Die zelluläre Filtrierung eines CW-Komplex ist für Homologie Berechnungen sehr Hilfsreich. Dies wird in Zelluläre Homologie ausgearbeitet.

2.1 Def. und Lemma: Sei (X, A) ein CW-Paar. Setze $X_A^{(n)} = A \cup X^{(n)}$; es gilt also $X_A^{(n)} \subset X_A^{(n+1)}$ $\forall n$, und $X_A^{(n)} = A$ falls $n \leq -1$.

Sei $H_*(-) = H_*(-; \mathbb{Z})$ (sing. Homologie mit $\mathbb{Z}$ Koef), und definiere $C_n^{zell}(X, A) = H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$. Ferner sei

$$d_n : C_n^{zell}(X, A) \to C_{n-1}^{zell}(X, A)$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ als die Verknüpfung

$$H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_A^{(n-1)}) \xrightarrow{i_{n-1}} H_{n-1}(X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)})$$

definiert, mit ∂_n = Rand op. des Paares $(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$, und i_{n-1} von $(X_A^{(n-1)}, \emptyset) \hookrightarrow (X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)})$ induziert.

Dann gilt $d_n \circ d_{n+1} = 0$ $\forall n$; der Ketten Komplex $(C_n(X, A), d_n)_n = (C_n^{zell}(X, A), d_n)$ heißt der zelluläre Ketten komplex von (X, A), seine Homologie die zelluläre Homologie.

Beweis: $d_n \circ d_{n+1}$ faktoriert durch folg. Teil der lange ex. Folge des paares $(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$:

$$H_n(X_A^{(n)}) \xrightarrow{i_n} H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_A^{(n-1)}). \quad \#$$

2.2 Lemma: Sei K_n' die Menge der n-Zellen in $X \setminus A$. Die charakteristische Abbildungen $\{\chi_e \mid e \in K_n'\}$ induzieren ein Homöomorphismus $\bigvee_{e \in K_n'} S^n \to X_A^{(n)} / X_A^{(n-1)}$.

Beweis: Dank 1.38 wissen wir, dass $X_A^{(n)} / X_A^{(n-1)}$ ein CW-Komplex ist, mit einer 0-Zelle $[X_A^{(n-1)}]$ und n-Zellen $\{q(e) \mid e \in K_n'\}$, $q: X_A^{(n)} \to X_A^{(n)}/X_A^{(n-1)}$. Also induziert $\coprod_{e \in K_n'} D^n \xrightarrow{\coprod \chi_e} X_A^{(n)}/X_A^{(n-1)}$ eine Homöo $\bigvee_{e \in K_n'} S^n \to X_A^{(n)}/X_A^{(n-1)}$.

2.3 Korollar: Für $i \neq n$ gilt $H_i(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) = 0$.

Wir haben ein Isomorphismus

$$\bigoplus_{e \in K'_n} \mathbb{Z} \longrightarrow H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) = C_n(X, A).$$

Insbesondere ist $C_*(X, A)$ ein Kettenkomplex von freien abelschen Gruppen.

Beweis: Wir haben Isomorphismen

$$\bigoplus_{K'_n} H_i(S^n, *) \xrightarrow{\cong} H_i(\bigvee_{K'_n} S^n, *) \xrightarrow{\cong} H_i(X_A^{(n)}/X_A^{(n-1)}, *)$$

$$\xleftarrow{\cong} H_i(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}).$$

Der erste Isomorphismus folgt aus Satz 5.64 (Topo 1), der zweite aus 2.2 und der dritte aus Satz 5.66 (Topo 1), weil $(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$ ein gutes Paar ist (Lemma 1.21). Der Korollar folgt also aus $H_i(S^n, *) = \begin{cases} 0 & i \neq n \\ \mathbb{Z} & i = n \end{cases}$.

Wir werden folgenden einfachen Lemma brauchen

2.4 Lemma: Sei (X, A, B) ein Tripel, also $B \subset A \subset X$ sind Unterräume. Dann existiert ein natürlicher Homomorphismus $H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(A, B)$, so dass die lange Folge

$$\cdots \to H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_{n+1}} H_n(A, B) \xrightarrow{i_n} H_n(X, B) \xrightarrow{j_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} \cdots$$

exakt ist. Hier sind i_n und j_n durch die Inklusionen $(A, B) \hookrightarrow (X, B)$ und $(X, B) \hookrightarrow (X, A)$ induziert.

Diese LEF heisst die LEF des Tripels (X, A, B)

Für $B = \emptyset$ übereinstimmt sie mit der LEF des Paares (X, A).

Beweis: das ist die lange exakte Folge, die der kurzen exakte Folge von Kettenkomplexe

$$0 \to S_*(A, B) \to S_*(X, B) \to S_*(X, A) \to 0$$

zugeordnet ist.

Zur Erinnerung: $S_*(A, B) = S_*(A)/S_*(B)$. #.

2.5 Lemma Sei (X, A) ein CW-Paar.

(a) $H_n(X_A^{(p)}, X_A^{(q)}) = 0$ falls $p \geq q \geq n$ oder $n > p \geq q$

(b) $H_n(X, X_A^{(q)}) = 0$ falls $q \geq n$

(c) Sei $q \geq r$. Die Inklusion $(X_A^{(q)}, X_A^{(r)}) \to (X, X_A^{(r)})$ induziert ein Isomorphismus

$$H_n(X_A^{(q)}, X_A^{(r)}) \longrightarrow H_n(X, X_A^{(r)})$$

für alle n mit $n < q$.

Beweis: (a) Sei p festgelegt; Induktion auf $p-q$ mit $p \geq q \geq n$ falls $p \geq n$, $-1 \leq q \leq p$ falls $p < n$.

$p-q=0$: klar.

Sei $p-q \geq 1$. Betrachte folg. Teil der LEF des Tripels $(X_A^{(p)}, X_A^{(q+1)}, X_A^{(q)})$:

$$H_n(X_A^{(q+1)}, X_A^{(q)}) \to H_n(X_A^{(p)}, X_A^{(q)}) \to H_n(X_A^{(p)}, X_A^{(q+1)}).$$

Die erste Gruppe ist null dank 2.3 ($q+1 \neq n$), die dritte ist 0 vorausgesetzt; also ist die zweite null wegen Exaktheit.

(b) Sei $[z] \in H_n(X, X_A^{(q)})$ und $z \in S_n(X, X_A^{(q)})$ ein darstellender Zykel; $z = \sum_{i=1}^{k} n_i \sigma_i$, und $\sigma_i(\Delta^n) \subset X$ ist kompakt; also existiert ein endlicher Unterkomplex, der $\sigma_i(\Delta^n)$ enthält. Es folgt: ein $p \geq q$ existiert, mit $\sigma_i(\Delta^n) \in X_A^{(p)}$ für alle $1 \leq i \leq k$, also z liegt im Bild von $S_n(X_A^{(p)}, X_A^{(q)}) \to S_n(X, X_A^{(q)})$. Ebenso liegt $[z]$ im Bild von

$$0 = H_n(X_A^{(p)}, X_A^{(q)}) \to H_n(X, X_A^{(q)}) \quad (0 \text{ wegen (a)}).$$

(c) Betrachte ein Teil der exakten Folge des Tripels $(X, X_A^{(q)}, X_A^{(r)})$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{n+1}(X, X_A^{(q)}) & \to & H_n(X_A^{(q)}, X_A^{(r)}) & \to & H_n(X, X_A^{(r)}) & \to & H_n(X, X_A^{(q)}) \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & \text{weil } q, q+1 \geq n \text{ und (b)}. & & & & 0 \end{array}$$

Also ist der mittlere Morphismus ein Iso. #

2.6 Theorem: Sei (X, A) ein CW-Paar, und bezeichne mit $H_*^{CW}(X, A; \mathbb{Z}) := H_*(C^{Zell}(X, A), d)$ die zelluläre Homologie von (X, A). Es existiert ein Isomorphismus $\Theta : H_*^{CW}(X, A; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(X, A; \mathbb{Z})$.

Beweis: Betrachte das kommutative Diagramm (n gewählt, $k \leq n-2$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & H_{n+1}(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}) & & & & \\
 & & \downarrow \partial_{n+1} & \searrow^{d_{n+1}} & & & \\
0 & \longrightarrow & H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(k)}) & \xrightarrow{i_n} & H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X_A^{(n-1)}, X_A^{(k)}) \\
 & & \downarrow & & & \searrow^{d_n} & \downarrow \partial_{n-1} \\
 & & H_n(X_A^{(n+1)}, X_A^{(k)}) & & & & H_{n-1}(X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)}) \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 \quad (A) & & & & 0 \quad (B)
\end{array}$$

(C)

Die linke Spalte ist Teil der LEF des Tripels $(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}, X_A^{(k)})$, und

$(A) = H_n(X_A^{(n+1)}, X_A^{(n)}) = 0$ wegen 2.5 (a)

Die rechte Spalte ist Teil der LEF des Tripels $(X_A^{(n-1)}, X_A^{(n-2)}, X_A^{k})$, und $(B) = H_{n-1}(X_A^{(n-2)}, X_A^{(k)}) = 0$ wegen 2.5. (a).

Die mittlere Zeile ist Teil der LEF des Tripels $(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)}, X_A^{(k)})$, $(C) = H_n(X_A^{(n-1)}, X_A^{(k)}) = 0$ wegen 2.5. (a).

Die quere Folge ist Teil von $C^{Zell}(X, A)$ (nicht exakt).

Dann haben wir Isomorphismen

$$H_n(X, X_A^{(k)}) \xleftarrow[\cong]{2.5.(c)} H_n(X^{(n+1)}, X_A^{(k)}) \xleftarrow{\cong} H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(k)}) \Big/ \text{Bild}(\partial_{n+1})$$

$$\xrightarrow{i_n} \text{Bild}(i_n) \Big/ \text{Bild}(i_n \partial_{n+1}) = \text{Bild}(i_n) \Big/ \text{Bild}(d_{n+1})$$

$$= \text{Ker}(\partial_n) \Big/ \text{Bild}(d_{n+1}) = \text{Ker}(j_{n-1} \circ \partial_n) \Big/ \text{Bild}(d_{n+1})$$

$$= \text{Ker}(d_n) \Big/ \text{Bild}(d_{n+1}) = H_n^{CW}(X, A).$$

Falls $n \geq 0$ nun $k = -2$, und so folgt

$H_n(X, A) = H_n(X, X_A^{(-2)}) \cong H_n^{CW}(X, A)$. ##

2.7 Bemerkung: Aus dem Beweis kann man also Θ so beschreiben: Sei $z \in C_n^{zell}(X,A)$ ein Zykel, also $z \in H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$ mit $d_n(z) = 0$; insbesondere $\partial_n(z) = 0$; also existiert $y \in S_n(X_A^{(n)}) \subset S_n(X)$ mit $d_n(y) \in S_{n-1}(X_A^{-2}) = S_{n-1}(A)$; also $y \in S_*(X_A^{(n)}, A) \subset S_*(X,A)$. ($[y] \in H_n(X_A^{(n)}, A)$ mit $i_n[y] = z$)

Dann gilt $\Theta(z) = [y] \in H_n(X,A)$.

2.8 Lemma: Θ ist natürlich bezüglich zelluläre Abbildungen.

Beweis: Aufgabe 5.3

2.9 Korollar: Sei (X,A) ein CW Paar.

(a) $\dim(X) = n < \infty \Rightarrow H_k(X,A;\mathbb{Z}) = 0$ für $k > n$.

(b) Hat $X \setminus A$ nur endlich viele n-Zellen, so ist $H_n(X,A;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt. Gibt es keine, so folgt $H_n(X,A;\mathbb{Z}) = 0$.

(c) Ist X kompakt, so ist $H_*(X;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt.

Beweis: die entsprechende Aussagen gelten für $C_n^{zell}(X,A)$. #

2.10 Korollar: Hat X keine zwei Zellen in konsekutive Dimensionen, so ist $H_n(X;\mathbb{Z})$ eine freie Abelsche Gruppe $\forall n$.

Beweis: dann gilt $d_n = 0$ $\forall n$, also $H_n(X;\mathbb{Z}) = C_n(X,A)$. #

2.11 Lemma: Sei (X,A,B) ein CW-Tripel, so ist die kurze exakte Folge von Kettenkomplexe

$$0 \longrightarrow C_*(A,B) \longrightarrow C_*(X,B) \longrightarrow C_*(X,A) \longrightarrow 0$$

exakt; Unter Θ ist der Rand-Operator ∂_* für die Homologie Folge dieses Komplexes verträglich mit ∂_* in singulärer Homologie: $\partial_* \Theta = \Theta \partial_*$.

Beweis: Die Exaktheit folgt aus der Beobachtung:

$\{n\text{-Zellen in } X \setminus B\} = \{n\text{-Zellen in } X \setminus A\} \amalg \{n\text{-Zellen in } A \setminus B\}$.

Die Verträglichkeit: Diagrammjagd mit 2.7 #

Nun beschreiben wir das Differential d_* in $C^{Zell}(X,A)$ etwas genauer. Zur Erinnerung: sei $f: S^n \to S^n$ stetig, $n \geq 1$. Der Grad $deg(f) \in \mathbb{Z}$ von f ist durch

$$f_*: H_n(S^n;\mathbb{Z}) \to H_n(S^n;\mathbb{Z}),\ f_*(i_n) = deg(f)\, i_n$$

wobei i_n ein gewählter Erzeuger von $H_n(S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ ist.

2.12 Definition: Sei (X,A) ein CW-Paar, $n \geq 2$, e_α eine n-Zelle von $X \setminus A$ und e_β eine $(n-1)$-Zelle. Sei χ_α die charakteristische Abbildung für e_α, und sei

$$q_\beta: X_A^{(n-1)} \xrightarrow{q} X_A^{(n-1)} / X_A^{(n-1)} \setminus e_\beta \xrightarrow{\gamma_\beta} S^{n-1}$$

wobei q_β die Quotienten-Abbildung ist, und γ_β ist das inverse des Homöomorphismus $S^{n-1} \to X_A^{(n-1)} / X_A^{(n-1)} \setminus e_\beta$ eindeutig von $\chi_\beta: D^{n-1} \to X_A^{(n-1)}$.

Sei $r_{\alpha\beta}: S^{n-1} \xrightarrow{\chi_\alpha|} X_A^{(n-1)} \xrightarrow{q_\beta} S^{n-1}$, und $d_{\alpha\beta} = deg(r_{\alpha\beta})$.

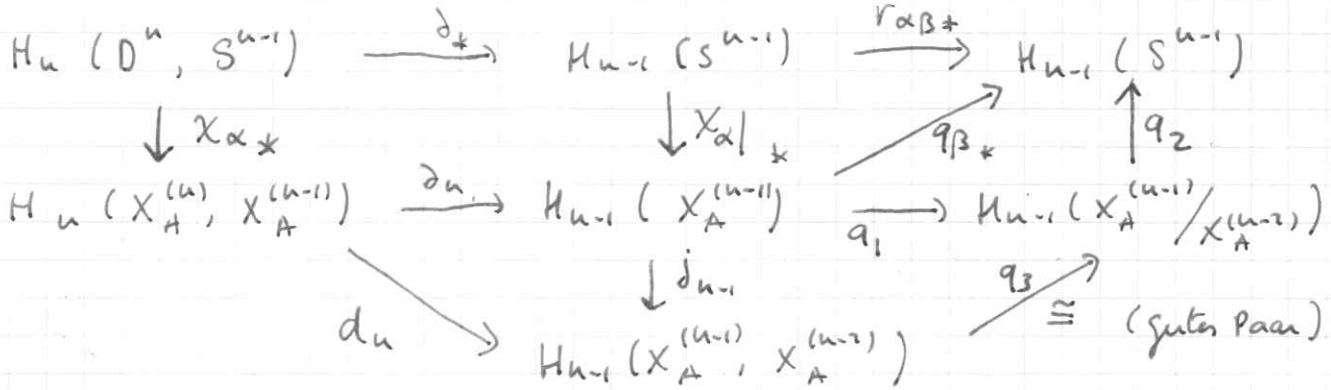
2.13 Bemerkung: Wir wählen Erzeuger von $\tilde{H}_n(S^n;\mathbb{Z})$ wie folgt: $i_0 \in \tilde{H}_0(S^0;\mathbb{Z})$, $i_0 = \{1\} - \{-1\}$.
Ist $i_{n-1} \in \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$ für $n \geq 1$ gewählt so definieren $j_n \in H_n(D^n, S^{n-1};\mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_n} \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1};\mathbb{Z})$ durch $\partial_n(j_n) = i_{n-1}$, und $i_n = p_*(j_n)$, $p: (D^n, S^{n-1}) \to (S^n, *)$ die Quotienten-Abbildung.
Ebenso wählen wir nun Erzeuger von $C_n(X,A)$:
Sei e_α eine n-Zelle in $X \setminus A$, Sei $\chi_\alpha: (D^n, S^{n-1}) \to (X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)})$ die charakteristische Abbildung von e_α, so definieren wir

$$e_\alpha = \chi_\alpha(j_n) \in H_n(X_A^{(n)}, X_A^{(n-1)};\mathbb{Z}) = C_n(X,A).$$

2.14 Satz: Für $d_n: C_n(X,A) \to C_{n-1}(X,A)$ und $e_\alpha \in C_n(X,A)$ wie in 2.13 gilt $d_n(e_\alpha) = \sum_{e_\beta \in K_n} d_{\alpha\beta}\, e_\beta$, wobei $K_n = \{e_\beta \mid e_\beta \text{ } n\text{-Zelle in } X \setminus A\}$.

(Bemerke: $d_{\alpha\beta} = 0$ falls $\bar{e}_\alpha \cap e_\beta = \emptyset$.
Dank Closure finite sind fast alle Summanden in der obigen Summe Null).

Beweis: betrachte das kommutative Diagramm



Hier sind q_1, q_2, q_3 induziert von den Quotienten Abbildung.
Kommutativität ist klar. Auf Elemente:

#.

Wir haben eine ähnliche Beschreibung von $f_*: C_*(X, A) \to C_*(Y, B)$ für eine zellulare Abbildung $f: (X, A) \to (Y, B)$ (siehe Aufgabe 5.3)
Sei $e_\alpha \in X \setminus A$ eine n-Zelle, $e_\beta \in Y \setminus A$ eine n-Zelle.
Definiere $f_{\alpha\beta}: S^n = D^n/S^{n-1} \xrightarrow[\cong]{\bar{\chi}_\alpha} X^{(n)}/X^{(n)} \setminus e_\alpha \hookrightarrow X^{(n)}/X^{(n-1)} \xrightarrow{f} Y^{(n)}/Y^{(n-1)} \twoheadrightarrow Y^{(n)}/Y^{(n)} \setminus b \xleftarrow[\cong]{\bar{\chi}_\beta} D^n/S^{n-1} = S^n$, und $u_{\alpha\beta} = \deg f_{\alpha\beta}$.

2.15 Satz: Sei $f: (X, A) \to (Y, B)$ eine zellulare Abbildung, und betrachte $f_n: C_n(X, A) \to C_n(Y, B)$. Sei $e_\alpha \in C_n(X, A)$ mit e_α eine n-Zelle von $X \setminus A$ (siehe 2.13). Dann gilt

$$f_n(e_\alpha) = \sum_{e_\beta \in L_n} u_{\alpha\beta} e_\beta$$

wobei $L_n = \{ e_\beta \mid e_\beta \text{ } n\text{-Zelle von } Y \setminus B \}$.

Beweis: Analog zu 2.14. #

2.16 Beispiele

(a) Sei $n \geq 1$, $m \neq 0$ und wähle $f_m : S^n \to S^n$ mit $\deg(f_m) = m$. Sei X der CW-Komplex, der durch Anheften einer $n+1$ Zelle auf S^n entlang f_m. Dann gilt

$$\tilde{H}_k(X;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}/m & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

In der Tat, X hat eine CW-Zerlegung mit 3 Zellen e^0, e^n, e^{n+1}; es folgt $C_k(X, e^0) = \begin{cases} \mathbb{Z}\{e^n\}, \mathbb{Z}\{e^{n+1}\}, & k = n, n+1 \\ 0 \text{ sonst}, \end{cases}$ und $d_{n+1} : C_{n+1}(X, e^0) \to C_n(X, e^0)$ identifiziert man dank 2.14 mit $\mathbb{Z}\{e^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{Z}\{e^n\}$, $e^{n+1} \mapsto m e^n$.

(b) Etwas allgemeiner, sei G irgendeine Abelsche Gruppe und sei $\langle F \mid R \rangle$ eine Darstellung von G mit $0 \to R \xrightarrow{g} F \to G \to 1$ exakt, F und R frei Abelsch. Sei $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ eine Basis von R, $\{y_\beta\}_{\beta \in B}$ eine Basis von F, und $d_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ durch

$$g(x_\alpha) = \sum_{\beta \in B} d_{\alpha\beta}\, y_\beta$$

für alle $\alpha \in A$, $\beta \in B$ definiert. Sei $n \geq 1$.
Sei $X^{(n)} = \bigvee_{\beta \in B} S^n_\beta$, mit CW-Zerlegung mit nur einer 0-Zelle und n-Zellen $\{e_\beta \mid \beta \in B\}$.
Nehmen wir an, dass $\forall\, \alpha \in A$, eine Abbildung $\phi_\alpha : S^n \to X^{(n)}$ existiert, sodass $f_{\alpha\beta} : S^n \xrightarrow{\phi_\alpha} X^{(n)} \xrightarrow{q_\beta} S^n$ Grad $d_{\alpha\beta}$ hat.
Ist $X = X^{(n+1)}$ durch Anheften von $\{D^{n+1}_\alpha \mid \alpha \in A\}$ entlang $\{\phi_\alpha \mid \alpha \in A\}$ auf $X^{(n)}$ erhalten, so gilt

$$0 \to C_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}) \xrightarrow{d_{n+1}} C_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}) \to 0$$
$$\cong \qquad\qquad\qquad\qquad \cong$$
$$F \xrightarrow{\;g\;} G$$

so dass $\tilde{H}_k(X, \mathbb{Z}) = \begin{cases} G & n = k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Der Raum X heißt dann ein <u>Moore Raum von Typ (G, n)</u>

Existenz von ϕ_α: Sei $B_\alpha = \{\beta \in B \mid d_{\alpha\beta} \neq 0\}$. Die Pinch-Abbildung $S^n \xrightarrow{p} S^n \vee S^n$ erhält man durch Kollabieren des Äquators: Zum Beispiel, $S^n = S$ als CW mit 2-Zellen in jeder Dimension k, $0 \leq k \leq n$, so kann man ∇ als eine Verklebung $S \longrightarrow S/S^{(n-1)} \equiv S^n \vee S^n$ beschreiben.

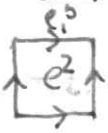
Iteriere p um $p : S^n \longrightarrow \bigvee_{\beta \in B_\alpha} S^n_\beta$ zu erhalten (oder wähle eine CW-Struktur von S^n mit B_α n-Zellen und kollabiere $(S^n)^{(n-1)}$). Für jede $\beta \in B_\alpha$ wähle $\psi_\beta : S^n_\beta \longrightarrow S^n_\beta$ von Grad $d_{\alpha\beta}$. Dann hat $\phi_\alpha : S^n \xrightarrow{p} \bigvee_{\beta \in B_\alpha} S^n_\alpha \xrightarrow{\vee \psi_\beta} \bigvee_{\beta \in B_\alpha} S^n \hookrightarrow X^{(n)}$ die gewünschte Eigenschaft:

$$\deg(\phi_\alpha q_\beta) = \begin{cases} 0 & \beta \notin B_\alpha, \\ \deg(\psi_\beta) = d_{\alpha\beta}, & \beta \in B_\alpha. \end{cases}$$

(c) Bemerke: der Homotopie-Typ eines Moore Raumes von Typ (G, n) ist nicht von (G, n) eindeutig bestimmt. Zum Beispiel sind S^3 und der Poincaré Sphäre S^3/I' zwei Moore Räume von Typ $(\mathbb{Z}, 3)$. Für $X = S^3/I' \setminus \{x_0\}$ gilt $\tilde{H}_*(X; \mathbb{Z}) = 0$ und $\pi_1(X, x_0) \cong I'$; Vergleiche mit Beispiel 2.38 aus Kapitel.

2.17 Definition: ein Raum X heißt azyklisch, falls $\tilde{H}_*(X; \mathbb{Z}) = 0$.

2.18 Beispiele: (a) Torus $T^2 = S^1 \times S^1$: Produkt-CW-Zerlegung:
$S^1 = e^0 \amalg e^1$, $T^2 = e^0 \amalg e^1_a \amalg e^1_b \amalg e^2$, mit
$e^0 = e^0 \times e^0$, $e^1_a = e^0 \times e^1$, $e^1_b = e^1 \times e^0$, $e^2 = e^1 \times e^1$.

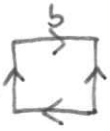


Üblicher Quotient . $C_*(T^2)$: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$

$$\Rightarrow H_k(T^2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = 0, 2, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \ k = 1.$$

Ebenso: T^3 : $C_*(T^3) = 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z}^3 \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$

(b) K = Kleinsche Flasche :



$C_*(K)$: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\binom{0}{2}} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$, also

$$H_k(K; \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & k \neq 0, 1 \\ \mathbb{Z} & k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}, & k = 1. \end{cases}$$

Ebenso, für $K \times S^1$ mit produkt CW-zerlegung, ist es leicht zu berechnen:

$$H_k(K \times S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k=0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & k=1 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & k=2 \end{cases} \quad \text{und } 0 \text{ sonst.}$$

Vergleiche mit Hatcher, Beispiel 2.39.

(c) Zellul. Ketten komplex für $\mathbb{RP}^n$: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$

für n ungrade, $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \to 0$. (→ Topo 1, Theorem 5.70)

2.19 Definition: Sei $G_* = \{G_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ ein graduierte Abelsche Gruppe, so dass Rank (G_i) ist endlich für alle $i \in \mathbb{Z}$ (Zur Erinnerung: Ist G frei Abelsch, so gilt Rank (G) = Kardinalität einer Basis. Ansonsten Rank (G) = Supremum $\{$ Rank $(F) \mid F < G, F$ frei $\}$), und null für fast alle i ist. Dann heißt

$$\chi(G_*) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{ Rank } (G_i)$$

die Euler-Poincaré-Charakteristik von G. Ist (C_*, d_*) ein Kettenkomplex, so definiere die Euler-Poincaré Charakteristik von (C_*, d_*) als $\chi(C_*)$ (ignoriere d_*), wenn definiert.

2.20 Lemma: Ist (C_*, d_*) ein Kettenkomplex so dass $\chi(C_*)$ definiert ist. Dann ist $\chi(H(C_*, d_*))$ auch definiert, und es gilt $\chi(C_*) = \chi(H_*(C_*, d_*))$.

Beweis: Hier benutzen wir dass falls $0 \to A \to B \to C \to 0$ ein exakte Folge von Abelsche Gruppen ist, so gilt Rank (B) = Rank (A) + Rank (C) [zum Beispiel: Zeige, dass Rank $(B) = \text{Dim}_{\mathbb{Q}}(B \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})$, und dass $0 \to A \otimes \mathbb{Q} \to B \otimes \mathbb{Q} \to C \otimes \mathbb{Q} \to 0$ exakt ist].

Also Rank $(H_i C_*) \leq$ Rank $(Z_i C_*) \leq$ Rank (C_i), und $\chi(H_*(C_*, d_*))$ ist definiert. Ausserdem haben wir kurze exakten Folgen $0 \to Z_i(C_*) \to C_i \xrightarrow{d_i} B_{i-1} \to 0$, also $\chi(C_*) =$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{ Rank}(C_i) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \left(\text{Rank}(Z_i) + \text{Rank}(B_{i-1})\right) =$$

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \left[\text{Rank}(Z_i) - \text{Rank}(B_i)\right] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i \text{ Rank}(H_i(C_*, d)) = \chi(H_*(C)).$$

#

2.21 Korollar :

(a) Ist $\cdots \to A_{n+1} \xrightarrow{d_{n+1}} A_n \xrightarrow{d_n} A_{n-1} \to \cdots$ eine exakte Folge von Ab. Gruppen, so gilt $\chi(A_*) = 0$ (falls definiert).

(b) Ist $\cdots \to C_{n+1} \to A_n \to B_n \to C_n \to A_{n-1} \to \cdots$ eine exakte Folge von Ab. Gruppen, und sind zwei aus $\chi(A_*), \chi(B_*), \chi(C_*)$ definiert, so ist auch der Dritte definiert, und $\chi(B) = \chi(A) + \chi(C)$.

Beweis : (a) klar aus 2.21, weil $H_*(A, d) = 0$.

(b) Definiert, weil $X \to Y \to Z$ exakt $\Rightarrow$ Rank $(Y) \leq$ Rank (X) + Rank (Y). Verwenden wir (a) auf die lange ex. Folge E in (b), mit $E_0 = B_0$, etc., so erhalten wir

$$0 = \chi(E) = \sum_i (-1)^{3i} \text{Rank}(B_i) + \sum_i (-1)^{3i-1} \text{Rank}(A_i) + \sum_i (-1)^{3i+1} \text{Rank}(C_i) = \chi(B) - \chi(A) - \chi(C). \quad \#.$$

2.22 Definition : Die Euler-Poincaré Charakteristik eines Raumes X (oder eines Paares (X, A)) ist die Euler-Poincaré Charakt. seiner Homologie : $\chi(X) := \chi(H_*(X; \mathbb{Z}))$, wenn definiert.

2.23 Satz : Ist (X, A) ein Paar so dass zwei aus $\chi(X)$, $\chi(A)$, $\chi(X, A)$ definiert sind, so ist der Dritte, und $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X, A)$.

Beweis : LEF + 2.21. (b). (Ähnliche Aussage für Mayer-Victoris).

2.24 Lemma : Sei (X, A) ein CW-Paar, so dass $X \setminus A$ nur endlich-viele Zellen hat. Sei $\alpha_n = \#\{e \mid e \text{ eine } n\text{-Zelle aus } X \setminus A\}$. Dann gilt $\chi(X, A) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$.

Beweis : klar, weil Rank $(C_n(X, A)) = \alpha_n$; folgt also aus 2.20.

2.25 Bemerkung : in Lemma 2.24 gilt insbesondere, dass $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$ nur vom Homotopie-Typ und nicht von der CW-Zerlegung (mit endlich-vielen Zellen) abhängt. Das erklärt die Eulersche Polyeder Formel :

Ist P eine Polyeder-Zerlegung von S^2 mit α_0-vielen Ecken, α_1-vielen Kanten und α_2-vielen Seiten, so gilt

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2 \quad :$$

P bestimmt eine CW-Zerlegung von S^2 mit α_n n-Zellen, $n=0,1,2$.

2.26 Beispiele (a) $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$; $\chi(\mathbb{R}P^n) = \frac{1}{2}(1+(-1)^n)$

$\chi(\mathbb{C}P^n) = n+1$

(b) Sind X, Y Räume, die eine endliche CW-Zerlegung besitzen, so gilt $\chi(X\times Y) = \chi(X)\cdot\chi(Y)$:

Sei $\alpha_n = \#$ n-Zellen in X, $\beta_n = \#$ n-Zellen in Y,

$\gamma_n = \#$ n-Zellen in der Produkt-Zerlegung von $X\times Y$, so gilt

$\gamma_n = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \beta_{n-i}$, also $\chi(X\times Y) = \sum_{i\geq 0} (-1)^i (\alpha_0\beta_i + \dots + \alpha_i\beta_0) = \sum_{j\geq 0,\, k\geq 0} (-1)^{j+k} \alpha_j\beta_k = \left(\sum_{j\geq 0}(-1)^j\alpha_j\right)\cdot\left(\sum_{k\geq 0}(-1)^k\beta_k\right) = \chi(X)\cdot\chi(Y)$.

Zum Beispiel, für $T^n = (S^1)^{\times n}$: $\chi(T^n) = 0 \quad \forall\, n \geq 1$.

2.27 Bemerkung: Ein etwas feinerer Invariant als die Euler-Poincaré Charakteristik, den man manchmal benutzt, ist die Hilbert-Poincaré Reihe $P_{G_*}(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Rank}(G_i)\, t^i \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$. Sie ist definiert für graduierte Abelsche Gruppen mit $\operatorname{Rank}(G_i) < \infty$ $\forall\, i$. Es gilt $P_{G_*}(-1) = \chi(G_*)$, wenn fast alle $\operatorname{Rank}(G_i)$ null sind.

Zum Beispiel: $P_{H_*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})} = 1 + t^2 + \dots + t^{2n} = \frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}$,

$P_{H_*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})} = \frac{1}{1-t^2}$.

2.28 Lemma: Sei X ein endlicher CW-Komplex und $p: E \to X$ eine Überlagerung mit k-Blättern, $k \leq \infty$.

Dann gilt $\chi(E) = k\cdot\chi(X)$.

Beweis: Folgt aus 1.32: falls X m n-Zellen hat, so hat E km davon. #

2.29 Beispiel: Hier eine triviale Folgerung: Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei $E \xrightarrow{p} X$ eine Überlagerung (mit E zusammenhängend). Gilt $\chi(E) = k \neq 0$, so gilt auch $\chi(X) \neq 0$, und p hat $\chi(E)/\chi(X)$ Blätter.
Zum Beispiel: $E = \mathbb{R}P^{2n} \Rightarrow p$ ist ein Homöomorphismus, $E = S^{2n} \Rightarrow p$ hat 1 oder 2 Blätter.

Nun möchten wir $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ studieren: wir definieren CW-Zerlegungen von diesen Lie-Gruppen und versuchen ihre zelluläre Homologie zu Berechnen. Das machen wir direkt für alle Stiefel Mannigfaltigkeiten.

2.30 Definition: Sei $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, und sei $\mathbb{F}^n$, $n \geq 1$ mit dem Euklidischen oder Hermitischen Skalarprodukt versehen. Sei $0 \leq k \leq n$. Wir definieren die (reelle, bzw. komplexe) Stiefel Mannigfaltigkeit $V_{n,k}$ wie folgt:
$V_{n,k} \left(= V_{n,k}^{\mathbb{F}}\right) = \{ (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{F}^n)^k \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \}$,
mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{F}^{nk}$. Ein k-tuple $(v_1, \dots, v_k)$ nennt man einen k-Rahmen (eng: k-frame).

2.31 Lemma: Sei $G(n) = O(n)$, bzw. $U(n)$. Wir haben Inklusionen $G(n) \hookrightarrow G(n+1)$ für alle $n \geq 1$, gegeben durch $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; ebenso $G(k) \hookrightarrow G(n)$ für $0 \leq k \leq n$, wobei $G(0)$ mit $\{ I_n \} \subset G(n)$ identifiziert ist.
Sei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis von $\mathbb{F}^n$;
Die Topologische Gruppe wirkt stetig und transitiv auf $V_{n,k}$ durch $A \cdot (v_1, \dots v_k) = (Av_1, \dots, Av_k)$. Der Stabilisator von $x_0 = (e_{n-k+1}, \dots, e_n)$ ist die Untergruppe $G(k)$, und wir erhalten einen Homöomorphismus

$$G(n)/G(k) \longrightarrow V_{n,k}, \quad [A] \longmapsto A \cdot x_0 .$$

Beweis: Klar. Daß die Abbildung ein Homöo ist folgt aus $G(n)$ kompakt und $V_{n,k}$ Hausdorff. #

2.32 Bemerkung: es ist nicht schwierig zu beweisen, daß $V_{n,k}$ eine Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{F}^{nk}$ der (reellen) Dimension $nk - \frac{1}{2}(k^2+k)$ (falls $\mathbb{F}=\mathbb{R}$), $2nk - k^2$ (falls $\mathbb{F}=\mathbb{C}$). ($\rightarrow$ homogene Mannigfaltigkeiten).

2.33 Beispiele: (a) $V^{\mathbb{R}}_{n,n} = O(n)$, $V^{\mathbb{R}}_{n,n-1} \cong SO(n)$, $V^{\mathbb{C}}_{n,n} = U(n)$, $V^{\mathbb{C}}_{n,n-1} = SU(n)$

(b) $V^{\mathbb{R}}_{n,1} = S^{n-1}$, $V^{\mathbb{C}}_{n,1} \cong S^{2n-1}$

Wir definieren nun die CW-Zerlegung für $V^{\mathbb{R}}_{n,k}$ und $V^{\mathbb{C}}_{n,k}$ gleichzeitig; Sei $d=1$ falls $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $d=2$ falls $\mathbb{F}=\mathbb{C}$. Wir definieren, falls $n \geq 1$,

$$\varphi: S^{d-1} \times S^{nd-1} \longrightarrow G(n)$$

durch $\varphi(\lambda, x)(y) = (\lambda-1)\langle x, y\rangle x + y$: also ist $\varphi(\lambda, x): \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ durch $\varphi(\lambda,x)(y) = y$ für $y \in x^\perp$ und $\varphi(\lambda,x)(x) = \lambda x$. Als Matrix bezüglich $(e_1, \dots, e_n)$ ist $\varphi(\lambda, x)$ durch $\varphi(\lambda,x)_{ij} = x_i \bar{x}_j(\lambda-1) + \delta_{ij}$ gegeben, wo $x = \sum x_i e_i$. Die Stetigkeit von φ ist klar.

Falls $m \leq n$, betrachte die standard Inklusion $\mathbb{F}^m = \mathbb{F}^m \times 0 \subset \mathbb{F}^n$, und $S^{dm-1} \hookrightarrow S^{dn-1}$ (Einschränkung). Dann ist φ mit den Inklusionen verträglich:

$$\begin{array}{ccc} S^{d-1} \times S^{dm-1} & \hookrightarrow & S^{d-1} \times S^{dn-1} \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ G(m) & \xrightarrow{A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)} & G(n) \end{array} \quad \text{kommutiert.}$$

2.34 Definition: Sei Q_n der Quotienten Raum von $S^{d-1} \times S^{dn-1}$ durch die $\bar{A}_\varphi$-Relation, die von φ bestimmt ist: $S^{d-1} \times S^{dn-1} \xrightarrow{\varphi} G(n)$

Da $S^{d-1} \times S^{dn-1}$ kompakt ist, und $G(n)$ Hausdorff, $\pi \searrow \quad \nearrow \bar{\varphi}$ Q_n

ist $\bar{\varphi}$ ein Homöomorphismus auf $\bar{\varphi}(Q_n) \subset G(n)$, und wir identifizieren Q_n mit diesem Teilraum von $G(n)$.

2.35 Bemerkung: die Äquivalenzrelation $\sim$ die in 2.34 durch φ gegeben ist, kann man so beschreiben:

$$(\lambda, x) \sim (\mu, y) \iff \begin{cases} \lambda = \mu = 1, \text{ oder} \\ \lambda = \mu \text{ und } y = \upsilon x \end{cases}$$

für ein $\upsilon \in \mathbb{F}$: klar, weil $\varphi(x,1) = id = \varphi(y,1)$ $\forall x, y$; $\varphi(x,\lambda)$ hat 1 (falls $n \geq 2$) und λ als Eigenwert, also $\lambda \neq 1$ und $\varphi(x,\lambda) = \varphi(y,\mu) \iff \lambda = \mu$, mit gleichem Eigenraum (also $\langle x \rangle = \langle y \rangle$). Außerdem, der obige Diagram mit φ und Inkl. induziert auf Quotienten ein komm. Diagram von Inklusionen $Q_m \hookrightarrow Q_n$ als Teilräumen, für alle $n \geq m \geq 0$.

$$\begin{array}{ccc} Q_m & \hookrightarrow & Q_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ G(m) & \hookrightarrow & G(n) \end{array}$$

(Hier $Q_0 = \{id\} = \{\text{Klasse von } (x,1)\} \subset Q_n$).

Nun zeigen wir, dass Q_n ein CW-Komplex ist.

Betrachte $D^{(n-1)d} = \{ x \in \mathbb{F}^{n-1} \mid \|x\| \leq 1 \}$ und definiere

$$f_n : D^{(n-1)d} \longrightarrow S^{dn-1}, \quad x \mapsto (x, \sqrt{1-\|x\|^2}) \in \mathbb{F}^{n-1} \times \mathbb{F}.$$

Sei $g : D^{d-1} \to D^{d-1}/\partial D^{d-1} \cong S^{d-1}$ die Quotienten Abbildung mit $[\partial D^{d-1}] = 1$, $d = 2$ oder $g : 0^\circ \to \{-1\} \in S^0$.

2.36 Lemma: Die Verknüpfung

$$h_n : D^{nd-1} = D^{d-1} \times D^{(n-1)d} \xrightarrow{g \times f_n} S^{d-1} \times S^{dn-1} \xrightarrow{\varphi} Q_n$$

bestimmt einen relativen Homöomorphismus

$$h_n : (D^{nd-1}, S^{nd-2}) \longrightarrow (Q_n, Q_{n-1}),$$

für alle $n \geq 1$. Insbesondere ist Q_n ein CW-Komplex mit einer 0-Zelle ($= Q_0$) und einer $(md-1)$-Zelle ($= h_m(\mathring{D}^{md-1})$) für alle $1 \leq m \leq n$.

Beweis: (a) $h_n(S^{nd-2}) = Q_{n-1}$: hier $S^{nd-2} = A \cup B$ mit $A = S^{d-1} \times D^{(n-1)d}$, $B = D^{d-1} \times S^{(n-1)d-1}$. ($A = \emptyset$ für $d = 1$)

Für $(\alpha, z) \in A$ gilt $h_n(\alpha, z) = \varphi \circ (g \times f_n)(\alpha, z) = \varphi(1, f_n(z)) =$
$= id \in Q_0 \subset Q_{n-1}$.
Für $(\alpha, z) \in B$ gilt $f_n(z) \in S^{d(n-1)-1}$ (weil $f_n(z) = z$ falls $z \in S^{d(n-1)-1}$), also $(g \times f_n)(\alpha, z) \in S^{d-1} \times S^{d(n-1)-1}$ und $h_n(\alpha, z)$ $\in Q_{n-1}$; Ausserdem: $h_n(B) = Q_{n-1}$.
(b) $h_n : \mathring{D}^{nd-1} \to h_n(\mathring{D}^{nd-1}) = Q_n - Q_{n-1}$ ist ein Homöo:
- Bijektiv: Sei $(\alpha, z) \in \mathring{D}^{d-1} \times \mathring{D}^{(n-1)d}$; dann gilt $g(\alpha) \neq 1$;
also $h_n(\alpha, z) = h_n(\beta, y) \iff f_n(z) = \nu \cdot f_n(y)$.
Insbesondere $1 - \|\nu y\|^2 = \nu^2(1 - \|y\|^2)$, $1 = \nu^2$ mit
ν reell ≥ 0 (die letzte Koordinate von $f_n(z)$, $f_n(y)$, sind Reel ≥ 0)
Also ist h_n injektiv; die Surjektivität ist klar.
Also ist h_n ein Homöo (weil es eine bijektive Quotienten-Ab. ist:
$g \times f_n \mid \mathring{D}^{nd-1}$ ist eine Einbettung, mit Bild offen in $S^{d-1} \times S^{dn-1}$
und saturiert bezüglich φ. $\Rightarrow Q_n = \amalg$ Zellen.
(c) CW: closure finite und weak sind klar weil endlich. #

2.37 Definition: Wir notieren $\mu : G(n) \times G(n) \to G(n)$ das Produkt von $G(n)$, und ebenso seine Iteriert $G(n)^m \xrightarrow{\mu} G(n)$. Sei $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$ und sei $\pi : G(n) \to V_{n,k}$ die Projektion (2.31).
Eine normale Zelle von $V_{n,k}$ ist das Bild von $\mathring{D}^\ell$ unter
$$D^\ell = D^{i_1 d-1} \times \cdots \times D^{i_r d-1} \xrightarrow{h_{i_1} \times \cdots \times h_{i_r}} Q_{i_1} \times \cdots \times Q_{i_r} \xrightarrow{\pi\mu} V_{n,k},$$
mit $\ell = d(i_1 + \cdots + i_r) - r$ und $\boxed{n \geq i_1 > i_2 > \ldots > i_r > n-k}$
Diese Zelle notieren wir $(i_1, \ldots, i_r \mid n, k)$ (oder einfach $(i_1, \ldots, i_r)$ wenn n und k fest sind).
Zum Beispiel, wenn $k = n$, $V_{n,n} = G(n)$, dann entsprechen die oben-beschriebene Q_m von Q_n, $m \neq 0$, die Zellen $(m \mid n, n)$ mit $0 < m \leq n$.

Wir notieren auch $\mu : G(n) \times V_{n,k} \to V_{n,k}$ die linke Wirkung von $G(n)$ auf $V_{k,n}$.

2.38 Theorem: $V_{n,k}$ ist ein CW Komplex, mit Zellen $x_\sigma = (e_{n-k+\sigma_1}, \dots, e_{n_k})$ und die normalen Zellen (2.37). Ausserdem, für $k > 0$ ist die Abbildung

$$\mu: Q_n \times V_{n-1,k-1} \xrightarrow{1 \times i} Q_n \times V_{n,k} \longrightarrow V_{n,k}$$

zellulär, und induziert eine surjektive Abbildung auf den zellulären Ketten-Komplexe ($i(v_1, \dots, v_{k-1}) = (v_1, \dots, v_{k-1}, e_n)$)

2.39 Bemerkung: Bevor wir das Theorem beweisen, etwas Erklärung;

(a) Die Räume Q_n: Falls $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, so gilt $Q_0 = \{id\}$, $Q_1 = O(1) = \{\pm id\}$. Für $n \geq 2$ gilt $Q_n \overset{cw}{\simeq} \mathbb{R}P^{n-1} \amalg Q_0$, mit der üblichen CW-Zerlegung von $\mathbb{R}P^{n-1}$. Das ist klar, weil $Q_n = (S^{n-1} \times S^0)/\sim$; hier $(S^{n-1} \times \{+1\})/\sim = Q_0$, und auf $S^{n-1} \times \{-1\}$ ist $\sim$ die antipodale Relation.

Falls $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, so gilt $Q_0 = \{id\}$, $Q_1 = U_1$, und für $n \geq 2$ gilt $Q_n = \mathbb{C}P^{n-1} \times [0,1] \Big/ \mathbb{C}P^{n-1} \times \{0,1\} = \Sigma \mathbb{C}P^{n-1}/\sim$, wobei $\sim$ die Klassen von $[x,0)$ und $[x,1]$, $x \in \mathbb{C}P^n$, identifiziert:

(b) Die Einbettung $Q_n \subset Q_{n+1}$ entspricht die übliche Einbettung $\mathbb{R}P^{n-1} \subset \mathbb{R}P^n$, bzw die Einbettung induziert von $\mathbb{C}P^{n-1} \subset \mathbb{C}P^n$.

(c) Die normale Zellen in $V_{n,k}$ erhält man durch Multiplikation von Zellen in $G(n)$, die von $Q(n) \subset G(n)$ gegeben sind, gefolgt durch Quotienten nach $G(n-k)$.

Die Höchstdimensionale normale Zelle in $V_{n,k}$ (eine einzige) ist $(n, n-1, \dots, n-k+1 \mid n, k)$; für $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hat sie die Dimension $(n-1) + (n-2) + \dots + (n-k) = nk - \frac{1}{2}(k^2+k)$, für $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ die Dimension $(2n-1) + (2n-3) + \dots + (2n-2k+1) = 2nk - k^2$ (Vergleiche mit 2.32).

Wir betrachten nun die Verknüpfung

$\alpha : Q_n \hookrightarrow G(n) \xrightarrow{\pi} G(n)/G(n-1) = V_{n,1} = S^{nd-1}$.

Wie oben, sei $e_n = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{F}^n$.

2.40 Lemma: Die Abbildung $\alpha : (Q_n, Q_{n-1}) \to (S^{nd-1}, e_n)$ ist ein relativer Homöomorphismus.

Beweis: (a) $Q_{n-1} = \alpha^{-1}(e_n)$; die Inklusion $Q_{n-1} \subset \alpha^{-1}(e_n)$ ist klar : $\pi : G(n) \to S^{nd-1}$ ist durch $A \mapsto A e_n$ gegeben ; Insbesondere $\alpha(Q_{n-1}) \subset \{e_n\}$, weil $Q_{n-1} \subset G(n-1)$.

Umgekehrt, für $A \in G(n)$ gilt $A \in G(n-1) \Leftrightarrow A e_n = e_n$;

Also $\alpha(\varphi(\lambda, x))(e_n) = e_n \overset{2.33}{\Leftrightarrow} (\lambda - 1)\langle x, e_n\rangle x + e_n = e_n \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda = 1$ oder $x \perp e_n$ (also $x_n = 0$) $\Leftrightarrow \lambda = 1$ oder $x \in S^{(n-1)d-1}$

$\Leftrightarrow \varphi(\lambda, x) \in Q_{n-1}$.

(b) $\alpha : Q_n \setminus Q_{n-1} \to S^{nd-1} \setminus e_n$ ist bijektiv :

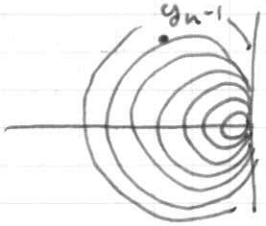
Sei $y \in S^{nd-1} \setminus e_n$; es genügt zu zeigen: es existiert genau ein $(\lambda, x) \in S^{d-1} \times S^{nd-1}$ mit $\lambda \neq 1$ und x_n reell und $x_n > 0$ (weil jeden $[x, \lambda] \in Q_n \setminus Q_{n-1}$ hat genau 1 solchen Darsteller), mit $\varphi(\lambda, x)(e_n) = y$,

$(\lambda - 1) x_n \cdot x = y - e_n \quad (*)$

n-te Komponente von (*) ist $(\lambda - 1) x_n^2 = y_n - 1$. Wir suchen eine Lösung mit $\lambda \in S^{d-1} \setminus 1$, $x_n \in \mathbb{R}_{>0}$.

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$: $\lambda = -1$, $x_n = \left(\frac{1}{2}(1 - y_n)\right)^{1/2}$ einzige Lösung.

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$: $|y_n| < 1$ also $y_n - 1$ liegt in der offene Halb-Ebene $\{z \mid \mathrm{re}(z) < 0\}$; $(\lambda - 1) x_n^2$ ist ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Zentrum $(-x_n^2 + 0i)$ und Radius x_n^2. Diese Kreise haben 0 als einzige Schnittpunkt (entspricht $\lambda = 1$).



$\Rightarrow y_n - 1$ liegt auf genau 1 solchen Kreis, was $\lambda \neq 1$, $|\lambda| = 1$ und $x_n > 0$ eindeutig bestimmt.

Dann sind x_i, $1 \le i \le n-1$, eindeutig durch (*) bestimmt.
Es bleibt zu zeigen: $x \in S^{nd-1}$, also $\|x\| = 1$:
(*): verwende $\langle -,- \rangle$ auf die Gleichung, und erhalte

$(\lambda-1)(\overline{\lambda-1})\, x_n^2 \langle x,x\rangle = 2 - y_n - \bar{y}_n$

$(2-\lambda-\bar{\lambda})\, x_n^2 \langle x,x\rangle = 2 - y_n - \bar{y}_n$ (verwende $x_n^2(\lambda-1) = y_{n-1}$)

$(2-\lambda-\bar{\lambda})\, x_n^2 \langle x,x\rangle = (1-y_n) + (1-\bar{y}_n) = (2-\lambda-\bar{\lambda})\, x_n^2$

$\Rightarrow \langle x,x\rangle = 1$, da $x_n^2 \neq 0$, $2-\lambda-\bar{\lambda} \neq 0$.

Die Stetigkeit von α^{-1} folgt aus der Konstruktion von λ, x. #

2.41 Lemma: $0 < k \le n$; dann ist

$$\mu: \left(Q_n \times V_{n-1,k-1},\ Q_{n-1} \times V_{n-1,k-1}\right) \to \left(V_{n,k},\ V_{n-1,k-1}\right)$$

ein relativer Homöomorphismus, mit $\mu(Q_n \times V_{n-1,k-1}) = V_{n,k}$.

Beweis: (a) $\mu^{-1}(V_{n-1,k-1}) = Q_{n-1} \times V_{n-1,k-1}$:
$\mu(Q_{n-1} \times V_{n-1,k-1}) = V_{n-1,k-1}$ ist klar ($\mathrm{id} \in Q_{n-1} \subset G(n-1)$).
Sei $(A, \underline{v}) \in Q_n \times V_{n-1,k-1}$ mit $\mu(A,\underline{v}) \in V_{n-1,k-1}$:
$\mu(A,\underline{v}) = [A(v_1,\dots,v_{k-1}, e_n)] \in V_{n-1,k-1} \Rightarrow A e_n = e_n \Rightarrow$
$A \in G(n-1)$; also $A \in G(n-1) \cap Q_n$; aber $G(n-1) \cap Q_n = Q_{n-1}$:
"$\supset$" ist klar, "$\subset$" folgt aus 2.40.

(b) μ ist eine Bijektion $(Q_n \setminus Q_{n-1}) \times V_{n-1,k-1} \to V_{n,k} \setminus V_{n-1,k-1}$:
Injektiv: seien $A, B \in Q_n$ und $C, D \in G(n-1)$ mit
$[C], [D] \in V_{n-1,k-1}$; nehmen wir an, $\mu(A,C) = \mu(B,D)$;
Dann gilt $AC\,G(n-k) \overset{(*)}{=} BD\,G(n-k)$ in $G(n)$; es folgt
$A e_n = B e_n$, also aus 2.40 $A = B$. Also aus (*) $[C] = [D]$.
Surjektiv: Sei $A\,G(n-k) \in V_{n,k} \setminus V_{n-1,k-1}$ mit $A \in G(n)$.
Dann gilt $A(e_n) \neq e_n$, also dank 2.40 existiert $B \in Q_n \setminus Q_{n-1}$
mit $A(e_n) = B(e_n)$; insbesondere $A\,G(n-1) = B\,G(n-1)$,
und ein $C \in G(n-1)$ existiert, mit $A = BC$.
Also $A = \mu(B, C\,G(n-k))$.

#

2.42 Bemerkung: Betrachte die Abbildung $\varphi : S^{d-1} \times S^{nd-1} \to G(n)$ aus 2.34. Sei $A \in G(n)$. Dann gilt $A\,\varphi(\lambda,x)\,A^{-1} = \varphi(\lambda, Ax)$.

In der Tat, für $y \in \mathbb{F}^n$ gilt $\varphi(\lambda, Ax)(y) = \varphi(\lambda, Ax)(AA^{-1}y) = (\lambda-1)\langle Ax, AA^{-1}y\rangle Ax + AA^{-1}y = A\left((\lambda-1)\langle x, A^{-1}y\rangle x + A^{-1}y\right) = A\,\varphi(x,\lambda)(A^{-1}y)$.

2.43 Lemma: $\mu(Q_n \times Q_n) = \mu(Q_n \times Q_{n-1}) \subset G(n)$ für alle $n \geq 1$.

Beweis: **$m=1$**: klar, weil $Q_1 = G(1)$ und $Q_0 = \{id\}$.

$m=2$: es genügt zu zeigen, $\mu(Q_2 \times Q_1) = G(2)$. Aber das haben wir in 2.41 bewiesen:

$Q_2 \times V(1,1) \xrightarrow{\mu} V(2,2) = G(2)$ ist surjektiv, und $V(1,1) = G(1)$.

$m \geq 3$: Seien nun (λ, x) und $(\mu, y) \in S^{d-1} \times S^{nd-1}$.

Zu zeigen: $\varphi(\lambda,x)\cdot\varphi(\mu,y) \in Q_m \cdot Q_{m-1}$.

Sei W ein 2-dimensionaler ($/\mathbb{F}$) Unterraum von $\mathbb{F}^n$ mit $x, y \in W$. Sei $\mathbb{F}^r = \mathbb{F}^r \times 0 \subset \mathbb{F}^{n+1}$ die standard Inklusion. Aus $0 \subset W \cap \mathbb{F}^1 \subset W \cap \mathbb{F}^2 \subset \cdots \subset W \cap \mathbb{F}^n = W$ (Dimension wächst höchstens durch 1 unter jede $\subset$) sehen wir: Ein $1 \leq r \leq n-1$ existiert, mit $\dim(W \cap \mathbb{F}^r) = 1$.

Wähle $A \in G(n)$ mit $A : W \xrightarrow{\cong} \mathbb{F}^2$ und $A(W \cap \mathbb{F}^r) = \mathbb{F}^1$.

Sei $x' = Ax$ und $y' = Ay$; aus 2.42 folgt

$A\,\varphi(\lambda,x)\,\varphi(\mu,y)\,A^{-1} = \varphi(\lambda, x')\,\varphi(\mu, y')$ (*)

Ausserdem $\varphi(\lambda,x')\cdot\varphi(\mu,y') \in Q_2 \cdot Q_2 = Q_2 \cdot Q_1$.

Wähle $(\lambda_1, x_1) \in S^{2d-1} \times S^{2d-1}$, $(\mu_1, y_1) \in S^{d-1} \times S^{d-1}$ mit $\varphi(\lambda x')\cdot\varphi(\mu y') = \varphi(\lambda_1, x_1)\cdot\varphi(\mu_1, y_1)$

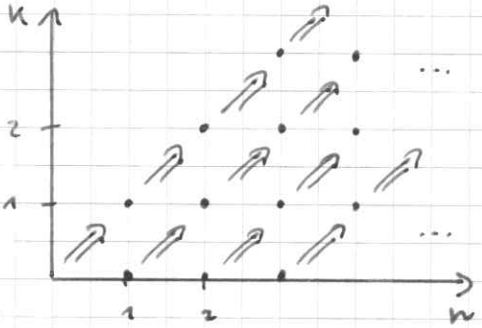
Verwende (*) und 2.42: $\varphi(\lambda,x)\cdot\varphi(\mu,y) = \varphi(\lambda_1, A^{-1}x_1)\cdot\varphi(\mu_1, A^{-1}y_1)$; $y_1 \in \mathbb{F}^1 \Rightarrow A^{-1}y \in \mathbb{F}^{n-1} \Rightarrow \varphi(\mu_1, A^{-1}y_1) \in Q_{n-1}$

#

Beweis von Theorem 2.38: betrachte die folgenden Aussagen für $0 \le k \le n$:

- $(a_{n,k})$ $V_{n,k}$ ist ein CW-Komplex (mit den normalen Zellen); für $k>0$ ist $Q_n \times V_{n-1,k-1} \to V_{n,k}$ zellulär, und induziert einen surjektiven Homom. auf den zell. Kettenkomplexen.
- $(b_{n,k})$ Für $0 < i_1, \dots, i_r \le n$ liegt $\pi(Q_{i_1} \cdots Q_{i_r})$ in m-skelet $V_{n,k}^{(m)}$, mit $m = \sum_{s=1}^{r} (d i_s - 1)$.
- $(c_{n,k})$ $\mu: Q_n \times V_{n,k} \to V_{n,k}$ ist zellulär.

Wir beweisen diese Aussagen per Induktion. Alle drei gelten wenn $k=0$. Sei angenommen $1 \le k \le n$ und die Aussagen $(a_{n-1,k-1})$, $(b_{n-1,k-1})$ und $(c_{n-1,k-1})$ gelten. Zu zeigen: dann gelten $(a_{n,k})$, $(b_{n,k})$ und $(c_{n,k})$ auch.



$(a_{n,k})$: $(a_{n-1,k-1})$ und $(c_{n-1,k-1})$ implizieren, dass $V_{n-1,k-1}$ ein CW (mit norm. Zellen) ist, und das $Q_{n-1} \times V_{n-1,k-1} \to V_{n-1,k-1}$ zellulär ist. Lemma 2.41 sagt: $V_{n,k} \setminus V_{n-1,k-1}$ ist eine disjunkte Vereinigung von Zellen der Art $\mu(e \times (i_2, \dots, i_r \mid n-1, k-1))$ mit $n-1 \ge i_2 > \dots > i_r > n-k$, wobei e die $(nd-1)$-Zelle von Q_n ist. Solch eine Zelle ist die normale Zelle $(n, i_2, \dots, i_r \mid n, k)$. Der Rand von dieser Zelle liegt in

$$\mu(Q_{n-1} \times V_{n-1,k-1}^{(m)}) \cup \mu(e \times V_{n-1,k-1}^{(m-1)}),$$ wobei

$m = \sum_{s=2}^{r} (d i_s - 1)$, was dank $(c_{n-1,k-1})$ (für erst. Summand) und Def. von norm. Zellen (für zweit. Summand) in $V_{n,k}^{((nd-1)+m-1)}$ liegt.

$(b_{n,k})$: Dank Bemerkung 2.42 wissen wir: $A Q_m = Q_m A$ gilt in $G(m)$, für alle $A \in G(m)$; insbesondere $Q_j Q_m = Q_m Q_j$ für alle $0 \le j < m$. Dank dieser Beobachtung und Lemma 2.43 gilt also $\pi(Q_{i_1} \cdots Q_{i_r}) \subset \pi(Q_{j_1} \cdots Q_{j_s})$ wobei $n = j_1 > j_2 > \dots > j_s > n-k$. ($j_s > n-k$ weil $Q_i \subset G(n-k)$ für $i \le n-k$).

Nun $\pi(Q_{j_2} \cdots Q_{j_s}) \subset V^{(m)}_{n-1,k-1}$, $m = \sum_{t=2}^{s} (d_{j_t}-1)$, dank $(b_{n-1,k-1})$, und da $Q_n \times V_{n-1,k-1} \to V_{n,k}$ zellulär $((a_{n-1,k-1}))$, folgt $\pi(Q_{j_1} \cdots Q_{j_r}) \subset V^{(n+m)}_{n,k}$. Damit ist $(b_{n,k})$ bewiesen.

(Cn,k): $Q_n \times V_{n-1,k-1} \xrightarrow{\mu} V_{n,k}$ ist zellulär (dank $(a_{n-1,k-1})$), und ebenso $Q_0 \times V_{n,k} \to V_{n,k}$ (das ist id!). Es genügt also zu prüfen: ist $(u, i_2, \dots, i_r \mid n,k)$ eine normale ℓ-Zelle von $V_{n,k}$, und e^{nd-1} eine $(nd-1)$-Zelle von $Q_n - Q_0$, so liegt $\mu(e^{nd-1} \times (u, i_2 \dots, i_r \mid n,k))$ im $nd-1+\ell$ skelet von $V_{n,k}$; aber $\mu(e^{nd-1} \times (u, i_2, \dots, i_r \mid n,k)) \subset \mu(Q_m Q_u \cdot Q_{i_2} \cdots Q_{i_r})$, also dies folgt aus $(b_{n,k})$. Damit ist $(c_{n,k})$ bewiesen. #

Wir haben Abbildungen $V_{n,k} \to V_{m,\ell}$ für alle n,k,m,ℓ mit $n \le m$, $n-k \le m-\ell$:

$$V_{n,k} \equiv G(n)/G(n-k) \longrightarrow G(m)/G(m-\ell) \to V_{m,\ell}.$$

2.44 Korollar Für $n \le m$ und $n-k \le m-\ell$ ist die Abbildung $V_{n,k} \to V_{m,\ell}$ zellulär, und bildet die Zelle

$$(i_1, \dots, i_r \mid n,k) \to \begin{cases} \equiv \text{auf } (i_1, \dots, i_r \mid m,\ell) & \text{falls } i_r > m-\ell \\ \equiv \text{auf } (i_1, \dots, i_{r-1} \mid m,\ell) & \text{falls } d=1,\ k=n,\ i_r=1,\ i_{r-1} > m-\ell \\ \text{auf entartete Weise sonst.} & \end{cases}$$

Beweis: folgt aus 2.38 und die Definition von normalen Zellen. #

Als direkter Korollar von 2.38 und 2.48 erhalten wir eine Berechnung von $H_*(V^{\mathbb{C}}_{n,k}; \mathbb{Z})$, $0 \le k \le n$, und insbesondere von $H_*(U(n); \mathbb{Z})$ und $H_*(SU(n); \mathbb{Z})$.

2.45 Theorem: Jede normale Zelle $(i_1, \dots, i_r \mid n,k)$ ist ein Zykel in $C^{cw}_*(V^{\mathbb{C}}_{n,k}; \mathbb{Z})$ (in der Notation von 2.13). Die Homologie $H_*(V^{\mathbb{C}}_{n,k}; \mathbb{Z})$ ist ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit

Basis $\{Q_0\} \cup \{[i_1,\dots,i_r\,|\,u,k] \mid (i_1,\dots,i_r|u,k)$ wunde Zelle von $V^{\mathbb{C}}_{u,k}\}$. Für $n \le m$ und $u-k \le m-\ell$ induziert die Standard Abbildung $V^{\mathbb{C}}_{n,k} \to V^{\mathbb{C}}_{m,\ell}$ den Homomorphismus $H_*(V^{\mathbb{C}}_{n,k};\mathbb{Z}) \to H_*(V^{\mathbb{C}}_{m,\ell};\mathbb{Z})$, der durch

$$[i_1,\dots,i_r\,|\,u,k] \mapsto \begin{cases} [i_1,\dots,i_r\,|\,m,\ell] & i_r > m-\ell, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt ist. Außerdem ist $H_*(Q_u \times V^{\mathbb{C}}_{u-1,k-1};\mathbb{Z}) \to H_*(V_{u,k};\mathbb{Z})$ surjektiv.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass der Rand operator in $C^{cw}_*(V^{\mathbb{C}}_{u,k};\mathbb{Z})$ null ist. Für $k=0$ ist es richtig, da $V_{u,0} = \pi(Q_0)$ nur einen Punkt hat. Induktion: Sei nun $1 \le k \le u$, und sei angenommen $d_* = 0$ auf $C^{cw}_*(V_{u-1,k-1};\mathbb{Z})$. Die Abbildung $Q^{\mathbb{C}}_u \times V^{\mathbb{C}}_{u-1,k-1} \to V^{\mathbb{C}}_{u,k}$ ist zellulär, und induziert ein surjektive Hom:

$$C^{cw}_*(Q_u \times V_{u-1,k-1}) \to C^{cw}_*(V_{u,k}).$$

Deshalb genügt es zu zeigen, dass $d_* = 0$ auf $C^{cw}_*(Q_u \times V_{u-1,k-1})$. Wir wissen dass $d_* = 0$ auf $C^{cw}_*(Q_u)$, weil die Zellen von Q_u in Dimensionen $0, 1, 3, 5, 7, \dots, 2u-1$, und die Zelle in Dim. 1 Rand 0 hat. Ebenso ist $d_* = 0$ auf $C^{cw}_*(V_{u-1,k-1})$ per Induktionsvoraussetzung. Aber der Rand für $C^{cw}_*(Q_u \times V_{u-1,k-1})$ ist von den Randen für Q_u und $V_{u-1,k-1}$ bestimmt, durch die Formel $d(e \times f) = d(e) \times f + (-1)^n e \times d(f)$, wobei $n = \dim(e)$: siehe die Künneth Formel im nächsten Kapitel. Die andere Aussagen folgen. # modulo Künneth.

2.45 Bemerkung: Ebenso können wir versuchen, $H_*(V^{\mathbb{R}}_{u,k};\mathbb{Z})$ zu berechnen, aber das ist deutlich komplizierter: $d \neq 0$ auf $H_*(Q^{\mathbb{R}}_u;\mathbb{Z})$, da $Q^{\mathbb{R}}_u = \mathbb{RP}^{u-1} \cup \{Q_0\}$. Aber der Rand $d=0$ auf $H_*(Q^{\mathbb{R}}_u;\mathbb{Z}/2)$. Das motiviert, zum Beispiel,

dass man andere Koeffizienta als $\mathbb{Z}$ nimmt: Thema des nächsten Kapitels.

2.46 Bemerkung: Die Kohomologie von $U(n)$, $SU(n)$ (und auch $O(n)$, $SO(n)$) ist also berechenbar und ziemlich kompliziert; in dieser Form allerdings schwierig zu benutzen. Aber in der obigen Beschreibung von $H_*(U(n);\mathbb{Z})$ wird die Gruppenstruktur von $U(n)$ nicht benutzt: sie induziert nämlich ein Produkt auf $H_*(U(n);\mathbb{Z})$ (das Pontrjagin Produkt). Damit wird $H_*(U(n);\mathbb{Z})$ ein $\mathbb{Z}$-Algebra und $H_*(V_{n,k};\mathbb{Z})$ ein $H_*(U(n);\mathbb{Z})$ - Modul, womit man bessere Beschreibungen von $H_*(U(n);\mathbb{Z})$, $H_*(V_{n,k};\mathbb{Z})$ geben kann.
In Kapitel 4 werden wir Kohomologie $H^*(-;\mathbb{Z})$ einführen, wobei $H^*(X;\mathbb{Z})$ eine Algebra für alle X ist; diese Struktur vereinfacht die Berechnung von Kohomologie-Gruppen.

2.47 Bemerkung: mit ähnlichen Methoden (wie in Th. 2.38) kann man eine CW-Zerlegung und die Kohomologie von den Grassmannschen Mannigfaltigkeiten $G_{n,k} = \{V \subset \mathbb{R}^n \mid \dim_{\mathbb{R}} V = k\}$ berechnen. Das werden wir später machen, wenn mehr Struktur vorhanden ist.

2.48 Bemerkung: Theorem 2.38 gilt auch für $V^{\mathbb{H}}_{n,k}$, mit $d=4$ in den Lemma; einziger Unterschied: 2.35 $(\lambda, x) \sim (U\lambda U^{-1}, Ux)$. ($\mathbb{H}$ nicht kommutativ)

Referenzen: CW-komplexe und zell. Kohomologie:
- A. Dold, "Lectures on alg. Topology".

Zelluläre Zerlegung von $SO(n)$, $V_{n,k}$, $G_{n,k}$:
- Hatcher, 3.D
- Steenrod, "Cohomology operations".
- Milnor-Stasheff: "Characteristic classes".