III HOMOLOGIE MIT KOEFFIZIENTEN; DIE KUNNETH-FORMEL.

3.1 Definition: Seien A, B zwei Abelsche Gruppen. Das Tensorprodukt $A \otimes B$ von A und B ist die Abelsche Gruppe, die von (der Menge) $A \times B$ erzeugt ist, mit den Relationen

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1 + a_2, b) - (a_1, b) - (a_2, b) \\ (a, b_1 + b_2) - (a, b_1) - (a, b_2) \end{array} \;\middle|\; \begin{array}{r} \forall\ a, a_1, a_2 \in A \\ b, b_1, b_2 \in B \end{array} \right\}$$

Die Klasse von $(a, b) \in A \times B$ in $A \otimes B$ wird $a \otimes b$ notiert.
Insbesondere gilt $(a_1 + a_2) \otimes b = a_1 \otimes b + a_2 \otimes b$, etc.,
und ein Element aus $A \otimes B$ kann man immer als Summe $\sum_{i=1}^{r} a_i \otimes b_i$ mit $a_i \in A$, $b_i \in B$ angeben.

3.2 Satz: Seien A, B Abelsche Gruppen; Die Abbildung $\nu : A \oplus B \to A \otimes B$, $\nu(a,b) = a \otimes b$ ist bilinear, und initial unter allen bilinearen Abbildungen aus $A \oplus B$:
Ist C eine Ab. Gruppe und $f : A \oplus B \to C$ bilinear (also $f(a_1 + a_2, b) = f(a_1, b) + f(a_2, b)$; $f(a, b_1 + b_2) = f(a, b_1) + f(a, b_2)$), so existiert ein eindeutiger Homomorph. $\bar{f} : A \otimes B \to C$ mit

$$\begin{tikzcd} A \oplus B \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\nu"'] & & C \\ & A \otimes B \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutativ.

(Bemerke: eine Abelsche Gruppe ist das gleiche als ein $\mathbb{Z}$-Modul; deshalb spricht man hier von (bi)linearität).

Beweis: Klar aus der Definition von $A \otimes B$. #

3.3 Satz: $Ab \times Ab \xrightarrow{\otimes} Ab$ ist ein (kovarianter) Funktor, wobei $\otimes((A \xrightarrow{f} X), (B \xrightarrow{g} Y)) = A \otimes B \xrightarrow{f \otimes g} X \otimes Y$ durch $f \otimes g (a \otimes b) := f(a) \otimes g(b)$ $\forall\ a \otimes b \in A \otimes B$ definiert ist.

#

3.4 Satz: Sei $A \in Ab$; die Funktoren $A \otimes -$, $- \otimes A$: $Ab \to Ab$ erhalten direkte Summen: es existieren natürliche Isomorphismen $\bigoplus_{i \in I} (A \otimes B_i) \to A \otimes (\bigoplus_{i \in I} B_i)$

$\bigoplus_{i \in I} (B_i \otimes A) \to (\bigoplus_{i \in I} B_i) \otimes A$. $\{B_i\}_{i \in I}$ Fam. in Ab.

Beweis: Aufgabe 8.1. #

3.5 Satz: Sei $0 \to A' \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} A'' \to 0$ eine kurze exakte Folge in Ab. Sei $B \in Ab$.

(a) die Folge $A' \otimes B \xrightarrow{i \otimes id} A \otimes B \xrightarrow{p \otimes id} A'' \otimes B \to 0$ ist exakt.

(b) spaltet die Folge $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, so ist

$$0 \to A' \otimes B \to A \otimes B \to A'' \otimes B \to 0$$ auch exakt, und spaltet.

Beweis: der Einzige Punkt, der nicht klar ist, ist vielleicht $Ker(p \otimes id) \subset Im(i \otimes id)$. Sei $C = Im(i \otimes id)$; $p \otimes id$ factorisiert also $A \otimes B \xrightarrow{q} (A \otimes B)/C \xrightarrow{\pi} A'' \otimes B$, wobei q der Quotient ist, und $\pi[a \otimes b] = (p \otimes id)(a \otimes b)$ (wohl definiert da $Im(i \otimes id) \subset Ker(p \otimes id)$). Es genügt zu zeigen, dass π injektiv ist: Dann gilt $Ker(p \otimes id) = Ker(\pi \circ q) = Ker(q) = C$. Aber es ist leicht, ein links Inverse von π zu finden, also $f: A'' \otimes B \to (A \otimes B)/C$ mit $f \circ \pi = id$:

Sei $g: A'' \oplus B \to (A \otimes B)/C$ durch $g(a, b) = [x \otimes b]$ mit $x \in p^{-1}(a) \subset A$. Solch ein x existiert, weil p surjektiv ist; g ist wohl definiert: $x, y \in p^{-1}(a)$, so gilt $x - y \in Ker\, p = im\, i$, also $x \otimes b - y \otimes b = (x-y) \otimes b \in im(i \otimes 1) = C$.

g ist bilinear: klar! Also induziert g eine eindeutige lineare Ab. $f: A'' \otimes B \to (A \otimes B)/C$ mit $g = A'' \oplus B \xrightarrow{\vee} A'' \otimes B \xrightarrow{f} A \otimes B/C$, und $f \circ \pi = id$ gilt offensichtlich. #

3.6 <u>Bemerkungen</u>:

(a) Die Inklusion $\mathrm{Im}(i\otimes id) \subset \mathrm{Ker}(p\otimes id)$ folgt natürlich aus $(p\otimes id)(i\otimes id) \overset{3.3}{=} (p\circ i)\otimes id = 0\otimes id = 0$.

Die letzte Gleichung ist Teil der <u>Additivität</u> des Funktors $Ab \xrightarrow{-\otimes B} Ab$: Sind $f, g \in \mathrm{Hom}(C,D)$, so gilt $(f+g)\otimes B = f\otimes B + g\otimes B$.

(b) Bemerke: im Beweis von 3.5 (Exaktheit in $A\otimes B$) benutzt man, dass p surjektiv ist; aber man benutzt die Injektivität von i nicht (die linke Null kann man in Satz 3.5 auslassen).

(c) Die Funktoren $\otimes$ und $\otimes\circ\tau : Ab\times Ab \to Ab$, mit $\tau: Ab\times Ab \to Ab\times Ab$, $(A,B)\mapsto (B,A)$, sind natürlich isomorph; also $A\otimes B \cong B\otimes A$ (natürlich).

(d) Wir haben ein adjungiertes Paar $(B\otimes - \,;\, \mathrm{Hom}(B,-))$ von Funktoren $B\otimes - : Ab \rightleftarrows Ab : \mathrm{Hom}(B,-)$:

Für $(A,C)\in Ab\times Ab$ haben wir ein natürlichen Isomorphismus

$$\mathrm{Hom}(B\otimes A, C) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(A, \mathrm{Hom}(B,C))$$
$$f \longmapsto [a \mapsto (b\mapsto f(b\otimes a))]$$

Das ist die universelle Eigenschaft (mit einer Variable fixiert).

(e) Aus 3.4 folgt: Sind A und B frei mit Basen $\{x_i\}_{i\in I}$ und $\{y_j\}_{j\in J}$, so ist $A\otimes B$ frei mit Basis $\{x_i\otimes y_j\}_{(i,j)\in I\times J}$.

3.7 <u>Definition</u>: Sei (X,A) ein Paar von Räumen (bzw. von CW-Komplexen), und sei $(S_*(X,A); d_*)$ der singuläre Kettenkomplexe von (X,A); Sei M eine Abelsche Gruppe. Man definiert die singuläre Homologie von (X,A) <u>mit Koeffizienten in M</u> als $H_*(X,A;M) = H_*(S_*(X,A)\otimes M; d_*\otimes id)$.

Bzw., Sei $(C_*^{cw}(X,A), d)$ der zellulären Kettenkomplex von (X,A); Die zelluläre Homologie von (X,A) mit Koeffizienten in M ist als $H_*^{CW}(X,A;M) = H_*(C^{cw}(X,A)\otimes M; d_*\otimes id)$ definiert.

3.8 Theorem Sei Π ein Abelsche Gruppe. Die Eilenberg-Steenrod Axiome gelten auch alle für sing. Homologie mit Koeffizienten in Π, bis auf das Dimensionsaxiom, das durch
$$H_*(\text{punkt};\Pi) \cong \begin{cases} \Pi, & *=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
ersetzt wird.

Ausserdem haben wir einen Isom. $H_*^{cw}(X,A;\Pi) \xrightarrow{\Theta} H_*(X,A;\Pi)$, natürlich bezüglich zellulären Abbildungen.

Beweis: alles klar! Für die Exaktheit benutzt man, dass
$$0 \to S_n(A) \to S_n(X) \to S_n(X,A) \to 0$$
für alle n exakt ist, und spaltet ($S_n(X,A$ ist frei).
Deshalb ist $0 \to S_n(A)\otimes\Pi \to S_n(X)\otimes\Pi \to S_n(X,A)\otimes\Pi \to 0$ auch exakt (3.5.(b)).
Die Funktorialität und Additivität von $-\otimes\Pi$ impliziert, dass $-\otimes\Pi$ Kettenhomotope Homomorph. auf kettenhomotopen Homomorphismen abbildet. Deshalb gilt Homotopie-Invarianz und Ausschneidung auch für $H_*(-;\Pi)$. Additivität ist auch klar. #

3.9 Bemerkung: Ist R ein kommutativer Ring oder sogar ein Körper, so ist $S_n(X)\otimes R$ isomorph zum freien R-Modul, der von $\mathrm{Sing}_n(X)$ erzeugt ist: $R\{\mathrm{Sing}_n(X)\} \cong S_n(X)\otimes R$ (denn ist 3.4). Man kann also $H_*(X,A;R)$ genau wie $H_*(X,A;\mathbb{Z})$ definieren, indem man $\mathbb{Z}$ durch R überall ersetzt. Ebenso ist $C_*^{cw}(X,A;R)$ das freie R-Modul mit Basis die n-Zellen von $X\setminus A$.

3.10 Satz: $H_*(\mathbb{RP}^n;\mathbb{F}_2) = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & 0\le *\le n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
für alle $1\le n\le\infty$.

Beweis: Der zelluläre Kettenkomplex von $\mathbb{R}P^n$ ist isomorph zu $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{1+(-1)^n} \mathbb{Z} \to \cdots \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}$

Verwende $- \otimes \mathbb{F}_2$; Die Abbildung $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{2 \otimes id} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_2$ ist 0: $2 \otimes 1 = (1+1) \otimes 1 = 1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 = 1 \otimes 1+1 = 1 \otimes 0 = 0$. Also ist $C_*^{cw}(\mathbb{R}P^n; \mathbb{F}_2)$, für $n < \infty$, isomorph zu $0 \to \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2 \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{0} \mathbb{F}_2$. #.

<u>Frage</u>: Wie vergleichen sich $H_*(X; A; \mathbb{Z}) \otimes M$ und $H_*(X, A; M)$? Man könnte vermuten, dass diese Gruppen isomorph sind; aber 3.10 widerspricht dieser Vermutung: $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{F}_2) = \mathbb{F}_2$ aber $H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_2 = 0$.
Trotzdem: wir zeigen nun, dass $H_*(X, A; M)$ von $H_*(X, A; \mathbb{Z})$ und M bis auf (<u>nicht natürlichen</u>) Isomorphismus bestimmt ist: das ist das Theorem der Universellen Koeffizienten. Dazu müssen wir die nicht-Exaktheit von $- \otimes M$ (3.5) weiter untersuchen.

<u>3.11 Definition</u>: Ein additiver Funktor $F: Ab \to Ab$ heisst
(a) <u>Rechts-exakt</u>, wenn $F(A_1) \xrightarrow{f_*} F(A_2) \xrightarrow{g_*} F(A_3) \to 0$ Exakt für alle $0 \to A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \to 0$ exakt ist.
(b) <u>links exakt</u>, wenn $0 \to F(A_1) \xrightarrow{f_*} F(A_2) \xrightarrow{g_*} F(A_3)$ für alle $0 \to A_1 \xrightarrow{f} A_2 \xrightarrow{g} A_3 \to 0$ exakt ist.
(c) <u>exakt</u>, wenn er links und rechts exakt ist.

<u>3.12 Beispiel</u>: 3.5 sagt also: $M \otimes -$ und $- \otimes M: Ab \circlearrowleft$ sind rechts exakt; sie sind nicht notwendigerweise exakt, in 3.10 haben wir's gesehen: $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 \to 0$ ist exakt, aber $0 \to \mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_2 \xrightarrow{2 \otimes id} \mathbb{Z} \otimes \mathbb{F}_2 \to \mathbb{Z}/2 \otimes \mathbb{F}_2 \to 0$ ist nicht exakt: $2 \otimes id = 0$, also nicht injektiv.

<u>3.13 Definition</u>: Ein $\mathbb{Z}$-Modul M heißt <u>flach</u>, falls $M \otimes -$ (also auch $- \otimes M$) exakt ist.

3.14 Definition (Zur Erinnerung!): Sei M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Die Torsionsuntergruppe T_M von M ist als

$$T_M = \{ x \in M \mid \exists\, n \in \mathbb{Z} \setminus 0,\ n x = 0 \}$$ definiert.

Das Modul M heisst torsionsfrei, falls $T_M = 0$.

3.15 Satz: Ein $\mathbb{Z}$-Modul M ist genau dann flach, wenn es torsionsfrei ist.

Beweis: Aufgabe 8.2

3.16 Definition: Seien M, N zwei $\mathbb{Z}$-Moduln; wähle eine freie Auflösung $0 \to F_1 \xrightarrow{d} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ von M: also eine solche Folge, die exakt ist, mit F_1 und F_0 freie $\mathbb{Z}$-Moduln. Wir definieren

$$\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N) = \mathrm{Ker}\left(F_1 \otimes N \xrightarrow{d \otimes id} F_0 \otimes N \right).$$

Insbesondere haben wir eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M, N) \hookrightarrow F_1 \otimes N \xrightarrow{d \otimes id} F_0 \otimes N \xrightarrow{\varepsilon \otimes id} M \otimes N \to 0$$

3.17 Lemma Bis auf kanonischen Isomorphismus ist $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ unabhängig von der Wahl von einer freien Auflösung.

Beweis: die Idee ist einfach; $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N)$ ist die $H_1(-)$ des Kettenkomplexes $(C_\bullet, d) = 0 \to F_1 \otimes N \to F_0 \otimes N \to 0$. Ist $0 \to G_1 \xrightarrow{d'} G_1 \xrightarrow{\varepsilon'} M \to 0$ eine andere freie Auflösung, und $(D_\bullet, e) = 0 \to G_1 \otimes N \to G_0 \otimes N \to 0$, so haben wir einen Quasi-isomorphismus $\varphi: C_\bullet \to D_\bullet$ (Ketten-Abb., die ein Iso in Homologie induziert), mit

$$\begin{array}{ccc} H_0(C_\bullet) & \xrightarrow{\varepsilon} & M \\ \varphi_0 \downarrow & & \| \\ H_0(D_\bullet) & \xrightarrow{\varepsilon'} & M \end{array}$$

kommutativ und zwei solche φ sind immer Kettenhomotop.

Konstruktion von φ:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & M & \to & 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_0 & & \downarrow f & & \\ 0 & \to & G_1 & \xrightarrow{d_1'} & G_0 & \xrightarrow{\varepsilon'} & L & \to & 0 \end{array}$$

Da F_0 frei ist, kann man eine Basis $\{x_i\}_I \subset F_0$ wählen, und $\varphi_0(x_i) \in G_0$ mit $\varepsilon'\varphi_0(x_i) = f\varepsilon(x_i)$ wählen (weil ε' surjektiv). Damit ist ein Hom. φ_0 definiert, mit $\varepsilon'\varphi_0 = f\varepsilon$. Ebenso wählt man eine Basis $\{y_j\}_{j\in J}$ von F_1; die Elemente $\varphi_0 \circ d_1(y_j)$ liegen in $\mathrm{Ker}(\varepsilon') = \mathrm{Bild}(d_1')$, und man kann $\varphi_1(y_j) \in G_1$ wählen, mit $d_1'\varphi_1(y_j) = \varphi_0 d(y_j)$ $\forall j \in J$. Damit ist φ_1 mit $\varphi_0 \circ d = d' \circ \varphi_1$ definiert.

<u>Eindeutigkeit von φ (bis auf Homotopie)</u>: Es genügt zu zeigen: falls $f = 0$, so ist $\varphi.$ null-Homotop:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 & \to & 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & \swarrow h_0 & \downarrow \varphi_0 & & \\ 0 & \to & G_1 & \xrightarrow{d_1'} & G_0 & \to & 0 \end{array}$$

$\exists\, h_0 : F_0 \to G_1$ mit $\varphi_0 = d_1' h_0$ und $\varphi_1 = h_0 d_1$.

Da $\varepsilon' \circ \varphi_0 = f \circ \varepsilon = 0$ gilt $\mathrm{Bild}(\varphi_0) \subset \mathrm{Ker}(\varepsilon') = \mathrm{Bild}(d_1')$, und man kann h_0 durch Wahl von $h_0(x_i) \in G_1$ definieren, mit $\varphi_0 = d_1' \circ h_0$. Für $z \in F_1$ gilt dann

$d_1'(\varphi_1(z) - h_0 d_1(z)) = d_1'\varphi_1(z) - d_1' h_0 d_1(z) = d_1'\varphi_1(z) - \varphi_0 d_1(z) = 0$, und da $\mathrm{Ker}(d_1') = 0$ folgt $\varphi_1(z) = h_0 d_1(z)$.

<u>Wohldefiniertheit von $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$</u>: Seien nun zwei freie Auflösungen von M gewählt, und $\varphi., \psi.$ wie oben definiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & F_1 & \to & F_0 & \to & M & \to & 0 \\ & & \varphi_1 \downarrow \uparrow \psi_1 & & \varphi_0 \downarrow \uparrow \psi_0 & & \mathrm{id} \downarrow \uparrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & G_1 & \to & G_0 & \to & M & \to & 0 \end{array}$$

Aus der Eindeutigkeit folgen $\varphi.\psi \simeq \mathrm{id}_{G.}$ und $\psi \circ \varphi \simeq \mathrm{id}_F$.

Insbesondere, $\varphi. : F. \to G.$ ist eine Ketten-Homotopie-Äquivalenz, und ist eindeutig bis auf Homotopie. Sie induziert eine (bis auf Homotopie eindeutig bestimm.) Homotopie Äquivalenz $\varphi. \otimes \mathrm{id}_N : F.\otimes N \to G.\otimes N$, und auf H_1 ein kan. Isomorphismus $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N)_{(F.)} = H_1(F.\otimes N) \xrightarrow{\cong} H_1(G.\otimes N) = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(M,N)_{(G.)}$.

#

<u>3.18 Korollar</u>: Sei $N \in Ab$ gegeben; dann ist

$$\mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(-;N) : Ab \to Ab$$

ein additiver Funktor.

<u>Beweis</u>: Sei $M \xrightarrow{f} L$ ein Homomorphismus. Dann haben wir einen Morphismus von Auflösungen φ wie im Beweis von 3.17; Tensoriert man φ mit id_B so erhalten wir eine Abb. von ex. Folgen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(M,N) \arrow[r] \arrow[d, dotted, "f"] & F_1 \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1 \otimes id"] & F_0 \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0 \otimes id"] & M \otimes N \arrow[r] \arrow[d, "f \otimes id"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(L,N) \arrow[r] & G_1 \otimes N \arrow[r] & G_0 \otimes N \arrow[r] & L \otimes N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

mit einem Induzierten $f_* : \mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(M,N) \to \mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(L,N)$;
Da φ bis auf Homotopie Eindeutig bestimmt ist, hängt f_* nicht von der Wahl von φ ab.

Insbesondere, ist $g: M \to L$ einen anderen Morphismus, mit gewählten

$$\begin{tikzcd}
F_\cdot \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\psi_\cdot"] & M \arrow[d, "g"] \\
G_\cdot \arrow[r, "\varepsilon"] & L
\end{tikzcd}$$

, so kann man $\varphi_\cdot + \psi_\cdot$ für $f+g$ wählen:

$$\begin{tikzcd}
F_\cdot \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi_\cdot + \psi_\cdot"] & M \arrow[d, "f+g"] \\
G_\cdot \arrow[r, "\varepsilon"] & L
\end{tikzcd}$$

Daraus folgt $(f+g)_* = f_* + g_* : \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(L,N)$.
Die Funktorialität folgt aus einem ähnlichen Argument. #.

<u>3.19 Satz</u>: Sei $N \in Ab$ gegeben; der Funktor $\mathrm{Tor}^1_{\mathbb{Z}}(-;N) : Ab \to Ab$ besitzt die folgenden Eigenschaften (die ihn bis auf nat. Iso bestimmen)

(a) Sei $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ eine kurze exakte Folge in Ab. Dann ist

$$0 \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M',N) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M,N) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M'',N) \xrightarrow{\partial} M' \otimes N \to M \otimes N \to M'' \otimes N \to 0$$

exakt in Ab.

(b) Ist M torsionsfrei, so gilt $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M,N) = 0$.

(c) Wir haben einen natürlichen Iso $\bigoplus_i \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(M_i;N) \to \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(\bigoplus_i M_i;N)$.

Außerdem haben wir ein natürlicher Isomorphismus von Funktoren $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1 \Rightarrow \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1 \circ \tau : Ab \times Ab \to Ab$, so dass $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1(N,-) : Ab \to Ab$ analoge Eigenschaften besitzt.

Um den Satz zu beweisen benutzen wir folgendes Lemma:

3.20 Schlangen-Lemma: Sei gegeben ein kommutativen Diagramm von R-Moduln und linearen R-Abbildungen

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "f"] & B' \arrow[r, "p'"] \arrow[d, "g"] & C' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "p"] & C & \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen.

Dann ist die Folge

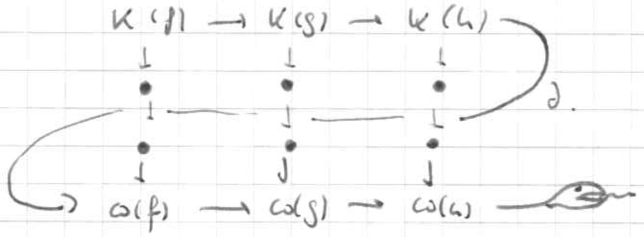
$$\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{i'} \mathrm{Ker}(g) \xrightarrow{p'} \mathrm{Ker}(h) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Coker}(f) \xrightarrow{i} \mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}(h)$$

exakt, wobei $\partial(x) = i^{-1} g(y)$ für $y \in B'$ mit $p(y) = x$.

Ausserdem, ist i' injektiv, so ist $\mathrm{Ker}(f) \to \mathrm{Ker}(g)$ auch injektiv, und ist p surjektiv, so ist $\mathrm{Coker}(g) \xrightarrow{p} \mathrm{Coker}(h)$ auch surjektiv.

Beweis: Jagd. Vergleiche "Snake Lemma" aus "It's My Turn", 1980.

Name:



#

Beweis von 3.19: Wir beweisen zuerst die letzte Aussage:

Seien $0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \to M \to 0$ und $0 \to G_1 \xrightarrow{i'} G_0 \to N \to 0$ zwei freie Auflösungen von M und N. Betracht das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\ 0 \arrow[r] & F_1 \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes G_1 \arrow[r] \arrow[d, "id_M \otimes i'"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & F_1 \otimes G_0 \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \otimes G_0 \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes G_0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & F_1 \otimes N \arrow[r, "i \otimes id_N"] \arrow[d] & F_0 \otimes N \arrow[r] \arrow[d] & M \otimes N & \\ & 0 & 0 & & \end{tikzcd}$$

Die zwei ersten Spalten (bzw. Zeilen) sind exakt, weil F_1 und F_0 (bzw. G_1 und G_0) frei also flach sind. Aus das Schlangen-Lemma haben wir also eine exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Ker}(id_M \otimes i') \xrightarrow{\partial} F_1 \otimes N \xrightarrow{i \otimes id_N} F_0 \otimes N,$$

woraus folgt: $\partial : \mathrm{Ker}(id_M \otimes i') \to \mathrm{Tor}_1^R(M,N)$ ist ein Iso.

Notieren wir $\overline{\mathrm{Tor}}(M,N)$ den Funktor, der durch

$\overline{\mathrm{Tor}}(M,N) = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_M \otimes i')$ für beliebige freie Auflösungen

$0 \to G_1 \xrightarrow{i'} G_0 \to N \to 0$ von N definiert, so liefert ∂ ein Iso

$$\partial : \mathrm{Tor}(M,N) \to \overline{\mathrm{Tor}}(M,N).$$

Wir erhalten also natürliche Isomorphismen

$$\mathrm{Tor}(M,N) \xrightarrow{\alpha} \overline{\mathrm{Tor}}(N,M) \xrightarrow{\partial} \mathrm{Tor}(N,M)$$

wobei der erste aus 3.6 (c) stammt. Nun zu den anderen Aussagen:

(a) Tensoriere $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ mit $G_1 \xrightarrow{i'} G_0$,

wobei $0 \to G_1 \xrightarrow{i'} G_0 \to N \to 0$ eine freie Auflösung ist. Die Folge ist die Schlange.

(b) Ebenso: M ist dann flach (Aufgabe 8.2), also

$$0 \to M \otimes G_1 \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes i} M \otimes G_0 \to M \otimes N \to 0$$ ist exakt,

also $\overline{\mathrm{Tor}}(M,N) = 0$, und ebenso $\mathrm{Tor}(M,N)$.

(c) Folgt aus der entspr. Eigenschaft für $\otimes$, Aufgabe 8.1 #.

<u>3.21 Ausblick</u>: Wir haben oben nur $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$ und $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$ bearbeitet. Ist R ein Ring, M ein rechter R-Modul und N ein linker R-Modul, so kann man genauso $M \otimes_R N \in \mathcal{A}b$ als Quotient des freien $\mathbb{Z}$-Modul auf $\{ m \otimes n \mid (m,n) \in M \times N \}$ durch die Relationen

$(m_1 + m_2) \otimes n = m_1 \otimes n + m_2 \otimes n$, $m \otimes (n_1 + n_2) = m \otimes n_1 + m \otimes n_2$,

$m \cdot r \otimes n = m \otimes r \cdot n$ $\quad \forall m, m_1, m_2 \in M$, $\forall n, n_1, n_2 \in N$, $\forall r \in R$ definieren;

Ebenso kann man $\mathrm{Tor}_*^R(M,N)$ definieren; der Hauptunterschied ist, dass Auflösung $\cdots \to P_n \to P_{n-1} \ldots \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \to 0$ durch freie (projektive) R-Moduln nicht mehr notwendiger $P_n = 0$ für $n > 1$ erfüllen; $\mathrm{Tor}_n^R(M,N) =: H_n(P_* \otimes N)$.

3.19 (a) gilt auch, aber die Folge geht links mit $\mathrm{Tor}_2^R, \ldots, \mathrm{Tor}_n^R$ weiter.

Nun beweisen wir die Formel der universellen Koeffizienten für $H_*(X;M)$. Wir haben eine freie Auflösung
$$0 \to B_{n-1}(X) \xrightarrow{i} Z_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \to 0$$ weil
B_{n-1}, Z_{n-1} als Unter-$\mathbb{Z}$-moduln des freien $\mathbb{Z}$-modul $S_{n-1}(X)$ frei sind.
Wir definieren $H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes M \xrightarrow{\alpha} H_n(X;M) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X;\mathbb{Z});M)$:
Sei $z_n \in S_n(X)$ ein Zykel, $m \in M$, so setze $\alpha([z]\otimes m) := [z\otimes m]$.
Ist $\sum \sigma_i \otimes m_i \in S_n(X)\otimes M$ ein Zykel, so definiere
$$\beta([\sum \sigma_i \otimes m_i]) = \sum_i d\sigma_i \otimes m_i \in B_{n-1}(X)\otimes M,$$
(wobei wir die Tor-Gruppe mit Hilfe der Auflösung
$$0 \to B_{n-1}(X) \xrightarrow{i} Z_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X;\mathbb{Z}) \to 0,$$ also als
$\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}^1(H_{n-1}(X;\mathbb{Z});M) = \mathrm{Ker}(i\otimes \mathrm{id}_M)$.

<u>3.22 Theorem</u> (Universelle Koeffizienten): Sei X ein Raum, M ein $\mathbb{Z}$-Modul. Die Homomorphismen α und β definieren eine (natürliche) kurze exakte Folge
$$0 \to H_n(X;\mathbb{Z})\otimes M \xrightarrow{\alpha} H_n(X;M) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X;\mathbb{Z});M) \to 0$$
Diese Folge spaltet (aber <u>nicht</u> natürlich).

<u>Beweis</u>: das Theorem gilt für ein beliebiges Kettenkomplex (C_*, d_*) von freien $\mathbb{Z}$-moduln, zum Beispiel $(S_*(X), d)$.
Wir haben eine kurze exakte Folgen von Kettenkomplexe von freien $\mathbb{Z}$-Moduln
$$0 \to Z_* \xrightarrow{j} C_* \xrightarrow{d} B_{*-1} \to 0$$
mit $Z_n = \mathrm{Ker}(d_n : C_n \to C_n)$, $B_{n-1} = \mathrm{Bild}(d_n : C_n \to B_{n-1})$,
und Z_* und B_{*-1} haben 0 als differential.
Da alle frei sind haben wir eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexe (verwende $-\otimes M$ Gradweise):
$$0 \to Z_*\otimes M \xrightarrow{j\otimes \mathrm{id}} C_*\otimes M \xrightarrow{d\otimes \mathrm{id}} B_{*-1}\otimes M \to 0$$
$d=0$ $\qquad d\otimes \mathrm{id}$ $\qquad d=0$.

Als Teil der langen exakte Folge in Homologie haben wir also

$$B_n \otimes \Pi \xrightarrow[\partial_{n+1}]{i\otimes id} Z_n \otimes \Pi \xrightarrow{j_*} H_n(C_*\otimes \Pi) \xrightarrow{d_*} B_{n-1}\otimes \Pi \xrightarrow[\partial_n]{i\otimes id} Z_{n-1}\otimes \Pi$$

Insbesondere $\operatorname{coker}(\partial\otimes id) = H_n(C)\otimes \Pi$.

Ausserdem, wir haben eine exakte Folge

wobei leicht zu sehen ist: $\partial_{n+1} = i\otimes id$, $i: B_n \hookrightarrow Z_n$.

$$Tor_1^{\mathbb{Z}}(Z_{n-1},\Pi) \to Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C),\Pi) \to B_{n-1}\otimes \Pi \xrightarrow{\partial\otimes id} Z_{n-1}\otimes \Pi$$

(Teil aus 3.19 (a)). Die Gruppe links ist 0, weil Z_{n-1} frei ist. Also zerfällt die obige Folge als

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "i\otimes id"] & Z_n\otimes\Pi \arrow[rr, "j_*"] \arrow[dr] & & H_n(C_*\otimes\Pi) \arrow[rr, "d_*"] \arrow[dr, "\beta"] & & B_{n-1}\otimes\Pi \arrow[r, "i\otimes id"] & {} \\
& & H_n(C)\otimes\Pi \arrow[ur, "\alpha"'] \arrow[dr] & & Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C),\Pi) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Damit ist der erste Teil bewiesen.

Spaltung: die kurze exakte Folge
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r] & C_n \arrow[r, "d"'] & B_{n-1} \arrow[r] \arrow[l, dashed, bend right, "s"'] & 0
\end{tikzcd}$$
spaltet, da B_{n-1} frei ist. Wähle $s: B_{n-1}\to C_n$ mit $ds = id_{B_{n-1}}$; Dann betrachte $s\otimes id: B_{n-1}\otimes M \to C_n\otimes\Pi$. Offensichtlich $s\otimes id(\ker(i\otimes id)) \subset Z_n(C_*\otimes\Pi)$, was uns einen Schnitt

$$\begin{aligned} Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(C),\Pi) &\to H_n(C_*\otimes\Pi) \\ \ker(i\otimes id) \ni k &\mapsto [(s\otimes id)(k)] \end{aligned}$$

definiert. #

3.23 Bemerkung: Insbesondere haben wir zu jedem Raum X und $\mathbb{Z}$-Modul Π einen Isomorphismus

$$H_n(X;\Pi) \cong (H_n(X;\mathbb{Z})\otimes M) \oplus Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X;\mathbb{Z}),\Pi)$$

(Nicht-natürlich: Ist $f: X\to Y$ eine Abbildung, so erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
H_n(X;\Pi) \arrow[d, "f_*"] & \cong & H_n(X;\mathbb{Z})\otimes\Pi \arrow[d, "f_*\otimes id"'] & \oplus & Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(X;\mathbb{Z});\Pi) \arrow[d, "f_*"] \arrow[dll, dashed] \\
H_n(Y;\Pi) & \cong & H_n(Y;\mathbb{Z})\otimes\Pi & \oplus & Tor_1^{\mathbb{Z}}(H_{n-1}(Y;\mathbb{Z}),\Pi)
\end{tikzcd}$$

3.24 Bemerkungen (a) Wenn M torsionsfrei (i.e. flach) ist, so ist $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(-,M) = 0$, und $\alpha : H_n(-,\mathbb{Z}) \otimes M \to H_n(-;M)$ ist ein natürlicher Isomorphismus. Insbesondere definiert $X \mapsto H_*(X;\mathbb{Z}) \otimes M$ eine Homologie Theorie. Ist N nicht flach, so ist $X \mapsto H_*(X;\mathbb{Z}) \otimes N$ keine Homologie Theorie: das Exaktheitsaxiom gilt nicht mehr.

(b) Ist R ein Ring, so haben $S_n(X) \otimes R$ und $H_n(X;R)$ die Struktur eines R-Moduls. Von besonderem Interesse sind die Fälle $R = \mathbb{Q}$ und $R = \mathbb{F}_p$, mit $H_*(X;\mathbb{Q})$ und $H_*(X;\mathbb{F}_p)$ graduierte $\mathbb{Q}$- (bzw. $\mathbb{F}_p$) Vektorräume.

3.25 Lemma Sei $E = 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ eine kurze exakte Folge in $\mathcal{A}b$. Dann haben wir eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen $0 \to S_*(X) \otimes A \xrightarrow{id \otimes f} S_*(X) \otimes B \xrightarrow{id \otimes g} S_*(X) \otimes C \to 0$, und eine entsprechende lange exakte Folge in Homologie eines Raumes X, die natürlich ist:

$$\cdots \xrightarrow{\partial_E} H_n(X,A) \xrightarrow{f} H_n(X,B) \xrightarrow{g} H_n(X,C) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(X,A) \xrightarrow{i} \cdots$$

(Ebenso für Paare von Räumen).

Beweis: Klar, weil $S_n(X)$ frei ist, also ist $S_n(X) \otimes -$ exakt.

3.26 Bemerkung: ∂_E hängt von E ab, und nicht nur von A und C; zum Beispiel: $E : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p\cdot} \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p \to 0$, so gilt $\partial_E \neq 0$; $F : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i_1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p$, so gilt $\partial_F = 0$!

3.27 Definition: Sei p eine Primzahl, und betrachte die kurze exakte Folge $E : 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{j} \mathbb{F}_p \to 0$. Der ($p$-primäre) Bockstein Homom. $\beta : H_n(X,A;\mathbb{F}_p) \to H_{n-1}(X,A;\mathbb{F}_p)$ ist als die Verknüpfung $H_n(X,A;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\partial_E} H_{n-1}(X,A;\mathbb{Z}) \xrightarrow{j} H_{n-1}(X,A;\mathbb{F}_p)$ definiert.

3.28 Lemma: Der Bockstein Homomorphismus definiert eine natürliche Transformation von Funktoren $\beta: H_n(-,\mathbb{F}_p) \Rightarrow H_{n-1}(-,\mathbb{F}_p): Top^2 \to \mathbb{F}_p\text{-Mod}$.

Beweis: folgt aus 3.25. #

3.29 Bemerkung: weitere Eigenschaften: siehe Aufgabe 9.4.
Der Bockstein anreichert die Struktur, die auf $H_*(-;\mathbb{F}_p)$ vorhanden ist. Es ist auch das erste Differential in der Bockstein Spektral sequenz, die in guten Fällen $H_*(X;\mathbb{Z}_p^\wedge)$ oder $H_*(X;\mathbb{Z}_{(p)})$ bestimmt.

Nun möchten wir eine Formel für $H_*(X\times Y;R)$ bezüglich $H_*(X;R)$ und $H_*(Y;R)$ bestimmen: die Künneth-Formel. Hier ist $R=\mathbb{Z}, \mathbb{F}_p, \mathbb{Q}$, oder allgemeiner ein Hauptideal Ring. Jeder Modul M über solchem Ring hat eine freie Auflösung $0\to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \to M \to 0$, und wir definieren $\mathrm{Tor}_1^R(M,N) = \mathrm{Ker}(F_1\otimes N \xrightarrow{i\otimes id} F_0\otimes N)$. Es gilt $\mathrm{Tor}_n^R=0$ für $n\geq 2$, und die Lemma 3.17, 3.18: $\mathrm{Tor}_1^R(-;N): R\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$, 3.19 gelten genauso. (Meistens: $R=\mathbb{Z}$ oder ein Körper).

3.30 Definition Seien $(C_\bullet,d)$ und $(D_\bullet,d)$ zwei Kettenkx von R-Moduln. Wir definieren das Tensorprodukt

$$(C_\bullet\otimes_R D_\bullet, d) \text{ von } (C_\bullet, d') \text{ und } (D_\bullet, d'')$$

als $(C_\bullet\otimes_R D_\bullet)_n = \bigoplus_{i+j=n} C_i\otimes_R D_j$, und

$$d_n: C_i\otimes_R D_j \to (C_{i-1}\otimes_R D_j)\oplus(C_i\otimes_R D_{j-1})$$
$$x\otimes y \mapsto d'(x)\otimes y + (-1)^i x\otimes d''(y).$$

Dann ist $(C_\bullet\otimes_R D_\bullet, d)$ ein Kettenkomplex: $d^2=0$:

$$d_{n-1}\circ d_n\big|_{C_i\otimes D_j} = (-1)^{i-1} d'\otimes d'' + (-1)^i d'\otimes d'' = 0.$$

3.31 Bemerkungen: (a) Vorzeichen $(-1)^i$ konsequent zu führen ist oft eine Schwierigkeit der Homologischen Algebra.
Die Koszul Vorzeichen Konvention: wenn zwei Ausdrücke x, y von Grad $|x|, |y| \in \mathbb{Z}$ transponiert werden, so entsteht einen Vorzeichen $(-1)^{|x||y|}$. In der obigen Formel: $\underbrace{-i \equiv i}_{|d||x|}$
$|d| = -1$, $|x| = 1$; $d(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)\, x \otimes d(y)$

(b) Seid $C. \xrightarrow{f} C'.$ und $D. \xrightarrow{g} D'.$ zwei Morph. von Kettenkxen, definiere $f \otimes_R g : C. \otimes D. \to C'. \otimes D'.$ durch $(f \otimes_R g)_n = \bigoplus_{i+j=n} f_i \otimes g_j$; es ist ein Morphismus von Ketten Komplexen; die Funktorialität ist klar. Außerdem ist $\otimes$ verträglich mit Ketten-Homotopien: $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$
$\Rightarrow f \otimes g \simeq f' \otimes g' : C. \otimes D. \to C'. \otimes D'.$.

3.32 Definition + Lemma: Der Homomorphismus
$$\alpha : H_*(C.) \otimes H_*(D.) \longrightarrow H_*(C. \otimes d)$$
bestimmt durch $\alpha([z] \otimes [\omega]) = [z \otimes \omega]$
(für $z \in Z_i(C)$, $\omega \in Z_j(D.)$) ist wohldefiniert und natürlich. (Hier: $H_*(C.)$ Kettenkx mit $d = 0$).
Beweis: Klar! Zum Beispiel Wohldefiniert:
$\alpha([z + d'a] \otimes [\omega + d''\beta]) = [z \otimes \omega + d(a \otimes \omega + (-1)^{|z|} z \otimes \beta$
$+ a \otimes d\beta)] = [z \otimes \omega]$. #

3.33 Theorem (Algebraische Künneth Formel): Sei R ein HID, $C.$ und $D.$ Ketten-komplexen von freien R-Moduln.
Dann existiert eine natürliche, kurze exakte Folge
$$0 \to \bigoplus_{i+j=n} H_i(C) \otimes H_j(D) \xrightarrow{\alpha} H_n(C \otimes D) \xrightarrow{\beta} \bigoplus_{k+l=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_k(C), H_l(D)) \to 0$$
Diese Folge spaltet (unnatürlich).

Beweis: (A) Falls das Differential d' von C Null ist, dann ist α ein Isomorphismus:

(i) Nehmen wir an, $C_\bullet = \varepsilon_\bullet^m$, wobei $\varepsilon_n^m = \begin{cases} R & m=n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$.

Dann ist $\alpha_n : H_{n-m}(D_\bullet) \longrightarrow H_n(\varepsilon^m \otimes D_\bullet) = H_{n-m}(D_\bullet)$

ein Isomorphismus.

(ii) Allgemein ist $C_\bullet$ eine direkte Summe von solchen $\varepsilon_\bullet$, und α ist verträglich mit direkten Summen.

(B) Allgemeiner Fall: wir haben eine kurze exakte Folge von Kettenkomplexen wie im Beweis von 3.22:

$$0 \to Z_* \xrightarrow{i} C_* \xrightarrow{d} B_{*-1} \to 0$$

wobei Z_* und B_{*-1} Differential 0 haben.

Dank Freiheit von B_{*-1} (oder D_*)

$$0 \to Z_* \otimes D_* \xrightarrow{i\otimes 1} C_* \otimes D_* \xrightarrow{d \otimes 1} B_{*-1} \otimes D_* \to 0$$

auch exakt. Betrachte die entspr. lange exakte Folge

$$(*)\quad H_{n+1}(B_{*-1} \otimes D_*) \xrightarrow{\partial} H_n(Z_\bullet \otimes D_*) \xrightarrow{(i\otimes id)} H_n(C_\bullet \otimes D_\bullet) \xrightarrow{d\otimes 1} H_n(B_{*-1} \otimes D_*) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(Z_\bullet \otimes D_\bullet)$$

Wie in 3.22 ist es leicht zu prüfen, dass $\partial = (j \otimes id)_*$ wobei

$$j : (B_{*-1})_{k+1} = B_k \hookrightarrow Z_k$$

Dank der Natürlichkeit von α haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(B_{*-1} \otimes H_* D_\bullet)_n \arrow[r, "j\otimes 1"] \arrow[d, "\alpha"', "\cong"] & (Z_* \otimes H_* D)_n \arrow[d, "\alpha", "\cong"'] \\
H_n(B_{*-1} \otimes D_*) \arrow[r, "\partial"] & H_n(Z_* \otimes D_*)
\end{tikzcd}$$

mit α ein Iso dank (A).

Wir haben Iso's $(H_* C \otimes H_* D)_n = \operatorname{coker}(j \otimes 1) \underset{\cong}{\xrightarrow{\alpha}} \operatorname{coker}(\partial)$

und $\bigoplus_{k+l=n-1} \operatorname{Tor}(H_k C, H_l D) = \ker(j \otimes 1) \underset{\cong}{\xrightarrow{\alpha}} \ker(\partial)$.

Setzt man das in $(*)$ ein, so erhält man die gesuchte exakte Folge.

Retraktion: $C.$ und $D.$ sind frei; man wähle Abbildungen von Ketten-Komplexen $\tau: C. \to H.(C.)$, $\tau': D. \to H.(D.)$ die die Identität in Homologie induzieren ($H.(C.)$ und $H.(D.)$ haben Differential $= 0$): τ existiert weil

$$0 \to Z_n \underset{\xleftarrow{t}}{\to} C_n \underset{\xleftarrow{s}}{\to} B_{n-1} \to 0$$ spaltet, und t induziert τ (ebenso τ')

Nun definiere $r_*: H_*(C. \otimes_R D.) \to H_*(C) \otimes_R H_*(D)$ als $H_*(\tau \otimes \tau')$. Offensichtlich gilt $r \circ \alpha = id_{H_*(C) \otimes H_*(D)}$.

#

Nun zeigen wir: Wir haben eine natürliche (bis auf Homotopie eindeutige) Ketten-Homotopie-Äquivalenz $S_*(X \times Y) \rightleftarrows S_*(X) \otimes S_*(Y)$: das Eilenberg-Zilber Theorem. Idee: reduziere zum Fall wo $X, Y \in \{\Delta^p \mid p \in \mathbb{N}\}$ Standard-Simplizen sind. Dieser Trick ist als "Azyklische Modelle" bekannt.

3.34 Definition: Sei $C \xrightarrow{F} Ab$ ein Funktor. Sei $\mathcal{M} \subset Ob(C)$ eine Menge von Objekten in C. Wir sagen, dass F <u>frei mit Modellen in $\mathcal{M}$</u> ist, falls eine Index Menge J existiert, $J \to \mathcal{M}$, $j \mapsto M_j$, und eine Familie von Elementen

$$\{ m_j \in F(M_j) \mid j \in J\}$$

existiert, so dass $\{ \sigma_*(m_j) \mid j \in J, \sigma \in C(M_j, X)\}$ eine Basis von $F(X)$ für alle $X \in Ob(C)$ ist (Insbesondere ist $F(X)$ frei für alle $X \in C$!). Die Familie $\{m_j \mid j \in J\}$ heißt eine <u>Basis von F</u>.

3.35 Beispiele (a) Der singulären n-Ketten Funktor $S_n: Top \to Ab$ ist frei mit Modellen in $\{\Delta^n\}$ und Basis $\{ i_n = id_{\Delta^n} \in S_n(\Delta^n)\}$: per Definition von S_n!

(b) Der Funktor $S_n(- \times -): Top \times Top \to Ab$, $(X,Y) \mapsto S_n(X \times Y)$ ist frei mit Modellen in $\{\Delta^n \times \Delta^n\}$ und Basis $\{(i_n, i_n) \in S_n(\Delta^n \times \Delta^n)\}$
$x \mapsto (x,x) \; \forall x \in \Delta^n$.

(c) Der Funktor $(S_*(-) \otimes S_*(-))_n : Top \times Top \to Ab$ mit

$$(X,Y) \mapsto \bigoplus_{p+q=n} S_p(X) \otimes S_q(Y)$$

ist frei mit Modellen in $\{\Delta^p \times \Delta^q \mid p+q=n\} \subset Top \times Top$, und Basis $\{i_p \otimes i_q \in S_p(X) \otimes S_q(Y) \mid p+q=n\}$.

<u>3.36 Lemma</u>: Sei $F : \mathcal{C} \to Ab$ ein freier Funktor mit Modellen in $\mathcal{M}$ und Basis $\{m_j \in F(M_j) \mid j \in J\}$. Sei $H : \mathcal{C} \to Ab$ ein Funktor.

(a) Eine Familie von Elementen $\{n_j \in H(M_j)\}$ bestimmt eine eindeutige nat. Transformation $\eta : F \Rightarrow H$ mit $\eta_{M_j}(m_j) = n_j \ \forall j \in J$; (und umgekehrt, $\eta : F \Rightarrow H$ bestimmt $n_j = \eta_{M_j}(m_j)$).

(b) Im Fall wo $\mathcal{M}$ eine kleine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ist, und $\eta : F|_{\mathcal{M}} \Rightarrow H|_{\mathcal{M}}$ eine nat. Trafo, so hat $\eta_{\mathcal{M}}$ eine eindeutige Erweiterung $\eta : F \Rightarrow H$.

<u>Beweis</u>: Es genügt zu zeigen: $\{n_j \in H(M_j)\}$ gegeben, $X \in \mathcal{C}$, definiere $\eta_X : F(X) \to G(X)$ als $\eta_X(F(\sigma)(m_j)) = H(\sigma)(n_j)$, $\forall \sigma \in \mathcal{C}(M_j, X)$, $\forall j \in J$. Da $F(X)$ frei auf $\{F(\sigma)(m_j)\}$ ist, ist das wohldefiniert. Ausserdem kommutiert das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ H(X) & \xrightarrow{H(f)} & H(Y) \end{array}$$

für alle $f \in \mathcal{C}(X,Y)$: denn auf Basiselementen in $F(X)$ gilt $H(f) \circ \eta_X(F(\sigma) m_j) = H(f) H(\sigma)(n_j)$

$= H(f\sigma)(n_j) = \eta_Y(F(f\sigma) m_j) = \eta_Y \circ F(f)(F(\sigma)(m_j))$.

Rest ist dann klar. #

Das obige Lemma begründet also, warum man solchen F als "frei" benennen darf. Hier eine Variante mit "Auflösung":

<u>3.37 Lemma</u>: Sei $F_1 \overset{i}{\Rightarrow} F_0 \Rightarrow G \Rightarrow 0$ eine "exakte" Folge von natürlichen Transformationen von Funktoren $\mathcal{C} \to Ab$ (also: Auf jedem $X \in \mathcal{C}$ ist die ausgewertete Folge exakt in Ab). Sei angenommen, F_i ist frei mit Modellen in volle kl. Unterkategorien $\mathcal{M}_i \subset \mathcal{C}$, $i = 0,1$; Sei $H : \mathcal{C} \to Ab$ ein Funktor, mit folgenden Bedingung:

$$(*)\begin{cases} \text{Für alle } M \in \mathcal{M}_1 \text{ mit } H(M) \neq 0, \text{ und für alle} \\ x \in H(M) \setminus 0, \quad \exists\ g : M \to N \text{ in } C, \text{ mit } N \in \mathcal{M}_0 \\ \text{und } H(g)(x) \neq 0. \end{cases}$$

Dann besitzt jede natürliche Transformation $\eta : G|_{\mathcal{M}_0} \Rightarrow H|_{\mathcal{M}_0}$ eine eindeutige Erweiterung $\bar{\eta} : G \Rightarrow H$.

(Bemerkung: (*) gilt automatisch, falls $\mathcal{M}_1 \subseteq \mathcal{M}_0$).

<u>Beweis</u>: (a) Eindeutigkeit: seien $\eta, \nu : G \Rightarrow H$ mit $\eta|_{\mathcal{M}_0} = \nu|_{\mathcal{M}_0}$. Dann gilt $\eta \circ \pi|_{\mathcal{M}_0} = \nu \circ \pi|_{\mathcal{M}_0} : F|_{\mathcal{M}_0} \Rightarrow H|_{\mathcal{M}_0}$, also $\eta \circ \pi = \nu \circ \pi$ dank 3.36 (b).

Aber wir haben
$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[rr, two heads, "\pi_x"] \arrow[dr, "\eta\pi,\, \nu\pi"'] & & G(x) \arrow[dl, "\eta,\nu"] \\ & H(x) & \end{tikzcd}$$
mit π_x surjektiv $\forall x$, also $\eta = \nu$.

(b) Existenz: Betrachte das Diagramm:
$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, Rightarrow, "i"] \arrow[d, Rightarrow, "0"'] & F_0 \arrow[r, Rightarrow, "\pi"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu"'] & G \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, dotted, "\bar\eta"] & 0 \\ 0 \arrow[r, Rightarrow] & H \arrow[r, Rightarrow, "id"] & H \arrow[r, Rightarrow] & 0 \end{tikzcd}$$
Die mittlere Transformation μ mit $\mu|_{\mathcal{M}_0} = \eta \circ \pi|_{\mathcal{M}_0}$ existiert, weil F_0 frei mit Modellen in $\mathcal{M}_0$ ist (3.36 (b)). Es genügt zu zeigen: $\mu \circ i = 0$ ($\equiv$ das linke Quadrat kommutiert); dann ist $\bar{\eta}_x : G(x) \to H(x)$ als Kokernel definiert.

Seien $M \in \mathcal{M}_1$, $N \in \mathcal{M}_0$, $g : M \to N$ in C. Wir haben ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd} F_1(M) \arrow[r, "i_M"] \arrow[d, "g_*"] & F_0(M) \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[d, "g_*"] & H(M) \arrow[d, "g_*"] \\ F_1(N) \arrow[r, "i_N"] & F_0(N) \arrow[r, "\mu_N"] \arrow[dr, "\pi_N"'] & H(N) \\ & & G(N) \arrow[u, "\eta_N"'] \end{tikzcd}$$
(Unteren Dreieck: $N \in \mathcal{M}_0$!)

Aus $\pi_N \circ i_N = 0$ folgt $g_* \circ \mu_M \circ i_M : F_1(M) \xrightarrow{0} H(N)$.

Sei angenommen $\mu_M \circ i_M \neq 0$ für ein $M \in \mathcal{M}_1$; wähle $y \in F_1(M)$ mit $x = \mu_M \circ i_M(y) \in H(M) \setminus 0$; Es gilt $g_*(x) = 0$ $\forall\ g : M \to N$ mit $N \in \mathcal{M}_0$, ↯ (*). Also $\mu \circ i|_{\mathcal{M}_1} = 0$ und es folgt $\mu \circ i$ weil F_1 frei mit Modellen in $\mathcal{M}_1$ ist. #

3.38 Lemma: Sei gegeben ein komm. Diagramm von nat. Transf. von Funktoren $C \to Ab$, wobei F_2 frei mit Modellen in einer kl. volle Unterkat. $\mathcal{M} \subset C$ ist. Ferner sei angenommen,

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, Rightarrow, "\tau_2"] \arrow[d, dashed, Rightarrow, "?"'] & F_1 \arrow[r, Rightarrow, "\tau_1"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta_1"] & F_0 \arrow[d, Rightarrow, "\eta_0"] \\ G_2 \arrow[r, Rightarrow, "\sigma_2"] & G_1 \arrow[r, Rightarrow, "\sigma_1"] & G_0 \end{tikzcd}$$

es gelten $\tau_1 \circ \tau_2 = 0$ und $G_2|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sigma_2} G_1|_{\mathcal{M}} \xrightarrow{\sigma_1} G_0|_{\mathcal{M}}$ ist exakt.
Dann existiert $\eta_2 : F \Rightarrow H_2$ mit $\sigma_2 \eta_2 = \eta_1 \tau_2$.

Beweis: Sei $\{m_j\}$ eine Basis von F_2; wähle $u_j \in G_2(M_j)$ mit $\sigma_{2,M_j}(u_j) = \eta_{1,M_j} \circ \tau_{2,M_j}(m_j)$ (Jagd wie in 3.17). Verwende dann 3.36 für F_2, G_2. #

3.39 Theorem (Azyklische Modelle): Seien $F_\bullet, G_\bullet : C \to K_{\geq 0}$ zwei Funktoren, mit $K_{\geq 0}$ die Kateg. der Kettenkomplexe $(\cdots \xrightarrow{d} M_2 \xrightarrow{d} M_1 \xrightarrow{d} M_0)$ von Ab. Gruppen. Sei angenommen, wir haben kleine volle Unterkat. $\mathcal{M}_n \subset C$, $n \geq 0$, mit

(a) F_n ist frei mit Modellen in $\mathcal{M}_n$, $\forall n \geq 0$

(b) $H_n(G_\bullet(M)) = 0$ für alle $M \in \mathcal{M}_n, \mathcal{M}_{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

Dann ist jede natürliche Transformation

$$\eta : H_0(F_\bullet(-)) \Rightarrow H_0(G_\bullet(-))$$

induziert (auf H_0) von einer (bis auf natürliche Ketten-Homotopie) eindeutigen natürlich Transform. $f: F_\bullet \Rightarrow G_\bullet$.

Beweis: Existenz von f:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & F_2 \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "f_2"] & F_1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "f_1"] & F_0 \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, dashed, "f_0"] & H_0 F_0 \arrow[r] \arrow[d, Rightarrow, "\eta"] & 0 \\ \cdots \arrow[r] & G_2 \arrow[r, "d"'] & G_1 \arrow[r, "d"'] & G_0 \arrow[r, "\varepsilon"'] & H_0 G_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Verwende 3.38 schrittweise.
Die Exaktheitsbedingung in 3.38 (um f_{n+1} zu gewinnen, falls f_m, $m \leq n$ definiert ist) ist genau $H_n(G_\bullet(M)) = 0$ $\forall M \in \mathcal{M}_{n+1}$.

Eindeutigkeit von f: wie in 3.17: Sei $f: F_\bullet \to G_\bullet$ mit $H_0(f) = 0$; wir suchen eine Null-Homotopie für f: $\{h_k : F_k \to G_{k+1}\}_{k \geq 0}$ mit $d h_k + h_{k-1} d = f_k$; Induktion auf k mit $h_{-1} = 0$; Ist h_m für $m \leq n-1$ konstruiert, So verwende 3.38 auf: Exaktheitsbedingung entspr. $H_n(G(M)) = 0 \ \forall\, M \in \mathcal{M}_n$.

$$\begin{tikzcd} F_n \arrow[r, "id"] \arrow[d, dashed, "h_n"] & F_n \arrow[r] \arrow[d, "f_n - h_n d"] & 0 \arrow[d] \\ G_{n+1} \arrow[r, "d"] & G_n \arrow[r, "d"] & G_{n-1} \end{tikzcd}$$

#

<u>3.40 Theorem</u> (Eilenberg - Zilber): Betrachte die Funktoren $S.(-) \otimes S.(-)$, $S.(- \times -): Top \times Top \to K_{\geq 0}$. Dann haben wir (bis auf Homotopie) eindeutige natürliche Transformationen

$$\phi: S.(\ ) \otimes S.(\ ) \rightleftarrows S.(- \times -) : \psi$$

mit $\phi_0(i_0 \otimes i_0) = (i_0, i_0)$, $\psi_0(i_0, i_0) = i_0 \otimes i_0$, für $i_0 = (\Delta^0 \xrightarrow{id} \Delta^0) \in S_0(\Delta^0)$; ϕ und ψ sind homotopie Äquivalenzen, inverse zu einander: wir haben natürliche Ketten-Homotopien $\phi \circ \psi \simeq id$, $\psi \circ \phi \simeq id$.

<u>Beweis</u>: (A) Sei $F. = S.(-) \otimes S.(-)$, und $G. = S.(- \times -)$.

F_n ist frei mit Modellen in $\{\Delta^p \times \Delta^q \mid p+q = n\} = \mathcal{M}_n$

G_n ——— " ——— $\{\Delta^n \times \Delta^n\} = \mathcal{M}'_n$

Da $\Delta^m \times \Delta^l$ zusammenziehbar ist, sind $H_n F.$ und $H_n G.$ null für $n > 0$ auf alle Modellen in sicht.

(B) Die Formeln für $\phi(i_0 \otimes i_0)$ und $\psi(i_0, i_0)$ bestimmen

$$\tilde{\eta}^\phi : H_0(F.(\ ))\big|_{\mathcal{M}_0} \to H_0(G.(\ ))\big|_{\mathcal{M}_0} \quad \text{und}$$

$$\tilde{\eta}^\psi : H_0(G.(\ ))\big|_{\mathcal{M}_0'} \to H_0(F.(\ ))\big|_{\mathcal{M}_0'} .$$

Die Voraussetzungen von 3.37 sind erfüllt, so dass $\tilde{\eta}^\phi$ und $\tilde{\eta}^\psi$ eindeutige nat. Transfo $\eta^\phi: H_0(F.(\ )) \rightleftarrows H_0(G.(\ )): \eta^\psi$ bestimmen: zum Beispiel für η^ϕ:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r] & F_0 \arrow[r] & H_0 F. \arrow[d] \\ & & H_0 G. \end{tikzcd}$$

F_i frei mit Modellen in $\mathcal{M}_i$, $i = 0, 1$.

Die Bedingung (*) ist erfüllt:

$$\underset{\mathcal{M}_1}{\underset{\cap}{H_0 G(\Delta^p \times \Delta^q)}} \xrightarrow[g_*]{\cong} \underset{\mathcal{M}_0}{\underset{\cap}{H_0 G(\Delta^0 \times \Delta^0)}}, \text{ für das eingige } g: \Delta^p \times \Delta^q \to \Delta^0 \times \Delta^0$$

Nun können wir 3.39 verwenden und gewinnen $\phi_\cdot : F_\cdot \rightleftarrows G_\cdot : \psi_\cdot$ eindeutig bis auf natürliche Homotopien, die auf H_0 die obigen $\eta^\phi : H_0(F_\cdot) \rightleftarrows H_0(G_\cdot) : \eta^\psi$ induzieren. Außerdem

$$\eta^\psi \circ \eta^\phi = id_{H_0(F_\cdot)}, \quad \text{also } \psi \circ \phi \simeq id_F$$
$$\eta^\phi \circ \eta^\psi = id_{H_0(G_\cdot)}, \quad \text{also } \phi \circ \psi \simeq id_F$$

(Erste Gleichheit ist die Eindeutigkeit in 3.37, die zweite $\simeq$ ist die Eindeutigkeit bis auf nat. Homotopie in 3.39). #

In 3.40 werden ϕ und ψ nicht explizit gegeben; manchmal ist es nützlich, konkrete Konstruktionen für ϕ und ψ zu haben.

<u>3.41 Definition</u>: Seien X, Y Räume, $n \geq 0$. Definiere den <u>Alexander-Whitney</u> Homomorphismus

$$AW_n : S_n(X \times Y) \to (S_\cdot(X) \otimes S_\cdot(Y))_n, \quad (\sigma, \tau) \mapsto \sum_{p+q=n} (\sigma \circ a^n_p) \otimes (\tau \circ b^n_q)$$

wobei $a^n_p : \Delta^p \to \Delta^n, \; e_i \mapsto e_i, \; 0 \leq i \leq p$

$b^n_q : \Delta^q \to \Delta^n, \; e_i \mapsto e_{n-q+i}, \; 0 \leq i \leq q$

und affin erweitert, wobei $(e_0, \dots, e_k)$ die standard Ecken von Δ^k sind.

<u>3.42 Definition</u>: Seien $p, q \geq 0$, $p+q = n$. Ein <u>(p,q)-Shuffle</u> ist ein $\pi \in \Sigma_n$, der monoton wachsend auf $\{1, \dots, p\}$ und $\{p+1, \dots, p+q\}$ ist: $\pi(1) < \dots < \pi(p)$ und $\pi(p+1) < \dots < \pi(p+q)$

(also ist π eindeutig durch $\{\pi(1), \dots, \pi(p)\}$ als (ungeordnete) Menge bestimmt: $\# \Sigma_{p,q} = \binom{p+q}{p}$).

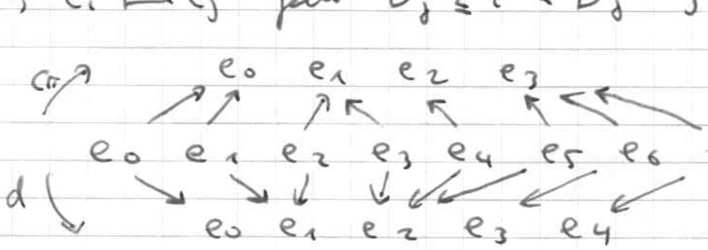
Seien $0 = \mu_0 < \mu_1 = \pi(1) < \dots < \mu_p = \pi(p) < \mu_{p+1} = p+q+1$

$0 = \nu_0 < \nu_1 = \pi(p+1) < \dots < \nu_q = \pi(p+q) < \nu_{q+1} = p+q+1$

Definiere
$$\left.\begin{aligned} c_\pi &: \Delta^{p+q} \to \Delta^p, \; e_i \mapsto e_j \text{ falls } \mu_j \leq i < \mu_{j+1} \\ d_\pi &: \Delta^{p+q} \to \Delta^q, \; e_i \mapsto e_j \text{ falls } \nu_j \leq i < \nu_j \end{aligned}\right\} \text{affin}$$
erweitert.

(Beispiel: $p+q = 3+4$,

$\mu_1 = 2, \mu_2 = 4, \mu_3 = 5$



Seien X, Y Räume und $n \geq 0$. Definiere den Shuffle-Homomor.
$Sh_n : (S.(X) \otimes S.(Y))_n \longrightarrow S_n(X \times Y)$ durch $Sh_n = \bigoplus_{p+q=n} Sh_{p,q}$
mit $Sh_{p,q} : S_p(X) \otimes S_q(X) \longrightarrow S_n(X \times Y)$

$$(\sigma \otimes \tau) \longmapsto \sum_{\pi \in \Sigma_{p,q}} \mathrm{Sign}(\pi)\,(\sigma \circ c_\pi, \tau \circ d_\pi).$$

<u>3.43 Satz</u>: $AW.$ und $Sh.$ sind Homomorphismen von Ketten-komplexen, natürlich in (X,Y), und sind Ketten-Homotopie Äquivalenzen inverse zueinander.

<u>Beweis</u>: Der Beweis, dass $AW_{n-1} \circ d = d \circ AW_n$ und $Sh_{n-1} \circ d = d \circ Sh_n$ für alle $n \geq 0$ ist eine etwas längliche aber direkte Berechnung. Die sparen wir uns hier.
Dank der Eindeutigkeit in 3.40 genügt es zu zeigen, dass
$Sh_{0,0}(i_0 \otimes i_0) = (i_0, i_0)$ und $AW_0(i_0, i_0) = i_0 \otimes i_0$,
was direkt aus der Definition von $Sh.$ und $AW.$ folgt. #

<u>3.44 Theorem</u> (Künneth-Formel für singuläre Homologie):
Seien X, Y Räume; Sei R ein Hauptidealring, und seien
$\Phi : S_*(X;R) \otimes_R S_*(Y;R) \rightleftarrows S_*(X \times Y;R) : \Psi$ Eilenberg-Zilber-Äquivalenzen. Dann ist die kurze Folge

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X;R) \otimes_R H_q(Y;R) \xrightarrow{\times} H_n(X \times Y;R) \xrightarrow{\mu} \bigoplus_{k+l=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_k(X;R), H_l(Y;R)) \to 0$$

natürlich und exakt, wobei $\times = \Phi_* \circ \alpha$ und $\mu = \beta \circ \Psi_*$, mit α und β wie in Theorem 3.33.
Die Folge spaltet, aber unnatürlich (Vergleiche Aufgabe 10.2).

<u>Beweis</u>: Folgt aus der Algebraische Künneth Formel 3.33 und Eilenberg Zilber 3.40. #

<u>3.45 Korollar</u>: Ist F ein Körper, so ist
$H_*(X,F) \otimes H_*(Y,F) \xrightarrow{\times} H_*(X \times Y, F)$ ein Isomorphismus.

(Man sagt, dass $H_*(-;F)$ den Künneth-Isomorphismus erfüllt).

3.46 Definition: Der natürliche Homomorphismus
$$\times:\ H_*(X;R)\otimes_R H_*(Y;R)\longrightarrow H_*(X\times Y;R)$$
aus 3.44 heißt das externe Homologie-Produkt oder das Kreuz-Produkt (in Homologie).

3.47 Lemma: Das externe Homologie-Produkt hat folgenden Eigenschaften: (a) Natürlichkeit

(b) Kommutativität:
$$\begin{tikzcd} H_*(X)\otimes_R H_*(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\tau"'] & H_*(X\times Y) \arrow[d, "t_*"] \\ H_*(Y)\otimes_R H_*(X) \arrow[r, "\times"] & H_*(Y\times X) \end{tikzcd}$$
Es gilt $t_*(\alpha\times\beta)=(-1)^{|\alpha||\beta|}\beta\times\alpha$ in $H_*(Y,X)$

(Hier notieren wir $\alpha\times\beta:=\ \times(\alpha\otimes\beta)$, $\alpha\otimes\beta\in H_*(X)\otimes_R H_*(Y)$).

(c) Assoziativität: $H_*(X)\otimes_R H_*(Y)\otimes_R H_*(Z)\to H_*(X\times Y\times Z)$
$$(\alpha\times\beta)\times\gamma=\alpha\times(\beta\times\gamma)$$

(d) Neutrales Element: Ist X ein Punkt, $X=\{*\}$, und $1\in R=H_0(X)$ die Einheit, so gilt $1\times\alpha=\alpha\times 1=\alpha$ $\forall\ \alpha\in H_*(Y)=H_*(\{*\}\times Y)=H_*(Y\times\{*\})$.

Beweis: (A) Die Eilenberg-Zilber-Äquivalenzen ϕ und ψ haben diese Eigenschaften: Dank Azyklische Modellen genügt es, diese Eigenschaften auf H_0 zu prüfen, wo sie dann offensichtlich sind. Zum Beispiel die Kommutativität: die Diagramme
$$\begin{tikzcd} S_*X\otimes S_*Y \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\tau"'] & S_*(X\times Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"] \arrow[d, "t_*"] & S_*(X)\otimes S_*(Y) \arrow[d, "\tau"] \\ S_*Y\otimes S_*X \arrow[r, "\phi_{Y,X}"] & S_*(Y\times X) \arrow[r, "\psi_{Y,X}"] & S_*(Y)\otimes S_*(X) \end{tikzcd}$$
mit $\tau(\sigma\otimes\tau)=(-1)^{|\sigma||\tau|}\tau\otimes\sigma$, $t: X\times Y\to Y\times X$, sind kommutativ bis auf Ketten-Homotopie:

Zum Beispiel das linke: $F_\bullet = S_*(-) \otimes S_*(-) : Top^2 \to K_{\geq 0}$

$G_\bullet = S_*(t(-,-)) : Top^2 \to K_{\geq 0}$; F_n ist frei mit Modellen in $\mathcal{M}_n = \{ \Delta^p \times \Delta^q \mid p+q = n \}$, $H_n(G(M)) = 0 \ \forall n > 0$ und $\forall \ M \in \mathcal{M}_n \cup \mathcal{M}_{n+1}$. Wir haben natürliche Ketten Abbildungen $t_* \circ \phi$, $\phi \circ \tau : F_\bullet \to G_\bullet$.

Es gilt $t_* \circ \phi(i_0 \otimes i_0) = (i_0, i_0) = \phi \circ \tau(i_0 \otimes i_0)$ für $(X,Y) = (\Delta^0, \Delta^0)$. Dank 3.37, wie im Beweis von 3.40, gilt dann $H_0(F_\bullet) = H_0(G_\bullet)$. Also $F_\bullet \simeq G_\bullet$ dank 3.39.

(B) Ebenso hat die Abb. α aus der alg. Künneth Formel auch diese Eigenschaften: $H_*(-)$ ist verträglich mit Kommutativität, Assoz. und Einheit des Tensorprodukts.

(C) (A)+(B): Zum Beispiel das Diagramm kommutiert ($\Rightarrow$ (b)):

$$\begin{tikzcd} H_*(X) \otimes H_*(Y) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\tau"'] \arrow[dr, phantom, "(B)"] & H_*(S_*(X) \otimes S_*(Y)) \arrow[r, "\phi_*"] \arrow[d, "H_*\tau"] \arrow[dr, phantom, "(A)"] & H_*(X \times Y) \arrow[d, "t_*"] \\ H_*(Y) \otimes H_*(X) \arrow[r, "\alpha"] & H_*(S_*(Y) \otimes S_*(X)) \arrow[r, "\phi_*"] & H_*(Y \times X) \end{tikzcd}$$

Die andere Axiome für $\times$ werden analog bewiesen. #

3.48 Bemerkung: Wir haben auch eine Künneth Formel für Paare (X,A), (Y,B). Wir haben ein komm. Diagramm mit ex. Zeilen

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (S_*(A) \otimes S_*(Y)) + (S_*(X) \otimes S_*(B)) \arrow[r, hook] \arrow[d, shift right, "\phi'"'] & S_*(X) \otimes S_*(Y) \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\phi"'] & \frac{S(X)}{S(A)} \otimes \frac{S(Y)}{S(B)} \arrow[r] \arrow[d, shift right, "\phi''"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Bild}(j_1 + j_2) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\psi'"'] & S_*(X \times Y) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\psi"'] & S_*(X \times Y)/\mathrm{Bild}(j_1+j_2) \arrow[r] \arrow[u, shift right, "\psi''"'] & 0 \end{tikzcd}$$

Um zu zeigen, dass ϕ' und ψ' existieren (also Einschränkungen von ϕ, ψ Bilden die Untergr. zu Untergr.), benutze Natürlichkeit bezüglich $j_1 \times id : A \times Y \to X \times Y$, $id \times j_2 : X \times B \to X \times Y$. Hier $\mathrm{Bild}(j_1 + j_2) = \mathrm{Bild}\left((j_1 \times id)_* + (id \times j_2)_* : S_*(A \times Y) + S_*(X \times B) \longrightarrow S_*(X \times Y) \right)$.

Durch Quotient gewinnen wir ϕ'', ψ''; Natürlichkeit der Homotopien $\phi \circ \psi = id$, $\psi \circ \phi = id$ bezüglich $j_1 \times id$, $id \times j_2$, implizieren $\phi' \circ \psi' = id$, $\psi' \circ \phi' = id$, und auch für ϕ'' und ψ''.

Problem: $S_*(X\times Y)/\text{Bild}(j_1+j_2) \xrightarrow{\Theta_*} S_*(X\times Y)/S_*(A\times Y \cup X\times B)$
induziert im allgemein kein Isomorphismus
in Homologie, so dass wir keine allgemeine Künneth-Formel für Paare
haben. Aber in sehr vielen Fälle von Interesse (z.B CW) schon:

<u>3.49 Lemma</u>: Sei X ein Raum, U_1, U_2 zwei Teilräume, und
$j_i : U_i \hookrightarrow X$ die Inklusion. Sei $\text{Bild}(j_1+j_2)$ das Bild von
$j_{1*}+j_{2*} : S_*(U_1)\oplus S_*(U_2) \longrightarrow S_*(X)$. Die folgenden
Aussagen sind Äquivalent

(a) Die Quotientabbildung $\Theta: S_*(X)/\text{Bild}(j_1+j_2) \to S_*(X)/S_*(U_1\cup U_2)$
induziert ein Iso in Homologie

(b) Die Inklusion induziert ein Isomorphismus
$$i_*: H_*(U_1, U_1\cap U_2) \to H_*(U_1\cup U_2, U_2)$$

Diese Eigenschaften gelten zum Beispiel wenn

(i) $U_1 = \emptyset$ oder $U_2 = \emptyset$

(ii) U_1 und U_2 sind offen in X

(iii) X ist ein CW und U_i ein Unter-CW, $i=1,2$.

<u>Beweis</u>: Wir haben exakten Folgen von Kettenkomplexen
$$0 \to S_*(U_1)/S_*(U_1\cap U_2) \to S_*(U_1\cup U_2)/S(U_2) \to S(U_1\cup U_2)/\text{Bild}(j_1+j_2) \to 0$$
$$0 \to S_*(U_1\cup U_2)/\text{Bild}(j_1+j_2) \to S(X)/\text{Bild}(j_1+j_2) \to S_*(X)/S_*(U_1\cup U_2) \to 0$$

So dass (a) $\Leftrightarrow$ $H_*\left(S_*(U_1\cup U_2)/\text{Bild}\right) = 0 \Leftrightarrow$ (b).

Für i, ii, iii gilt (b): (i) klar, (ii) das ist Ausscheidung:
$U_1\cup U_2 = \mathring{U}_1 \cup \mathring{U}_2$ wenn U_i offen. Für (iii): Dann ist $U_1\cup U_2$
ein CW-Komplex, also folgt (b) aus der "Ausschneidung" für
CW-Unterräume (folgenden Lemma). #

<u>3.50 Lemma</u> Sei X ein CW-Komplex, A und B Unterkomplexe
mit $X = A\cup B$. Dann induziert die Inklusion ein Isomorphismus
$$i_*: H_*(A, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_*(X, B).$$

Beweis: Falls $A \cap B = \emptyset$ ist es klar: $S_*(A, \emptyset) \to S_*(X, B)$ ist dann ein Isomorphismus. Ansonsten ist die Abbildung $A/A\cap B \to X/B$ (Quotient der Inklusion) ein Homöomorphismus (Vergleiche 1.36). Da CW-Paare gute Paare sind, induziert die Inklusion ein Isomorphismus $H_*(A, A\cap B) \xrightarrow{\cong} H_*(A/A\cap B, *) \xrightarrow{\cong} H_*(X/B, *) \xleftarrow{\cong} H_*(X, B)$. #

3.51 Theorem (Künneth für Paare) Seien (X, A) und (Y, B) Paare, so dass (i) A oder B leer sind, oder

(ii) A und B sind offen, oder

(iii) X, Y sind CW's, und $A\times Y$, $X\times B$ sind Unter-CW, oder

(iv) allgemein: Θ aus 3.48 induziert ein Iso in Homologie.

Dann haben wir eine natürliche kurze exakte Folge ($R = HiR$)

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(X, A; R) \otimes_R H_q(Y, B; R) \xrightarrow{\times} H_n((X,A)\times(Y,B); R)$$
$$\xrightarrow{\Gamma} \bigoplus_{k+l=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_k(X,A;R), H_l(Y,B;R)) \to 0,$$

die (unnatürlich) spaltet. Hier $(X,A)\times(Y,B) := (X\times Y, A\times Y \cup X\times B)$, und $\times$ und Γ sind analog zu $\times, \Gamma$ in 3.44 definiert, mit Hilfe von α, β aus 3.33, ϕ'' und ψ'' und Θ aus 3.48.

Beweis: 3.33, 48, 49, 50. #

3.52 Bemerkung: Das Kreuz-Produkt $\times$ in 3.51 ist auch wenn (iv) nicht gilt definiert (benutze $\Theta \circ \phi''$).

Die gleiche Eigenschaften wie 3.47 gelten. Dazu kommt noch die extra Eigenschaft: Kompatibilität mit dem Rand ∂_*.

3.53 Lemma: Seien (X, A) und (Y, B) Paare.

Seien $\partial_*^A : H_*(X, A) \to H_{*-1}(A)$, $\partial_*^B : H_*(Y, B) \to H_{*-1}(B)$ Randop. von Paare, $\partial : H_*((X, A)\times(Y, B)) \to H_{*-1}(A\times Y \cup X\times B, A\times B)$ den Rand des Tripels. Das folg. Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} H_p(X,A)\otimes_R H_q(Y,B) & \xrightarrow{\times} & H_n((X,A)\times(Y,B)) \\ \Big\downarrow \partial_p^A\otimes id + (-1)^p id\otimes\partial_q^B & & \downarrow \partial_n \\ & & H_{n-1}(A\times Y\cup X\times B,\ A\times B) \\ & & \uparrow (i_{1*}, i_{2*}) \\ \left(H_{p-1}(A)\otimes_R H_q(Y,B)\right)\oplus\left(H_p(X,A)\otimes_R H_{q-1}(B)\right) & \xrightarrow{\times\oplus\times} & H_{n-1}(A\times Y, A\times B)\oplus H(X\times B, A\times B), \end{array}$$

also $\partial_n(a\times b) = i_{1*}(\partial_p^A(a)\times b) + (-1)^{|a|} i_{2*}(a\times\partial_q^B(b))$,

$\forall\ a\in H_p(X,A),\ b\in H_q(Y,B)$. Hier $n=p+q$, i_1, i_2 die Inklusionen.

Beweis: Notieren wir $\varphi = \Theta\circ\Phi''$ die natür. Eilenberg-Zilber Abbildung $S_*(X,A)\otimes S_*(Y,B)\to S_*((X,A)\times(Y,B))$ für Paare.

Sei $x\in S_p(X)$ mit $\bar{x}\in S_p(X,A)$ Darsteller von $\alpha\in H_p(X,A)$;

sei $y\in S_q(Y)$ mit $\bar{y}\in S_q(Y,B)$ ——— $\beta\in H_q(Y,B)$.

Insbesondere: $d(x)\in S_{p-1}(A)$ darstellt $\partial_p^A(\alpha)$, $d(y)$ darst. $\partial_q^B(\beta)$.

Dann sind $\left.\begin{array}{l}\varphi(d(x)\otimes y)\in S_{n-1}(A\times Y)\\ \varphi(x\otimes d(y))\in S_{n-1}(X\times B)\end{array}\right\}\subset S_{n-1}(A\times Y\cup X\times B)$

Darsteller für $i_{1*}(\partial_p(\alpha)\times\beta)$, bzw $i_{2*}(\alpha\times\partial_q(\beta))$. Aber dann ist $\partial_n(\alpha\times\beta)$ von

$d(\varphi(x\otimes y)) = \varphi(d(x\otimes y)) = \varphi(dx\otimes y) + (-1)^{|x|}\varphi(x\otimes dy)$

dargestellt. #

3.54 Korollar: Seien X, Y CW-Komplexe so dass $X\times Y$ auch ein CW-ist. Sei $C_p(X)\otimes C_q(Y) \xrightarrow{\times} C_{p+q}(X\times Y)$ durch $\times(e\otimes f) = e\times f$ definiert, wobei e eine p-Zelle von X und f eine q-Zelle von Y sind. Dann ist

$$\times : C_*^{cw}(X)\otimes C_*^{cw}(Y)\longrightarrow C_*(X\times Y)$$

ein Isomorphismus von Kettenkomplexen (links: $\otimes$ von Kettenkx!)

Beweis: es ist klar dass $\times : \left(C_*^{cw}(X)\otimes C_*^{cw}(Y)\right)_n\to C_n(X\times Y)$ ein Isomorphismus ist: links ist frei mit Basis $e\otimes f$, rechts ist frei mit Basis $e\times f$, wobei (e,f) über Paare von Zellen mit $\dim(e)+\dim(f)=n$ läuft.

Es bleibt also zu zeigen: die Ränder sind verträglich:

Wir haben ein komm. Diagramm (für $e \in C_p(X)$, $f \in C_q(Y)$ Zellen):

$$\begin{tikzcd} H_p(D^p, S^{p-1}) \otimes H_q(D^q, S^{q-1}) \arrow[r, "\times"] & H_{p+q}(D^{p+q}, \partial D^{p+q}) \arrow[r, "\chi_e \times \chi_f"] \arrow[d, "\partial"] & C_{p+q}(X \times Y) \arrow[d, "d"] \\ & H_{p+q-1}(\partial D^{p+q}, S^{p-1} \times S^{q-1}) \arrow[r, "\chi_e \times \chi_f|\ldots"] & C_{p+q-1}(X \times Y) \end{tikzcd}$$

$$e \otimes f \xrightarrow{3.53} \partial(e) \times f + (-1)^{|e|} e \times \partial(f) \longmapsto d(e) \times f + (-1)^{|e|} e \times d(f)$$

#

3.55. Bemerkung: Natürlichkeit bezüglich (D^p, S^{p-1}), (D^q, S^{q-1}) zeigt also das $\times$ in zellulärer Homologie übereinstimmt mit $\times$ in singulärer Homologie. Man kann auch direkt beweisen, dass $\times$ für CW existiert und ein Iso ist: z. Beisp. Hatcher, § 3.B.

3.56 Definition (zur Erinnerung): Ein H-Raum ist ein punktierter Raum (X, x_0) versehen mit einer stetigen Multiplikation

$$\mu: X \times X \to X$$

so dass x_0 eine Einheit bis auf Homotopie ist: das Diagramm

$$\begin{tikzcd} x_0 \times X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "="'] & X \times X \arrow[d, "\mu"] & X \times x_0 \arrow[l, hook'] \arrow[dl, "="] \\ & X & \end{tikzcd}$$

kommutiert bis auf Homotopie.

Der H-Raum heißt assoziativ, bzw. kommutativ, falls μ bis auf Homotopie assoziativ, bzw. kommutativ ist. Der H-Raum X heißt eine H-Gruppe, falls er assoziativ ist, und ein Inverse $X \xrightarrow{\nu} X$ bis auf Homotopie hat.

3.57 Beispiele: (a) Eine topologische Gruppe ($GL_n(\mathbb{R})$, $GL_n(\mathbb{C})$, $U(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $SO(n)$, S^3, etc...) ist eine H-Gruppe.

(b) S^7 ist ein H-Raum.

(c) Schleifenräumen ΩX sind H-Gruppen; iterierte Schleifenräumen $\Omega^n X$ sind kommutative H-Gruppen ($n \geq 2$).

(d) $\mathbb{R}P^\infty$, $\mathbb{C}P^\infty$ (siehe Aufgabe 10.3). (e) Produkte von H-Räumen.

3.58 Definition: Sei (X, x_0) ein H-Raum mit Produkt μ.
Dann haben wir ein inneres Produkt

$$H_*(X;R) \otimes_R H_*(X;R) \xrightarrow{\times} H_*(X \times X; R) \xrightarrow{\mu} H_*(X;R)$$

(R ein Ring, typischerweise $\mathbb{Z}$ H/R); das Pontrjagin-Produkt.
Für $a, b \in H_*(X;R)$ schreibt man $a \cdot b := \mu_*(a \times b)$.

3.59 Lemma: Sei (X, x_0) ein H-Raum. Das Pontrjagin-Produkt ist
(a) assoziativ, falls X assoziativ ist
(b) (graduiert-) kommutativ, falls X kommutativ ist: $b \cdot a = (-1)^{|a||b|} ab$
(c) unitär, mit $[x_0] \otimes 1 \in H_0(X;R) = H_0(X) \otimes R$ (falls R unitär ist).
(d) natürlich bezüglich Homomorphismen von H-Räumen $f: (X, x_0) \to (Y, y_0)$ (also: f ist verträglich mit μ_X, μ_Y bis auf Homotopie):

$$f_*(a) \cdot f_*(b) = f_*(ab).$$

Beweis: das folgt aus den entspr. Eigenschaften des externen Produkts 3.47; zum Beispiel die Kommutativität:

$$\begin{tikzcd}
H_*(X;R) \otimes_R H_*(X;R) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "\tau"] & H_*(X \times X; R) \arrow[dr, "\mu_*"] \arrow[d, "t_*"] & \\
H_*(X;R) \otimes_R H_*(X;R) \arrow[r, "\times"] & H_*(X \times X; R) \arrow[r, "\mu_*"'] & H_*(X;R)
\end{tikzcd}$$

(mit $\tau(a \otimes b) = (-1)^{|a||b|} b \otimes a$); das linke Quadrat kommutiert dank 3.47 (b), das rechte Dreieck weil X kommutativ ist (also $\mu \circ t \simeq \mu$, für $t: X \times X \to X \times X$, $(x,y) \mapsto (y,x)$). #

3.60 Definition: Sei $R = \mathbb{Z}$ oder ein Körper, und sei V ein freier R-Modul. Sei $T(V) = \bigoplus_n T_n(V)$ die Tensor-Algebra mit $T_n V = \otimes_R^n V$ und offensichtlichen Produkt $T_n V \otimes T_m V \to T_{n+m} V$.
Sei $E(V) = \bigoplus_n E_n(V)$ die äußere Algebra, mit $E(V) = T(V)/R$, wobei R das zweiseitige Ideal ist, das durch $x \otimes x \in T_2(V)$ für alle $x \in V$ erzeugt ist.
Die Klasse von $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \in T_n V$ in $E_n(V) = T_n(V)/R_n$

wird $x_1 \cdots x_n$ notiert (manchmal $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$). Bemerke die Gleichung $x_1 \ldots x_n = \mathrm{sign}(\sigma) \cdot x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ für $\sigma \in \Sigma_n$: das folgt aus $0 = (x+y)(x+y) = xy + yx$ in $E_2(V)$; insbesondere $xy = -yx$ $\forall x, y \in E_1(V)$.

Ist $B = \{ e_i \mid i \in I \}$ eine Basis von V, und I total geordnet, so is $\{ e_{i_1} \ldots e_{i_n} \mid i_1 < \ldots < i_n \}$ eine Basis von $E_n(V)$ (hier $E_0(V) = R$ erzeugt vom "leeren Produkt" $1 \in R$).

Zum Beispiel, wenn V eine Basis $\{e_1, \ldots, e_n\}$ hat, so schreiben wir $E(e_1, \ldots, e_n) := E(V)$; es gilt dann $\mathrm{Rang}_R (E_k(e_1, \ldots, e_n)) = \binom{n}{k}$.

Graduierung: ist V ein graduierter (freier) R-Modul, so ist $E(V)$ ein graduierte algebra mit $|x_{i_1} \cdots x_{i_n}| = |x_{i_1}| + \cdots + |x_{i_n}|$

<u>3.61 Theorem:</u> Betrachte die Beschreibung von $H_*(U(n); \mathbb{Z})$ (hier $U(n) = V^{\mathbb{C}}_{n,n}$) gegeben in Theorem 2.45.

Wir notieren $x_i := [i \mid n,n] \in H_{2i-1}(U(n); \mathbb{Z})$ die Klasse, die von der normalen Zelle $(i \mid n, n) \subset U(n)$ in $C^{cw}_*(U(n))$ dargestellt ist. Dann ist $H_*(U(n); \mathbb{Z})$ als Pontrjagin-Algebra durch $H_*(U(n); \mathbb{Z}) = E_{\mathbb{Z}}(x_1, \ldots, x_n)$ gegeben.

<u>Beweis</u>: $U(n)$ ist eine Topologische Gruppe, also besitzt $H_*(U(n); \mathbb{Z})$ eine unitäre und assoziative Pontrjagin-Algebra-Struktur.

(A) Die Abbildung $\mu : U(n) \times U(n)$ ist zellulär; das haben wir im Beweis von 2.38 gesehen: es folgt aus Aussage $(b_{n,n})$;

Seiene $e = (i_1, \ldots, i_r \mid n, n)$, $f = (j_1, \ldots, j_s \mid n,n)$ zwei Zellen von $U(n)$; Dann ist e (bzw f) die Top-Zelle in $Q_{i_1} \cdots Q_{i_r}$ (bzw. $Q_{j_1} \ldots Q_{j_s}$); Also $\mu(e \times f)$ liegt in $Q_{i_1} \cdots Q_{i_r} \cdot Q_{j_1} \cdots Q_{j_s} \subset U(n)$, was nach $b_{n,n}$ in 2.38 im $\sum_{l=1}^{r} 2i_l - 1 + \sum_{k=1}^{s} 2j_k - 1 = \dim(e \times f)$ - Skelet liegt.

(B) Die Pont. Algebra $H_*(U(n);\mathbb{Z})$ ist von 1 und $\{x_i \mid 1 \le i \le n\}$ erzeugt. Es genügt zu zeigen:

Für $n \geq i_1 > \dots > i_r \geq 1$ gilt $x_{i_1} \cdots x_{i_r} = [i_1 \cdots i_r | n,n]$:

Das folgt aus der Definition der normalen Zellen: $x_i = [i|n,n]$ ist im zellulären Kettenkomplex von der Zelle

$$D^{2i-1} \xrightarrow{h_i} Q_i \hookrightarrow U(n)$$

dargestellt; also, nach Definition des Pontrjagin Produktes, mit zellulärem Kreuz Produkt $\times$, wird $x_{i_1} \cdots x_{i_r}$ von der Zelle

$$D^{2i_1-1} \times \dots \times D^{2i_r-1} \xrightarrow{h_{i_1}\times \dots \times h_{i_r}} \overbrace{U(n) \times \dots \times U(n)}^{r} \xrightarrow{\mu} U(n)$$

dargestellt; das ist genau die Definition von $[i_1, \dots, i_r | n,n]$.

Nun bleiben die Relationen:

(C) $\underline{x_i^2 = 0}$ für alle $1 \le i \le n$: Das folgt aus 2.43:

x_i ist die Top-Zelle in Q_i, also ist $x_i \times x_i$ die Top-Zelle in $Q_i \times Q_i$, mit $|x_i \times x_i| = 4i-2$.

Aber $\mu(Q_i \times Q_i) \subset \mu(Q_i \times Q_{i-1}) \subset U(n)$, nach 2.43, und weil μ zellulär ist liegt $\mu(Q_i \times Q_{i-1})$ im $4i-4$ Skelett von $U(n)$; also ist $\mu(x_i \times x_i) = 0$ im zellulären Ketten komplex von $U(n)$; es folgt $x_i^2 = 0$.

(D) Für $i > j$ gilt $\underline{x_i x_j = -x_j x_i}$.

Bemerke: das gilt automatisch falls $H_*(U(n);\mathbb{Z})$ graduiert kommutativ ist; da $U(n)$ nicht kommutativ ist (!) müssen wir das explizit beweisen; wir müssen die Definition von x_i wieder ausgraben; $x_i = (i|n,n)$ entspricht die Zelle, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{tikzcd} D^{2i-1} = D^1 \times D^{2(i-1)} \arrow[r, "g \times f_i"] & S^1 \times S^{2i-1} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & Q_i \arrow[d, hook] \\ & & U(n) \end{tikzcd}$$

g: Quotient

f: $x \mapsto (x, \sqrt{1-\|x\|^2}) \in S^{2i-1} \subset \mathbb{C}^i$

$(\mathbb{C}^i = \mathbb{C}^i \times 0 \subset \mathbb{C}^n$; $\varphi(\lambda, x) \begin{cases} x \mapsto \lambda x \\ y \mapsto y \quad \text{für } y \perp x. \end{cases}$

Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} D^{2i-1} \times D^{2j-1} \arrow[r, "t"] \arrow[d, "h_i \times h_j"] & D^{2j-1} \times D^{2i-1} \arrow[r, "\Theta"] & D^{2j-1} \times D^{2i-1} \arrow[d, "h_j \times h_i"] \\ Q_i \times Q_j \arrow[r, "\mu"] & U(n) & Q_j \times Q_i \arrow[l, "\mu"'] \end{tikzcd}$$

Hier $t(u,v) = (v,u)$, und Θ ist wie folgt definiert:

$\Theta : D^{2j-1} \times D^{2i-1} \cong D^{2j-1} \times D^1 \times f(D^{2(i-1)}) \longrightarrow D^{2j-1} \times D^1 \times f(D^{2(i-1)}) \xleftarrow{\cong} D^{2j-1} \times D^{2i-1}$

$(v, s, x) \longmapsto (v, s, h_j^{-1}(v)(x))$

Da $j < i$ ist Θ wohldefiniert: $h_j \in U(j)$, also wird die i-te Koordinate Axis von $\mathbb{C}^n$ durch h_j punktweise fixiert; also $h_j(f(D^{2(i-1)})) \subset f(D^{2(i-1)})$ (= Nord Hemisphere von S^{2i-1} mit letzte Koordinate reel).

Dieses Diagramm ist kommutativ: Seien $(u,v) \in D^{2i-1} \times D^{2j-1}$, mit $(g \times f_i)(u) = (s,x) \in S^1 \times D^{2(i-2)}$ und $A = h_j(v)$

Dann gilt

(i) $\mu \circ (h_i \times h_j)(u,v) = \varphi(s,x) \cdot A \in U(n)$

(ii) $\mu \circ (h_j \times h_i) \circ \Theta \circ t(u,v) = \mu(h_j \times h_i)(v, s, A^{-1}(x))$
$= \mu(A, \varphi(s, A^{-1}(x))) = A\varphi(s, A^{-1}(x))$.

Aber $A^{-1}\varphi(s,x)A = \varphi(s, A^{-1}(x))$ dank Bemerkung 2.42.

Betrachten wir nun folgende Gleichung in der Zell. Homologie von $U(n)$:

Die Klasse $x_i \times x_j$ ist das Kreuzprodukt von x_i, x_j, mit $x_i = h_{i*}(j_{2i-1})$, $j_{2i-1} \in H_{2i-1}(D^{2i-1}, S^{2i-2})$, analog für x_j.

Also $x_i x_j = \mu(h_i \times h_j)_*(j_{2i-1} \times j_{2j-1}) =$
$\mu \circ (h_j \times h_i)_*(\deg(\Theta \circ t) \cdot j_{2i-1+2j-1}) = \deg(\Theta \circ t) \cdot x_j x_i$

Es genügt zu zeigen: $\deg(\Theta \cdot t) = -1$, für $\Theta t : D^{2i+2j-2}/\partial \longrightarrow D^{2i+2j-2}/\partial$

Wir haben $\deg(t) = -1$ (zwei Faktoren sind ungerade Dimensional)

Es bleibt zu zeigen: $\deg(\Theta) = 1$.

Da $D^{2j-1} \simeq *$ können wir eine Homotopie $F: D^{2j-1} \times [0,1] \to$
$\to D^{2j-1}$ mit $F(v,0) = v$ und $F(v,1) = 0 \quad \forall v \in D^{2j-1}$.
Wir erhalten eine Homotopie

$$H: D^{2j-1} \times D^{2i-1} \times [0,1] \to D^{2j-1} \times D^{2i-1}$$
$$(v, (s,x), t) \longmapsto (v, (s, h_j(F(v,t))(x)))$$

zwischen Θ und $H(-,1)$, wobei $H(-,t)$ ein Homöo $\forall t$.
Insbesondere $\deg(\Theta) = \deg(H(-,1))$.
Aber $H(-,1): (v,s,x) \mapsto (v, s, h_j(0)x)$. Es folgt
$\deg(H(-,1)) = \deg(h_j(0)) = 1$ (weil $h_j(0) \in U(n)$,
und $U(n)$ ist wegzusammenhängend). #

3.62 Korollar: Betrachte die Verknüpfung

$$SU(n) \overset{i}{\hookrightarrow} U(n) \xrightarrow{\pi} V_{n,n-1}$$

und sei $y_i \in H_{2i-1}(SU(n);\mathbb{Z})$ die Klasse mit $(\pi i)_* y_i =$
$[i \mid n, n-1] \in H_{2i-1}(V_{n,n-1};\mathbb{Z})$ (siehe 2.45) $(2 \le i \le n)$

$$H_*(SU(n);\mathbb{Z}) = E_{\mathbb{Z}}(y_2, y_3, \dots, y_n).$$

Beweis: $\pi \circ i$ ist ein Homöomorphismus, also induziert ein
Isomorphismus von graduierten $\mathbb{Z}$-Moduln $H_*(SU(n);\mathbb{Z}) \cong$
$H_*(V_{n,n-1};\mathbb{Z})$. Insbesondere ist $H_*(SU(n);\mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_*(U(n);\mathbb{Z})$
ein injektiver Homomorphismus von graduierten $\mathbb{Z}$-Algebren.
Daraus folgt: $H_*(SU(n);\mathbb{Z})$ ist auch kommutativ, und
es gilt $z \cdot z = 0 \quad \forall z \in H_*(SU(n);\mathbb{Z})$, $|z| > 0$.
Andererseits wissen wir, dass $i_*(y_i) = x_i + \ker(\pi)$ da
$\pi(x_i) = [i \mid n, n-1]$ (2.45).
Es folgt, dass $\{1, y_{i_1} \cdots y_{i_r} \mid 1 \le r \le n-1, n \ge i_1 > \dots > i_r > 1\}$
eine $\mathbb{Z}$-Basis von $H_*(SU(n);\mathbb{Z})$, weil es unter $(\pi i)_*$ auf
der Basis der normalen Zellen abgebildet wird. Es folgt
das Ergebnis. #

<u>3.63 Bemerkung</u>: Man kann eigentlich $y_i = x_i$, $2 \leq i \leq n$ wählen. Das werden wir mit Kohomologie sehen.

Nun können wir das Analogue für $V^{\mathbb{R}}_{n,k}$ mit $H_*(-;\mathbb{F}_2)$ machen. Theorem 2.45 entspricht nun

<u>3.64 Theorem</u>: $H_*(V^{\mathbb{R}}_{n,k} ; \mathbb{F}_2)$ hat

$$\{ 1, [i_1, \dots, i_r | n,k] \mid n \geq i_1 > \dots > i_r > n-k \}$$

als Basis, wobei $[i_1, \dots, i_r | n,k]$ von der Zelle $(i_1, \dots, i_r | n,k)$ im zellulären Ketten-Komplex dargestellt ist, und $[i_1, \dots, i_r | n,k]$ hat Grad $i_1 + \dots + i_r - r$.

Für $n \leq m$, $n-k \leq m-l$ induziert die Standard Ab. $V^{\mathbb{R}}_{n,k} \to V^{\mathbb{R}}_{m,l}$ den Hom $H_*(V^{\mathbb{R}}_{n,k} ; \mathbb{F}_2) \to H_*(V^{\mathbb{R}}_{m,l} ; \mathbb{F}_2)$, der durch

$$[i_1, \dots, i_r | n,k] \mapsto \begin{cases} [i_1, \dots, i_r | m,l] & \text{falls } i_r > m-l \\ [i_1, \dots, i_{r-1} | m,l] & k = n,\ i_r = 1,\ i_{r-1} > m-l \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

<u>Beweis</u>: Analog zu 2.45. Diesmal benutzt man, dass $Q_n \underset{cw}{\equiv} \mathbb{R}P^{n-1} \amalg Q_0$ und dass $d = 0$ für $C^{cw}_*(Q_n ; \mathbb{F}_2)$. Daraus folgt wie in 2.45, dass auch für $C^{cw}_*(V^{\mathbb{R}}_{n,k} ; \mathbb{F}_2)$ $d = 0$ gilt, und damit $H_*(V^{\mathbb{R}}_{n,k} ; \mathbb{F}_2) = C_*(V^{\mathbb{R}}_{n,k} ; \mathbb{F}_2)$, wofür 2.38 eine Basis liefert.
Die Aussage für $V^{\mathbb{R}}_{n,k} \to V^{\mathbb{R}}_{m,l}$ folgt dann aus 2.44. #.

<u>3.65 Theorem</u>: Notiere $u_i = [i_{i+1} | n,n] \in H_*(O(n);\mathbb{F}_2)$ die normale Klasse aus 3.64, $\forall\ 0 \leq i \leq n-1$, mit $|u_i| = i$. Dann haben wir ein Isomorphismus (von kommutativen gr. Algebren)

$$H_*(O(n);\mathbb{F}_2) \cong E_{\mathbb{F}_2}(u_1, \dots, u_{n-1})[u_0] / u_0^2 = 1 .$$

<u>Beweis</u>: Analog zu 3.61, aber etwas einfacher, da der genauen Grad (± 1) unwichtig ist ($\mathbb{F}_2$ Koeffizienten): nimm $d = 1$ statt $d = 2$!

Wir haben ein kleinen Unterschied mit der zweiten 0-Zelle: Diesmal gilt das Argument für "$u_0 \cdot u_0 = 0$" nicht; Hier entspricht u_0 die 0-Zelle $(1 \mid n,n) = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & \ddots \; 1 \end{pmatrix} \in O(n)$

Also $u_0 \cdot u_0$ ist von $(1|n,n) \cdot (1|n,n) = \mathrm{id} = 1$ dargestellt. #

<u>3.66 Korollar</u>: Sei $v_i = u_i \cdot u_0 \in H_*(O(n); \mathbb{F}_2)$.

Die Inklusion $SO(n) \hookrightarrow O(n)$ induziert ein Homomorphismus in $\mathbb{F}_2$-Homologie, der als folgenden Verknüpfung faktorisiert:

$$H_*(SO(n); \mathbb{F}_2) \xrightarrow{\cong} E_{\mathbb{F}_2}(v_1, \dots, v_{n-1}) \subset H_*(O(n); \mathbb{F}_2).$$

<u>Beweis</u>: $O(n) = SO(n) \amalg O(n)^-$ $\quad (O(n)^- = \{A \in O(n) \mid \det A = -1\})$

Die Elemente aus $(i+1 \mid n,n)$ sind Matrizen die Spiegelungen entsprechen, also haben alle Determinante -1:

Also ist

$$(i_1, \dots, i_r \mid n,n) \text{ eine Zelle von } \begin{cases} O(n)_- & \text{falls } r \text{ ungerade} \\ SO(n) & \text{falls } r \text{ gerade.} \end{cases}$$

Wir haben eine (spaltende) exakte Folge

$$0 \to H_*(SO(n); \mathbb{F}_2) \to H_*(O(n); \mathbb{F}_2) \to \tilde{H}_*(O(n)^-; \mathbb{F}_2) \to 0$$

Die Basis Elemente von $H_*(O(n); \mathbb{F}_2)$ der Form

$$u_{i_1} \cdots u_{i_r} \qquad n-1 \geq i_1 > \cdots > i_r \geq 0$$

liegen in $H_*(SO(n); \mathbb{F}_2)$ falls r gerade ist (insbesondere $v_i \in H_*(SO(n); \mathbb{F}_2)$), und die mit r ungerade erzeugen $\tilde{H}_*(O(n)^-; \mathbb{F}_2)$.

Aber falls $r = 2s$,

$$u_{i_1} \cdots u_{i_{2s}} = \begin{cases} v_{i_1} \cdots v_{i_{2s}}, & \text{falls } i_{2s} \neq 0. \\ v_{i_1} \cdots v_{i_{2s-1}} & \text{falls } i_{2s} = 0, \end{cases}$$

#

<u>3.67 Definition</u>: Seien $U = \bigcup_{n \geq 1} U(n)$, $SU = \bigcup_{n \geq 1} SU(n)$, $O = \bigcup_{n \geq 1} O(n)$, $SO = \bigcup_{n \geq 1} SO(n)$ die (spezielle) unitären und orthogonale Gruppen, versehen mit der schwachen Topologie

Hier $U(n) \hookrightarrow U(n+1)$, $A \mapsto A \oplus 1$, etc... Es sind alle CW-Komplexe, und Top. Gruppen.

<u>3.68 Theorem</u>: Wir haben Isomorphismen von Algebren

$$H_*(U;\mathbb{Z}) = E_{\mathbb{Z}}(y_1, y_2, y_3, \dots) \qquad |y_i| = 2i-1$$

$$H_*(SU;\mathbb{Z}) = E_{\mathbb{Z}}(x_2, x_3, x_4, \dots) \qquad |x_i| = 2i-1$$

$$H_*(O;\mathbb{F}_2) = E_{\mathbb{F}_2}(u_1, u_2, u_3, \dots)[u_0]/_{u_0^2=1} \qquad |u_i| = i$$

$$H_*(SO;\mathbb{F}_2) = E_{\mathbb{F}_2}(v_1, v_2, v_3, \dots), \quad |v_i| = i.$$

<u>Beweis</u>: Wir beweisen es für U, die andere Iso's werden analog bewiesen; es folgt aus 2.44 (für U und SU) und aus 3.64 für O, SO.

Die Inklusion $U(n) \overset{n,m}{\hookrightarrow} U(m)$, $n<m$, gegeben durch $A \mapsto A \oplus 1_{m-n}$, induziert eine Inklusion $H_*(U(n);\mathbb{Z}) \hookrightarrow H_*(U(m);\mathbb{Z})$ von Pontrjagin Algebren: das ist 2.44, weil

$$y_{i_1} \cdots y_{i_r} = [i_1, \dots, i_r \mid n,n] \mapsto [i_1, \dots, i_r \mid m,m] =$$

$$y_{i_1} \cdots y_{i_r}, \quad \text{für alle } n \geq i_1 > \dots > i_r > 0.$$

Die erste Klasse nicht im Bild ist y_{n+1}, im Grad $2n+1$.

Dass übereinstimmt mit 2.41, der impliziert: die Skelett

$$U(n)^{(2n)} = U(m)^{(2n)} = U^{(2n)}.$$

Also: $U(n) \hookrightarrow U$ induziert eine Inklusion

$$H_*(U(n);\mathbb{Z}) \hookrightarrow H_*(U;\mathbb{Z})$$

die ein Isomorphismus in Grad $\leq 2n$ ist, für alle $n \geq 1$.

Die gegebene Formel für $H_*(U;\mathbb{Z})$ gilt also in Grad $\leq 2n$, für alle n. #.