordnet ist, mit $q_\alpha|_A = p_\alpha$ für alle $\alpha \in I$.

Beweis: Sei $S_\alpha = \mathrm{Supp}(p_\alpha) \subset U_\alpha \cap A$.

(a) $S_\alpha = \emptyset$ für fast alle $\alpha \in I$: folgt aus den Fakten, dass A kompakt ist und $\{S_\alpha\}_\alpha$ lokal endlich ist.

(b) Für α mit $S_\alpha \neq \emptyset$, erweitere p_α zu $\overline{p_\alpha} : X \to [0,1]$ wie folgt: Wähle eine Erweiterung $p'_\alpha : X \to [0,1]$ mit $p'_\alpha|_A = p_\alpha$ (Tietze). Wähle V_α offen in X mit

$S_\alpha \subset V_\alpha \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ (X normal), und eine Funktion $h_\alpha : X \to [0,1]$ mit $h_\alpha(S_\alpha) = \{1\}$, $h_\alpha(X \setminus V_\alpha) = \{0\}$



(Urysohn). Definiere dann

$\overline{p_\alpha} = p'_\alpha \cdot h_\alpha : X \to [0,1]$.

Es gilt $\overline{p_\alpha}|_A = p_\alpha$ und

$\mathrm{Supp}\,\overline{p_\alpha} \subset \overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$.

Falls $S_\alpha = \emptyset$ setze $V_\alpha = \emptyset$, $\overline{p_\alpha} = 0$.

(c) Eine offene Umgebung V von A in X existiert, mit $V \subset \bigcup_\alpha V_\alpha$ und $V \subset \mathrm{Supp}(\sum_\alpha \overline{P}_\alpha)$: dass folgt aus der Stetigkeit von $\sum_\alpha \overline{P}_\alpha$.

(d) Wähle eine Zerlegung der Eins $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in I}$ von X, die $\mathcal{F}$ untergeordnet ist. Dank (a) wissen wir: fast alle ϕ_α sind $= 0$.

(e) Wähle eine Funktion $g : X \to [0,1]$ mit $g(A) = 0$ und $g(X \setminus V) = 1$ (Urysohn). Dann ist

$$\varphi = \sum_\alpha \overline{P}_\alpha + \sum_\alpha g\,\phi_\alpha \quad : X \to \mathbb{R} \text{ positiv.}$$

Die Zerlegung der Eins $\left\{ q_\alpha = \frac{\overline{P}_\alpha + g \cdot \phi_\alpha}{\varphi} \right\}_{\alpha \in I}$ erfüllt die gewünschten Eigenschaften. #

<u>1.31 Theorem</u> Sei X ein CW-Komplex. Dann ist X parakompakt.

<u>Beweis</u>: Zorn's Lemma. Da X Hausdorff, beweisen wir einfach: Ist $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine offene Überdeckung von X, so existiert eine Zerlegung der Eins, die $\mathcal{F}$ untergeordnet ist. Sei $\mathcal{B} = \{X_\beta \mid \beta \in J\}$ die Familie der Unterkomplexen von X. Sei Ω die Menge aller Trippeln $(X_\beta, \mathcal{F}_\beta, \phi^\beta)$, wobei $X_\beta \in \mathcal{B}$, $\mathcal{F}_\beta = \mathcal{F}|_{X_\beta}$, und ϕ^β ist eine Zerlegung der Eins ist, die $\mathcal{F}_\beta$ untergeordnet ist.

Setze $(X_\beta, \mathcal{F}_\beta, \{\phi^\beta_\alpha\}) < (X_\gamma, \mathcal{F}_\gamma, \{\phi^\gamma_\alpha\})$ falls $X_\beta \subset X_\gamma$ ein Unterkomplex ist, und $\phi^\beta_\alpha = \phi^\gamma_\alpha|_{X_\beta}$, $\forall \alpha \in I$.

Ω ist nicht leer (zum Beispiel X_β eine 0-Zelle), und jede Kette hat ein maximales Element (Vereinigung).

Dank Zorn's Lemma hat Ω ein maximales Element $(Y, \mathcal{G}, \{\psi_\alpha\})$. Falls $Y \neq X$, wähle $e \in X \setminus Y$. Es existiert ein endlicher Unterkomplex $K \subset X$ mit $e \in K$. Dank 1.30 kann man $\{\psi_\alpha \mid K \cap Y\}_\alpha$ auf K, also auf $K \cup Y$ erweitern. ↯ #

<u>1.32 Satz</u>: Sei (X, K, Φ) ein zusammenhängender CW-Komplex, und sei $p: E \to X$ eine Überlagerung.
Sei $e \in K$; sei $I_e = p^{-1}(\chi_e(0)) \subset E$ die Punkten über das Punkt $\chi_e(0)$. Für $i \in I_e$ existiert ein Hochhebung χ_{e_i} von χ_e mit $\chi_{e_i}(0) = i$:

$\dim(e) = n$:

$$\begin{tikzcd} & (E, i) \arrow[d, "p"] \\ (D^n, 0) \arrow[ur, bend left, "\chi_{e_i}"] \arrow[r, "\chi_e"] & (X, \chi_e(0)) \end{tikzcd}$$

Setze $e_i := \chi_{e_i}(\mathring{D}^n)$,

$L = \{ e_i \mid e \in K, i \in I_e \}$ und $\Psi = \{ \chi_{e_i} \mid e \in K, i \in I_e \}$.
Dann ist (L, Ψ) eine CW-Zerlegung von E, mit $p|_{e_i}: e_i \to e$ ein Homöomorphismus für alle $e \in K, i \in I_e$.

<u>Beweis</u>: Die Hochhebung χ_{e_i} existiert, weil D^n zusammenziehbar ist (also $\chi_{e*}(\pi_1(D^n, 0)) = 0 \subset p_*(\pi_1(E, i))$: siehe Theorem 4.19 Topo 1). Die Einschränkungen im Diagramm

$$\begin{tikzcd} & e_i \arrow[d, "p"] \\ \mathring{D}^n \arrow[ur, bend left, "\chi_{e_i}"] \arrow[r, "\chi_e"] & e \subset X \end{tikzcd}$$

sind Homöomorphismen: das ist der Fall von $\chi_e|_{\mathring{D}^n}$; da $\chi_{e_i}|_{\mathring{D}^n}$ und $p|_{e_i}$ bijektiv und stetig sind, sind es auch Homöomorphismen. Also is e_i eine n-Zelle. Außerdem $E = p^{-1}(X) = p^{-1}(\coprod_{e \in K} e) = \coprod_{e \in K} p^{-1}(e) = \coprod_{e \in K} \coprod_{i \in I_e} e_i = \coprod_{e \in L} e$. Also gilt Axiom (a) aus 1.2.
Axiom (b) ist auch offensichtlich, weil $E^{(n-1)} = p^{-1}(X^{(n-1)})$ für alle $n \geq 1$, und für e_i mit $\dim(e_i) = n$ gilt $p \circ \chi_{e_i}(S^{n-1}) = \chi_e(S^{n-1}) \subset X^{(n-1)}$, also $\chi_{e_i}(S^{n-1}) \subset E^{(n-1)}$, und $\chi_{e_i}: (D^n, S^{n-1}) \to (E^{(n-1)} \cup e_i, E^{(n-1)})$.
(c) Closure finite: sei $e_i \in L$. Seien $f_1, \dots, f_r \in K$ mit $p(\overline{e_i}) = p(\chi_{e_i}(D^n)) = \chi_e(D^n) = \overline{e} \subset f_1 \cup \dots \cup f_r$.
Also $\overline{e_i} \subset p^{-1}(f_1) \cup \dots \cup p^{-1}(f_r)$; Da e_i kompakt ist, ist es leicht zu zeigen: $\overline{e_i}$ kann nur endlich viele Zellen in jede Familie $p^{-1}(f_j)$ treffen.

(d) Schwache Topologie: Sei $A \subset E$ mit $A \cap \bar{e}_i$ offen in $\bar{e}_i$ für alle $e_i \in L$. Wir bearbeiten zu erst einen spezial Fall:

(i) Es existiert $U \subset X$ offen und trivial überlagert, so dass A in einem Blatt V über U liegt: $A \subset V \xrightarrow[\cong]{P} U$.

Offensichtlich gilt

$$\chi_e^{-1}(P(A)) = \bigcup_{i \in I_e} \chi_{e_i}^{-1}(A)$$

für alle $e \in K$; Da alle $\chi_{e_i}^{-1}(A)$ offen in D^n $(n = \dim e)$ für alle $e \in K$, $i \in I_e$ sind, ist $\chi_e^{-1}(P(A))$ offen in D^n.

Da X die schwache Topologie hat, folgt: $P(A)$ ist offen in X, also in U. Da $V \xrightarrow[\cong]{P} U$, ist A offen V. Da V offen in E ist folgt, dass A offen in E ist.

(ii) Wähle eine offene Überdeckung $\mathcal{F}$ von E mit $P|_U : U \to P(U)$ ein Homöomorphismus für alle $U \in \mathcal{F}$ (zur Erinnerung: P ist offen).

Dann ist $(A \cap U) \cap \bar{e}_i$ offen in $\bar{e}_i$ für alle $e_i \in L$, also ist $A \cap U$ offen in E, für alle $U \in \mathcal{F}$, dank (i).

Also ist $A = \bigcup_{U \in \mathcal{F}} A \cap U$ offen in E. #

Die weitere Konstruktion die wir untersuchen ist das Produkt.

<u>1.33 Theorem</u>: Seien (X, K, Φ) und (Y, L, Ψ) CW-Komplexe. Sei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen; Sei

$M = \{ e \times f \subset X \times Y \mid e \in K, f \in L \}$, und sei

$\Theta = \{ \chi_{e \times f} \mid e \times f \in M \}$ wobei für $\dim(e) = m$, $\dim(f) = n$, $\chi_{e \times f} : D^{m+n} \cong D^m \times D^n \xrightarrow{\chi_e \times \chi_f} X \times Y$

(Hier ist $[0,1]^m$ als Modell für D^m angenommen).

Ist einer von X, Y lokal kompakt (also lokal endlich, siehe Aufgabe 2.4), so ist (M, Θ) eine CW-Zerlegung von $X \times Y$.

Beweis: $\chi_{e\times f}\big|_{\mathring{D}^{m+n}} : \mathring{D}^{m+n} \to e\times f$ ist offensichtlich ein Homöo, da $\mathring{D}^{m+n}$ Homö zum Produkt $\mathring{D}^m \times \mathring{D}^n$ ist.
Wir haben $(X\times Y)^{(n)} = \bigcup_{k+l=n} X^{(k)} \times Y^{(l)}$, und daraus folgt $\chi_{e\times f}(S^{m+n-1}) = \chi_{e\times f}(D^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1}\times D^n)$ $\subset X^{(m)}\times Y^{(n-1)} \cup X^{(m-1)}\times Y^n \subset X^{(m+n-1)}$.
Es gilt $X\times Y = \coprod_M e\times f$, und Axiome 1.2 (a+b) sind erfüllt. Closure finite gilt, weil $\bar{e}\times\bar{f}$ in $X\times Y$ abgeschlossen, also $\overline{e\times f} \subset \bar{e}\times\bar{f}$ (eigentlich $=$). Das einzige problematische Punkt ist die Topologie (1.2.(d)). Dank Aufgabe 2.3 genügt es zu zeigen, dass

$\phi_{X\times Y} : \coprod_{e\times f\in M} (D^{\dim(e)} \times D^{\dim(f)}) \to X\times Y$ eine Quotienten-Abbildung ist. Aber $\phi_{X\times Y}$ faktorisiert als

$$\coprod_{e\times f\in M} D^{d(e)} \times D^{d(f)} \xrightarrow{\cong} \Big(\coprod_{e\in K} D^{d(e)}\Big) \times \Big(\coprod_{f\in L} D^{d(f)}\Big) \xrightarrow{\phi_X\times\phi_Y} X\times Y.$$

Nun sind $\coprod_{e\in K} D^{d(e)}$ und $\coprod_{f\in L} D^{d(f)}$ Hausdorff und lokal kompakt, und ebenso ein von den Räumen X, Y. Also: Da ϕ_X und ϕ_Y Quotienten-Abbildungen sind, ist ebenso $\phi_X\times\phi_Y$ eine Quotienten-Abbildung (Aufgabe 3.1.(c)). #

<u>1.34 Bemerkung</u>: Aus dem Beweis ist klar: die Bedingung auf der Topologie von X oder Y ist nur notwendig, um sicher zu stellen, dass die Produkt-Topologie auf $X\times Y$ mit der schwachen Topologie übereinstimmt. Die anderen Ax. gelten immer; Verseht mann $X\times Y$ mit der Quotienten-Topologie bezüglich der Abbildung $\phi_{X\times Y}$ (notieren wir sie $X\underset{cw}{\times}Y$), so ist (M,Θ) eine CW-Zerlegung von $X\underset{cw}{\times}Y$ (keine Bedingung notwendig). Da $\phi_{X\times Y}$ auch für die Produkt-Topologie stetig ist folgt: $X\underset{cw}{\times}Y \xrightarrow{id} X\times Y$ ist <u>stetig</u> (also ist die CW-Topologie <u>feiner</u> als die Produkt Topologie).

1.35 Beispiele: (a) Der Torus $\mathbb{T}^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ erbt eine CW-Struktur von S^1.

(b) $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ hat eine Produkt CW-Zerlegung, wobei $\mathbb{R}$ die Struktur aus 1.4. (c). Hier sind k-Zellen k-dimensionale Würfel.

(c) $I = [0,1]$ hat eine CW-Struktur mit zwei 0-Zellen $\{0\}, \{1\}$ und 1-Zelle $(0,1)$. Ist X ein CW-Komplex, so erbt $X \times I$ ein CW-Zerlegung.

1.36 Satz: Sei (X, K, ϕ) ein CW-Komplex und (A, L, ψ) ein Unterkomplex. Sei $q: X \to X/A$ die Quotienten-Abbildung. Sei $\Pi = [A] \cup \{ q(e) \mid e \in K \setminus L \}$, $\Theta = \{ D^0 \to [A] \} \cup \{ q \circ \chi_e \mid e \in K \setminus L \}$. Dann ist (Π, Θ) eine CW-Zerlegung von X/A, und q bildet n-Zellen auf m-Zellen, $m \leq n$.

Beweis: (i) X/A ist Hausdorff: seien $x, y \in X \setminus A$. Dann existieren U, V offen in $X \setminus A$ mit $U \cap V = \emptyset$, $U \ni x$, $V \ni y$, und $q(U), q(V)$ sind offene, disjunkte Umgebungen von $q(x), q(y)$. Es bleibt zu zeigen, $[A]$ und $q(x)$ sind trennbar wenn $x \notin A$; Da X normal ist existieren offene Teilmengen U, V mit $A \subset U$, $x \in V$, $U \cap V = \emptyset$. Dann sind $q(U)$, $q(V)$ offen, disjunkt, $q(x) \in q(V)$, $[A] \in q(U)$.

Die Axiome sind klar: Ist $e \in K \setminus L$, so ist $q\chi_e$ ein charakteristische Abbildung für $q(e)$. Closure finiteness ist klar. Die schwache Topologie ebenso, mit Hilfe von Aufgabe 2.3, da eine Verknüpfung von Quotienten Abbildungen eine Quotienten Abbildung ist. #.

Frage: Was ist $X/\emptyset$?

Nun beweisen wir die Homotopie Erweiterungseigenschaft für CW-Paare.

1.37 Definition: Ein Paar (X, A) besitzt die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (HEP) bezüglich einem Raum Y, falls folgendes gilt: Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung, und $G: A \times [0,1] \to Y$ eine Homotopie mit $G(-,0) = f|_A$. Dann existiert eine Homotopie $F: X \times [0,1] \to Y$ mit $F(-,0) = f$ und $F|_{A \times [0,1]} = G$. Hat (X, A) die HEP bezüglich alle Räume, so sagt man einfach, (X, A) hat die HEP.

1.38 Satz Sei (X, A) ein Paar, der die HEP besitzt. Ist A zusammenziehbar, so ist die Projektion $q: X \to X/A$ eine Homotopie-Äquivalenz.

Beweis: Sei $G: A \times [0,1] \to A$ eine Homotopie mit $G(-,0) = id_A$ und $G(-,1) = c_b$, $b \in A$ $(c_b(a) = b \ \forall a \in A)$. Sei $f: X \xrightarrow{id} X$ und sei $F: X \times [0,1] \to X$ ein Erweiterung von G. Es gilt $F(A \times [0,1]) \subset A$, also haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \times [0,1] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "q \times id"] & X \arrow[d, "q"] \\ X/A \times [0,1] \arrow[r, dashed, "\bar{F}"] & X/A \end{tikzcd}$$

Hier benutzen wir: $q \times id$ ist eine Quotienten-Ab. weil $[0,1]$ Hausdorff + lok. kompakt; also $\exists! \bar{F}$.

Aber $F(a,1) = b$ für alle $a \in A$; Also existiert $j: X/A \to X$:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "F_1"] \arrow[dr, "q"'] & X \\ & X/A \arrow[u, dotted, "j"'] \end{tikzcd}$$

Dann ist F eine Homotopie zwischen id_X und $j \circ q$.

Ebenso ist $\bar{F}$ eine Homotopie zwischen $id_{X/A}$ und $q \circ j$: Zu zeigen: $\bar{F}(q(x),1) = qj(q(x)) \ \forall x \in X$: aber $\bar{F}(q(x),1) = q F(x,1) = qjq(x)$. #

1.39 Theorem: Sei (X, A) ein CW-Paar. Dann hat (X, A) die HEP.

1.40 Lemma: Sei (X, A) ein Paar von Räumen mit X normal, A abgeschlossen. Sei angenommen, (X, A) ist ein gutes Paar. Dann hat (X, A) die HEP.

Beweis: Sei $B = A \times I \cup X \times \{0\} \subset X \times I$. Wähle eine Urysohn Funktion $u : X \to I$ mit $u(A) = \{0\}$, $u(X \setminus U) = \{1\}$. Wähle eine offene Umgebung U von A mit einer Homotopie

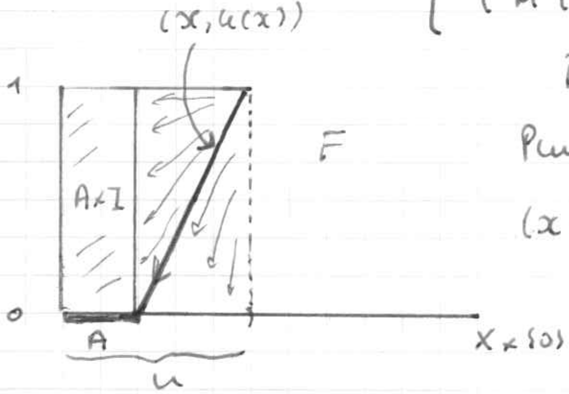
$$H : U \times I \to U \text{ rel } (A), \quad H_0 = id_U, \quad H_1(U) \subset A.$$

(a) Definiere $G : X \times I \to U \times I \cup X \times \{0\}$ durch

$$G(x,t) = (x, (1-u(x))\, t). \quad \text{Dann gilt } G|_B = id_B.$$

(b) Definiere $F : U \times I \cup X \times \{0\} \to B$ durch

$$F(x,t) = \begin{cases} (x, 0) & t = 0 \\ (H(x,1),\, t - u(x)) & t \geq u(x) \\ (H(x, t/u(x)),\, 0) & u(x) \geq t,\ u(x) \neq 0 \end{cases}$$



Die Stetigkeit von F ist klar, außer an Punkten $(a,0) \in A \times \{0\}$ (also die Punkte (x,t) mit $t = u(x) = 0$). Sei $W \times [0, \varepsilon)$ eine offene Umgebung von $F(a,0) = (a,0)$.

Da $H(a,t) = a \ \forall\, t$ $\exists\, V$ offene Umgebung von a in U mit $H(V \times [0,1]) \subset W$. Dann gilt $F(V \times [0,\varepsilon)) \subset W \times [0,\varepsilon)$

(c) ist $h : B \to Y$ gegeben, so ist $h \circ F \circ G : X \times I \to Y$ eine Erweiterung.

#

Beweis von 1.39: Klar, weil $A \subset X$ abgeschlossen, X normal, gutes Paar.

1.41 Beispiele: (a) Sei $\{X_i\}_{i \in I}$ eine Familie von CW-Komplexen mit $x_i \in X_i^{(0)}$ als Basispunkt gewählt, $\forall\, i \in I$. $\coprod_{i \in I} X_i$ erbt eine CW-Zerlegung (klar). Dabei ist $\coprod_{i \in I} \{x_i\}$ ein Unterkomplex; also erbt $\bigvee_{i \in I} X_i$ auch eine CW-Zerlegung (1.36). (Hausdorff klar).

(b) Seien (X, x_0), (Y, y_0) zwei CW-Komplexe mit Basis-Punkt im 0-Skelett. Sei angenommen, die CW-Zerlegungen von X und Y induzieren eine CW-Zerlegung von $X \times Y$ (zum Beispiel X oder Y ist lokal-kompakt). Dann erbt $X \wedge Y$ (Smash-Produkt) auch eine CW-Zerlegung: $X \vee Y$ identifiziert man mit dem Unterkomplex $X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y$ (Unterkomplex weil abgeschlossen) von $X \times Y$. Ansonsten setzt man $X \wedge Y = X \times_{cw} Y / X \vee Y$.

<u>1.42 Definition</u>: Eine stetige Ab. $f: X \to Y$ zwischen CW-Komp. heißt <u>zellulär</u>, falls $f(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

1.43 siehe →

<u>1.44 Lemma</u>: Seien X, Y CW-Komplexe, $A \subset X$ ein Unterkomplex, und sei $f: A \to Y$ eine zelluläre Abbildung. Betrachte das Push-out

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "j"] & Z \end{tikzcd}$$

. Dann erbt Z eine CW-Zerlegung.

<u>Beweis</u>: X kann man von A induktiv erhalten, indem man n-Zellen auf $X^{(n-1)} \cup A$ anheftet. Sei Z_n = Push-out

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"'] & A \cup X^{(n)} \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Z_n \end{tikzcd}$$

Dann erhält man Z_n durch Anheften von n-Zellen auf Z_{n-1}; $Z_{-1} = Y$; Die Details überlassen wir als Aufgabe. #.

<u>1.45 Beispiel</u>: Sei $f: Y \to X$ eine zelluläre Abbildung. Der <u>Abbildungszylinder</u> von f ist der Push-out

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & Y \times [0,1] \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, hook, "j"] & Zyl(f) \end{tikzcd}$$

wobei $i_0(y) = (y, 0)$;

Wir haben dann zwei Inklusionen als Unterkomplexe $X \xrightarrow{j} Zyl(f)$ und $i: Y \xhookrightarrow{i_1} Y \times [0,1] \xrightarrow{q} Zyl(f)$.
Außerdem ist die Abbildung $Zyl(f) \xrightarrow{p} X$ mit $p([y,t]) = f(y)$, $p([x]) = x$ eine Deformation-Retraktion; das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{i} & Zyl(f) \\ \| & & \simeq\downarrow p \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$ kommutiert. Dagegen kommutiert $$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & X \\ \| & & \downarrow i \\ Y & \xhookrightarrow{i_1} & Zyl(f) \end{array}$$ nur bis auf Homotopie.

Damit ist bewiesen: jede zelluläre Ab. $f: Y \to X$ faktorisiert als $f = p \circ i$, wobei i die Inklusion eines Unterkomplex ist, und p eine Homotopie-Äquivalenz ist.

<u>1.43 Bemerkung:</u> Zelluläre Abbildungen bilden eine Zelle nicht notwendigerweise auf einer Zelle; das zu verlangen wäre für viele Zwecke zu rigid. Das 1.42 sinnvoll ist wird vom Zellulären Approximationstheorem bestätigt: Sind X, Y CW-Komp. und $f: X \to Y$ eine Ab., so ist f homotop zu einer zellulären Ab. Das beweisen wir später.

Ein Beispiel: Sei S^n_1 mit CW-Zerlegung in 2 Zellen, und S^n_2 mit CW-Zerlegung in $2(n+1)$-Zellen (1.4.6 und 1.17.a). Dann ist $id: S^n_1 \to S^n_2$ zellulär, aber nicht Homotop zu eine Abbildung, die Zellen in Zellen Abbildet; $id: S^n_2 \to S^n_1$ ist nicht zellulär, aber offensichtlich Homotop zu einer zellulären Abbildung.

<u>1.46 Bemerkung:</u> manchmal ist folgender Variant auch nützlich: Ein <u>relativer CW-Komplex</u> (X, A) ist ein Paar von Hausdorff Räume, mit einer Filtrierung

$$A = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset \dots \subset X$$

so dass $X^{(n)}$ durch anheften von n-Zellen auf $X^{(n-1)}$ erhalten ist, $X = \bigcup_n X^{(n)}$ und X hat die schwache Topologie. Viele Ergebnisse, wie zum Beispiel 1.36, gelten auch für relative CW (nicht zu vertauschen mit CW Paare!).