IV KOHOMOLOGIE

4.1 Definition: Sei (X, A) ein Paar von Räumen, M eine Abelsche Gruppe. Wir definieren für $n \in \mathbb{Z}$:

$$S^n(X, A; M) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X, A), M)$$

und $\delta^n : S^n(X, A; M) \to S^{n+1}(X, A; M)$, $\alpha \mapsto \alpha \circ d$

wobei $d: S_{n+1}(X, A) \to S_n(X, A)$ der sing. Rand-Operator ist. Ein $\alpha \in S^n(X, A; M)$ heisst eine (singuläre) Kokette, und δ^n ist der Korand-Operator. Es gilt offensichtlich $\delta^{n+1} \circ \delta^n = 0$, und $(S^*(X, A; M), \delta^*)$ ist ein Kokettekomplex; die Gruppe

$$H^n(X, A; M) = \ker(\delta^n) / \operatorname{Bild}(\delta^{n-1})$$

ist die n-te (singuläre) Kohomologie-Gruppe von (X, A) mit Koeffizienten in M.

4.2 Bemerkungen: (a) Ein Kokettenkomplex (C^*, δ^*) ist eine Folge $\cdots \to C^{n-1} \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1} \to \cdots$ von Hom. von Abelschen Gruppen mit $\delta^n \circ \delta^{n-1} = 0 \;\forall n$; Ist (C^*, δ^*) ein Kokettenkomplex, so ist (C_{-*}, δ_{-*}) ein Kettenkomplex.

(b) Ist F eine freie-Abelsche Gruppe, R ein kommutative Ring und M ein R-Modul, so ist die Abbildung

$$\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, M) \to \operatorname{Hom}_R(F \otimes_{\mathbb{Z}} R, M)$$
$$f \mapsto \nu \circ (f \otimes id_R) : F \otimes R \to M \otimes R \xrightarrow{\nu} M$$

ein Isomorphismus von R-Moduln (hier ist ν die Wirkung; R wirkt auf $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(F, M)$ und $\operatorname{Hom}_R(F \otimes_{\mathbb{Z}} R, M)$ durch Wirkung auf Werte); Insbesondere: für alle Paare (X, A) ist $(S^*(X, A; R), \delta^*)$ ein Kokettenkomplex von R-Moduln, und $S^*(X, A; R)$ ist das R-duale von $S_*(X, A; R) := S_*(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} R$, als (Ko)kettenkomplex von R-Moduln.

(c) $H^n(-;M): Top^2 \to Ab$ ist ein kontravarianter Funktor (oder Kofunktor), $\forall n \in \mathbb{Z}$ (und $H^n(-;A) = 0$, $n<0$)

Die Definition von $H^*(X,A;M)$ basiert auf $(S_*(X,A), d)$, und man kann vermuten, dass $H^*(X,A;M)$ algebraisch aus $H_*(X,A;\mathbb{Z})$ beschreibbar ist: das stimmt! Dazu noch etwas homologische Algebra.

<u>4.3 Definition</u>: Ein Kofunktor $F: Ab \to Ab$ heißt <u>links exakt</u>, <u>recht exakt</u>, <u>exakt</u> falls $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A)$ (bzw. $F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$, oder $0 \to F(C) \to F(B) \to F(A) \to 0$) exakt ist, für alle $0 \to A \to B \to C \to 0$. Ebenso für R-Mod. R ein Ring, statt Ab.

<u>4.4 Lemma</u>: Sei R ein kom. Ring, $M \in R$-Mod. Dann gilt:

(a) $Hom_R(M,-)$ ist ein links-exakter Funktor.

(b) $Hom_R(-,M)$ ist ein links-exakter Kofunktor.

<u>Beweis</u>: einfache Aufgabe. #

<u>4.5 Bemerkung</u>: Ein Kofunktor $F: Ab \to Ab$ ist genau dann links-exakt (bzw. recht exakt) wenn $F^{op}: Ab^{op} \to Ab$ als Funktor exakt; hier benutzt man, dass Ab eine <u>Abelsche Kategorie</u> ist, und ebenso Ab^{op}; also macht der Begriff von Exaktheit auch Sinn für Ab^{op}. 4.4. (b) folgt dann rein formal aus (b)! Ebenso für R-Mod statt Ab.

<u>4.6 Beispiel</u>: (b) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow{f} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$ ist exakt in Ab; dann ist $0 \to \underbrace{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{Z})}_{=0} \xrightarrow{f^*} \underbrace{Hom(\mathbb{Q},\mathbb{Z})}_{=0} \xrightarrow{i^*} \underbrace{Hom(\mathbb{Z},\mathbb{Z})}_{=\mathbb{Z}}$ exakt, aber i^* ist nicht surjektiv.

(a) $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{p} \mathbb{Z} \xrightarrow{q} \mathbb{Z}/p \to 0$ ist exakt; also ist

$$0 \to \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z})} \xrightarrow{p_*} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z})} \xrightarrow{q_*} \underset{\overset{\shortparallel}{\mathbb{Z}/p}}{Hom(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)}$$ exakt,

aber q_* ist nicht surjektiv.

<u>4.7 Lemma</u>: Spaltet die exakte Folge $0 \to A \to B \to C \to 0$ in R-Mod, und ist M ein R-Modul, so sind
$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C) \to 0$ und
$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,M) \to \mathrm{Hom}_R(B,M) \to \mathrm{Hom}_R(A,M) \to 0$ exakt. #

<u>4.8 Definition</u>: Sei R ein HIR und seien M, N zwei linke R-Moduln. Sei $0 \to F_1 \xrightarrow{i} F_0 \xrightarrow{\pi} M \to 0$ eine exakte Folge mit F_0 und F_1 frei. Dann definiert man

$$\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = \mathrm{Coker}\left(\mathrm{Hom}_R(F_0,N) \xrightarrow{i^*} \mathrm{Hom}_R(F_1,N)\right)$$

Wir können die Haupteigenschaften von Ext^1_R zusammenfassen.

<u>4.9 Theorem</u>: Sei R ein H.I.R und seien M, N zwei linke R-Moduln.

(a) Bis auf kanonischen Iso ist $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ unabhängig von der Wahl von $0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ in 4.8; $\mathrm{Ext}^1_R(M,N) = 0$ für M frei.

(b) $\mathrm{Ext}^1_R(M,N)$ ist ein Kofunktor in M und ein Funktor in N.

(c) $\mathrm{Ext}^1_R(\bigoplus_i M_i, N) \xrightarrow{\cong} \prod_i \mathrm{Ext}^1_R(M_i, N)$ (natürlich)

(d) Ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ kurz exakt in R-Mod, so ist
$0 \to \mathrm{Hom}_R(C,N) \to \mathrm{Hom}_R(B,N) \to \mathrm{Hom}_R(A,N) \xrightarrow{\partial}$
$\to \mathrm{Ext}^1_R(C,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(B,N) \to \mathrm{Ext}^1_R(A,N) \to 0$ exakt, mit ∂ natürlich bezüglich Morph. von kurzen exakten Folgen.

<u>Beweis</u>: läuft „dual" zum Beweis der entsprechenden „duale" Eigenschaften von $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_1$. #.

<u>4.10 Bemerkungen</u>: (a) $A \otimes_R B \cong B \otimes_R A$ für R kommutativ, und $\mathrm{Tor}^R_i(A,B) \cong \mathrm{Tor}^R_i(B,A)$; aber $\mathrm{Hom}_R(A,B) \not\cong \mathrm{Hom}_R(B,A)$, und ebenso $\mathrm{Ext}^1_R(A,B) \not\cong \mathrm{Ext}^1_R(B,A)$, im allgemein.
Zum Beispiel: $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/p) = 0$, $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/p$.

(c) Wir haben gesehen: $\mathrm{Tor}_1^R(A,B)$ kann man mit Hilfe einer Auflösung in A oder B berechnen; ebenso $\mathrm{Ext}_R^1(A,B)$:
hierzu muss man eine <u>injektive</u> Auflösung

$$0 \to B \to I_0 \xrightarrow{g} I_1 \to 0$$

wählen, und dann gilt $\mathrm{Ext}_R^1(A,B) \cong \mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}_R(A,I_0) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}_R(A,I_1)\right)$

<u>Injektiv</u> ist das duale Begriff zu <u>Projektiv</u>, was die kategorielle sinnvolle Erweiterung des Begriffs frei ist:

$P \in R\text{-Mod}$ ist Projektiv $\iff$
$\forall\ \varepsilon : B \twoheadrightarrow C$ surjektiv in R-Mod,
$\forall\ \gamma : P \to C$, $\exists\ \beta : P \to B$ mit
$\gamma = \varepsilon\beta$

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dl, dotted, "\exists\beta"'] \\ B \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & C \end{tikzcd}$$

$I \in R\text{-Mod}$ ist Injektiv $\iff$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\mu"] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[dl, dotted, "\exists\nu"] \\ I & \end{tikzcd}$$

$\forall\ \mu$ injektiv
$\forall\ \alpha$,
$\exists\ \nu : B \to I$
mit $\alpha = \nu\mu$.

(Hier sind β und ν nicht eindeutig).

Falls R ein HIR, so gelten in R-Mod:

(a) P ist projektiv $\iff$ P ist frei

(b) I ist injektiv $\iff$ I ist <u>dividierbar</u>:

(Ein Modul M in R-Mod, R HiR heisst dividierbar, falls zu jedem $m \in M$ und $r \in R \setminus 0$, $\exists\ n \in M$ mit $rn = m$).

Zum Beispiel $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}\text{-Mod}$ sind dividierbar;
so folgt $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-,\mathbb{Q}) = 0 = \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$.

<u>Referenz</u>: Hilton & Stammbach, "A course in Homological Algebra", Springer, 2. Aufl. 1997.

<u>4.11 Satz</u>: Sei F ein Körper; dann gilt $\mathrm{Ext}_F^1 = 0$ #

<u>4.12 Bemerkung</u>: Für R HiR gilt $\mathrm{Ext}_R^n = 0$ für $n > 1$.
Gleiches Beispiel wie für Tor zeigt: $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{F}_2[C_2]}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \neq 0$ $\forall n \geq 1$.

4.13 Theorem (Universelle Koeffizienten dual): Sei (X, A) ein Paar von Räumen, R ein H.I.R. Sei $M \in R$-Mod.
Dann existiert eine natürliche exakte Folge

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_R(H_{n-1}(X,A;R), M) \to H^n(X,A;M) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_R(H_n(X,A;R), M) \to 0$$

wobei β wie folgt definiert ist:

Ist $\varphi \in S^n(X,A;M)$ ein Kozykel und $\alpha \in S_n(X,A;\mathbb{Z})$ ein Zykel, so setze $\beta([\varphi])([\alpha]) := \varphi(\alpha)$.

Diese exakte Folge spaltet unnatürlich.

Beweis: die Aussage gilt eigentlich für jeden Kettenkomplex $(C_\cdot, d_\cdot)$ von freien R-Moduln (statt $S_*(X,A;R) = S_*(X,A) \otimes_{\mathbb{Z}} R$)
Der Beweis läuft genau wie Theorem 3.22: ersetze $\otimes_{\mathbb{Z}} M$ $(\otimes_R M)$ mit $\mathrm{Hom}_R(-;M)$ und $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}(R)}(-, M)$ mit $\mathrm{Ext}_1^R(-, M)$.
#

4.14 Korollar: Sei F ein Körper; dann gilt

$$H^*(X,A;F) = \mathrm{Hom}_F(H_*(X,A;F), F)$$

(duale Vektorräume).
Gilt $\mathrm{Char}(F) = 0$, so folgt $H^*(X,A;F) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_*(X,A;\mathbb{Z}), F)$
Beweis: die erste Aussage folgt aus 4.13 und $\mathrm{Ext}^1_F = 0$.
Die zweite folgt aus F ein $\mathbb{Q}$-modul, also dividierbar / $R = \mathbb{Z}$, also $\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(-, F) = 0$.
#

Nun können wir die Eilenberg-Steenrod-Axiome für Kohomologie ausdrücken und beweisen.
Ist $(X,A) \xrightarrow{f} (Y,B)$, so erhält man
$f^*: H^n(Y,B;M) \to H^n(X,A;M)$ für alle n; Außerdem haben wir einen Rand Homomorphismus:
$\partial: H^n(A;M) \to H^{n+1}(X,A;M)$, der von der kurzen exakten Folge von Kokettenkomplexen (exakt weil $S_*(-)$ frei!) gewonnen ist:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X,A), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X), M) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(A), M) \to 0.$$

4.15 Theorem (Eilenberg-Steenrod Axiome für sing. Kohomologie):
Sei M eine abelsche Gruppe. Für $n \in \mathbb{Z}$ ist
$$H^n(-;M) : Top^2 \longrightarrow Ab$$
ein Kofunktor, und $\delta^n : H^n(-;M) \circ j \Rightarrow H^{n+1}(-,M)$
ist eine natürliche Transformation, wobei $j: Top^2 \to Top^2$,
$(X,A) \mapsto (A,\emptyset)$. Es gelten:

(a) Homotopie-Invarianz: $f \simeq g : (X,A) \to (Y,B)$ rel A,
so folgt $f^* = g^* : H^n(Y,B;M) \to H^n(X,A;M)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Exaktheit: die Inklusionen $(A,\emptyset) \hookrightarrow (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$
induzieren eine lange exakte Folge
$$\cdots \to H^n(X,A;M) \to H^n(X;M) \to H^n(A,M) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X,A;M) \to \cdots$$

(c) Ausschneidung: Ist $(X;A,B)$ mit $A,B \subset X$, $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$,
so induziert die Inklusion $(A, A\cap B) \to (X, X\cap B)$ einen
Isomorphismus $H^n(X, X\cap B; M) \xrightarrow{\cong} H^n(A, A\cap B; M)$, $\forall n$

Beweis: · Funktorialität: folgt aus "$S_*(-)$ ist ein Funktor".
· Natürlichkeit von ∂^n: wie für Homologie.

(a) Wir haben für Homologie bewiesen: f_* und $g_* : S_*(X,A) \to$
$\to S_*(Y,B)$ sind dann kettenhomotop: $\exists\, h_* : S_*(X,A) \to$
$\to S_{*+1}(Y,B)$ mit $d \circ h_* + h_* \circ d = f_* - g_*$. Verwendet man
den additiven Kofunktor $Hom_{\mathbb{Z}}(-,M)$, so erhält man eine
Koketten-Homotopie $h^* : S^{*+1}(Y,B;M) \to S^*(X,A;M)$,
mit $h^* \circ \delta + \delta \circ h^* = f^* - g^*$. Es folgt $f^* = g^*$ auf $H^*(Y,B;M)$.

(b) Entspricht die kurze ex. Folge von (Ko)kettenkomplex, die oben angegeben worden ist (S_* frei).

(c) Hier kann man einfach Ausscheidung für Homologie verwenden, zusammen mit 4.13 und Fünferlemma. #

Als weitere Eigenschaften haben wir:

4.16 Satz Sei $(X, A) = \coprod_{i \in I} (X_i, A_i)$ (disjunkte Vereinigung). Die Inklusionen $(X_i, A_i) \hookrightarrow (X, A)$ induzieren Hom. in Kohomologie, die ein Isomorphismus

$$H^*(X, A; M) \xrightarrow{\cong} \prod_{i \in I} H^*(X_i, A_i; M)$$

bestimmen (durch der univ. Eig. des Produktes).

Beweis: Wir haben für alle $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$S^n(X, A; M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X, A), M) \underset{①}{\xrightarrow{\cong}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_i S_n(X_i, A_i), M)$$
$$\underset{②}{\xleftarrow{\cong}} \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_n(X_i, A_i), M) =: \prod_i S^n(X_i, A_i; M).$$

Der Iso ① ist vom Iso $\bigoplus_i S_n(X_i, A_i) \xrightarrow{\cong} S_n(X, A)$ induziert. Der Iso ② ist der algemeine Iso $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\bigoplus_i A_i, B) \cong \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A_i, B)$, der die Universelle Eigenschaft (oder Definition) von $\oplus$ entspricht. Beide sind verträglich mit dem Rand, so dass wir ein Iso von Kokettenkomplexen $(S^*(X, A; M), \delta^*) \cong \prod_i (S^*(X_i, A_i; M), \delta^*)$ erhalten, der den gew. Iso in Kohomologie induziert. #

4.17 Theorem (Mayer-Vietoris): Sei X ein Raum, A, B Teilräume mit $X = \mathring{A} \cup \mathring{B}$. Dann haben wir eine natürliche exakte Folge

$$\cdots H^n(X; M) \xrightarrow{\psi} H^n(A; M) \oplus H^n(B; M) \xrightarrow{\phi} H^n(A \cap B; M) \xrightarrow{\partial} H^{n+1}(X; M) \to \cdots$$

wobei $\psi([\alpha]) = (i_1^*[\alpha], i_2^*[\alpha])$ und

$\phi([\beta], [\gamma]) = j_1^*[\beta] - j_2^*[\gamma])$, für
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & A \arrow[dr, hook, "i_1"] & \\ A \cap B \arrow[ur, hook, "j_1"] \arrow[dr, hook, "j_2"'] & & X \\ & B \arrow[ur, hook, "i_2"'] & \end{tikzcd}.$$

Beweis: Analog zum Beweis von 5.52 (WS 11). Wir haben ein Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\partial"] & H^n(X, B; M) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H^n(X; M) \arrow[r, "i_2^*"] \arrow[d, "i_1^*"] & H^n(B; M) \arrow[r] \arrow[d, "j_2^*"] & H^{n+1}(X, B; M) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\cong"] & {} \\ \cdots \arrow[r, "\partial"] & H^n(A, A \cap B; M) \arrow[r] & H^n(A; M) \arrow[r, "j_1^*"'] & H^n(A \cap B; M) \arrow[r] & H^{n+1}(A, A \cap B; M) \arrow[r] & {} \end{tikzcd}$$

mit angegebenen $\downarrow\cong$ dank Ausschneidung; 5.51 liefert dann 4.17. #

4.18 Definition: Sei X ein CW-Komplex, Π eine ab. Gruppe. Wir definieren den zellulären Kokettenkomplex $(C^*_{cw}(X;\Pi), \delta^*)$ durch

$$\delta^n : C^n_{cw}(X;\Pi) := H^n(X^{(n)}, X^{(n-1)};\Pi) \xrightarrow{j^*} H^n(X^{(n)};\Pi) \xrightarrow{\partial}$$
$$\to H^{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)};\Pi) =: C^{n+1}_{cw}(X;\Pi).$$

4.19 Theorem: Sei X ein CW-Komplex, Π eine ab. Gruppe.

(a) Wir haben ein Isomorphismus

$$H^{n+1}(X;\Pi) \xrightarrow{\cong} H^{n+1}(C^*_{cw}(X;\Pi);\delta^*)$$

(natürlich bezüglich zellulären Abbildungen.

(b) Wir haben ein natürliche Isomorphismus

$$C^*_{cw}(X;\Pi) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C^{cw}_*(X), M)$$

(als Kokettenkomplexe; ie. $\cong$ gradweise, verträglich mit Korand).

__Beweis__: (a) Wie Theorem 2.6, "dual": entsprechende Diagramm in Kohomologie, + Jagd. Entsprechend Gruppe sind 0 dank universelle Koeffizienten dual.

(b) Wir haben ein kom. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^n(X^{(n)}, X^{(n-1)};\Pi) \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\beta", "\cong"'] & H^n(X^{(n)};\Pi) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\beta"] & H^{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)};\Pi) \arrow[d, "\beta", "\cong"'] \\
\mathrm{Hom}(H_n(X^{(n)}, X^{(n-1)}),\Pi) \arrow[r, "(d_*)^*"'] & \mathrm{Hom}(H_n(X^n),\Pi) \arrow[r, "(\partial_*)^*"'] & \mathrm{Hom}(H_{n+1}(X^{(n+1)}, X^{(n)}), M)
\end{tikzcd}$$

Die Äussere β sind Iso dank 4.13 (Ext $= 0$ weil frei).
Der linke Diagramm kommutiert dank Natürlichkeit von β.
Der rechte Diagramm kommutiert dank Verträglichkeit von β mit dem Rand operator (Aufgabe 12.1). #

Mit Hilfe von Theorem 4.19 ist es nun leicht, die Kohomologie von einem CW-Komplex X zu berechnen, deren zellulären Kettenkomplex $C^{cw}_*(X)$ bekannt ist. Ebenso, kennen wir $H_*(X;\mathbb{Z})$ so ist $H^*(X;\Pi)$ (bis auf Erweiterung) dank 4.13 auch bekannt. Der Vorteil von $H^*(-;R)$: Cup-Produkt.

Zur Erinnerung (3.41) aus den Alexander-Whitney Homomorphismus:

$0 \le p, q \le n$: $\quad a^n_p : \Delta^p \to \Delta^n$, $e_i \mapsto e_i$, $0 \le i \le p$

$\quad b^n_q : \Delta^q \to \Delta^n$, $e_i \mapsto e_{n-q+i}$ $\quad 0 \le i \le q$.

<u>4.20 Definition + Lemma</u>: Sei X ein Raum, R ein kom. Ring.
Wir definieren $S^p(X;R) \oplus S^q(X;R) \xrightarrow{\cup} S^n(X;R)$ $(n = p+q)$
durch $(\varphi \cup \psi)(\alpha) = \varphi(\alpha \circ a^n_p) \cdot \psi(\alpha \circ b^n_q)$ $\quad (\cdot = \text{Prod. in } R)$

Es gilt $\quad \delta^n(\varphi \cup \psi) = (\delta^p \varphi) \cup \psi + (-1)^p \varphi \cup \delta^q(\psi) \quad (*)$

woraus folgt, dass $\cup$ ein Homomorphismus

$$H^p(X;R) \oplus H^q(X;R) \to H^{p+q}(X;R)$$

definiert: <u>das cup-Produkt</u> ($\cup$ = cup = Tasse).

<u>Beweis</u>: $(*)$ direkte Berechnung (Aufgabe). Aus $(*)$ folgt, dass falls φ <u>und</u> ψ Kozykeln sind, so ist $\varphi \cup \psi$ auch ein Kozykel, und dass wenn φ <u>oder</u> ψ ein Korand ist, so ist $\varphi \cup \psi$ ein Korand; also ist $\cup$ in Kohomologie wohldefiniert. #

<u>4.21 Satz</u>: Sei R ein kommutativer Ring; das cup-Produkt ist R-bilinear und induziert ein natürliches, assoziatives Produkt.

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(X;R) \to H^*(X;R), \qquad X \in Top.$$

Also ist $(H^*(-;R), \cup)$: $Top \to R$-Algebren ein Kofunktor von Räumen nach (assoziativen) R-Algebren. Ist R unitär, so ist $H^*(-;R)$ auch unitär.

<u>Beweis</u>: die <u>Bilinearität</u> folgt direkt aus der Distributivität und Kommutativität des Produktes in R: zum Beispiel:

$$\big(\varphi \cup (r_1\psi_1 + r_2\psi_2)\big)(\alpha) = \varphi(\alpha \circ a^n_p) \cdot \big(r_1 \psi_1(\alpha\, b^n_q) + r_2 \psi_2(\alpha\, b^n_q)\big)$$

$$= \big(r_1(\varphi \cup \psi_1) + r_2(\varphi \cup \psi_2)\big)(\alpha).$$

Die <u>Assoziativität</u>: φ, ψ, θ in grad p, q, r, $n = p+q+r$;

$$\varphi \cup (\psi \cup \theta)(\alpha) = \varphi(\alpha \circ a^n_p) \bullet \psi(\alpha \circ b^n_{q+r}\, a^{q+r}_q) \cdot \theta(\alpha\, b^n_{q+r}\, b^{q+r}_r) =$$

$$= \varphi(\alpha \circ a^n_{p+q} \circ a^{p+q}_p) \cdot \psi(\alpha \circ a^n_{p+q} \circ b^{p+q}_q) \cdot \theta(\alpha \circ b^n_r)$$

(folgt aus Assoz. von R und Relationen für a, b).

Natürlichkeit: $f : X \to Y$, $\varphi \in S^p(Y;R)$, $\psi \in S^q(Y;R)$, $\alpha \in S^{p+q}(X;R)$, so gilt $f^*(\varphi \cup \psi)(\alpha) = (\varphi \cup \psi)(f_*\alpha) = \varphi(f_* \alpha a_p^{p+q}) \cdot \psi(f_* \alpha b_q^{p+q}) = (f^*\varphi)(\alpha a_p) \cdot (f_* \psi)(\alpha b_q) = [(f^*\varphi) \cup (f^*\psi)](\alpha)$. #

4.22 Definition: Eine Diagonale-Approximation für $S_*(\,)$ ist ein natürlicher Homomorphismus $\Delta_* : S_*(X) \to S_*(X) \otimes S_*(X)$ mit $\Delta_0 : S_0(X) \to S_0(X) \otimes S_0(X)$, $\sigma \mapsto \sigma \otimes \sigma$ für alle $\sigma \in \mathrm{Sing}_0(X)$.

4.23 Beispiel $S_*(X) \xrightarrow{D_*} S_*(X \times X) \xrightarrow{AW_*} S_*(X) \otimes S_*(X)$, wobei $D : X \to X \times X$, $x \mapsto (x,x)$ die Diagonal ist, und AW_* ist der Alexander-Whitney-Hom 3.41.

4.24 Lemma: Eine Diagonale Approx. ist eindeutig bis auf natürliche Ketten-Homotopie.

Beweis: das folgt aus 3.39: Azyklische Modellen: $S_n(-)$ ist frei mit Modellen in $\{\Delta^n\}$, $\forall n \geq 0$, und $H_n(S_*(\Delta^k) \otimes S_*(\Delta^k)) = 0 \quad \forall n \geq 1, \quad k = n, n+1$. #

4.25 Korollar Das cup-produkt gleicht dem Homomorphismus

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(X;R) \xrightarrow{\ \cup\ } H^*(X;R),$$

der vom Homomorphismus von Koketten komplexen

$$S^*(X;R) \otimes_R S^*(X;R) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} S_*(X); R)$$
$$\downarrow \mathrm{Hom}(\Delta_*, id)$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X); R) = S^*(X;R)$$

induziert ist, wobei Δ_* irgendeine Diagonale Approximation ist. Hier ist π durch $\pi(\varphi \otimes \psi)(\alpha \otimes \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$ definiert.

Beweis: unsere Definition 4.20 von $\cup$ ist genau $\mathrm{Hom}(AW_* D_*, id) \circ \pi$. Dank 4.24 hängt dies nicht von dieser Wahl von Δ_*, bis auf Homotopie. #

4.26 Korollar Das cup-Produkt ist (graduiert-) kommutativ:

$$(\psi \smile \varphi) = (-1)^{|\psi||\varphi|} (\varphi \smile \psi).$$

Beweis: Wir haben ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S^*(X) \otimes S^*(X) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tau"] & \mathrm{Hom}(S_*(X) \otimes S_*(X); R) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\tau, id)"] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(\Delta_* \circ \tau, id)"] & \\
S^*(X) \otimes S^*(X) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Hom}(S_*(X) \otimes S_*(X); R) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\Delta_*, id)"'] & \mathrm{Hom}(S_*(X), R)
\end{tikzcd}$$

wobei $\tau(\alpha \otimes \beta) = (-1)^{|\alpha||\beta|} \beta \otimes \alpha$. Aber $\Delta_* \circ \tau$ ist auch eine Diagonale-Approximation, wenn Δ_* einer ist. #

In Kohomologie haben wir auch ein "externes" Produkt

4.27 Definition: Das Kreuz Produkt: $H^p(X;R) \otimes_R H^q(Y;R) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times Y; R)$ ist in Kohomologie durch die Ab. von Kokettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
S^*(X;R) \otimes_R S^*(Y;R) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X) \otimes S_*(Y), R) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(AW_*, id)"] & \\
& \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(S_*(X \times Y), R) \arrow[r, equal] & S^*(X \times Y; R)
\end{tikzcd}$$

oder äquivalenterweise

$$S^*(X;R) \otimes_R S^*(Y;R) \xrightarrow{p_1^* \otimes p_2^*} S^*(X \times Y; R) \otimes_R S^*(X \times Y; R) \xrightarrow{\smile} S^*(X \times Y; R).$$

Hier $\pi(\varphi \otimes \psi)(\alpha \otimes \beta) = \varphi(\alpha) \cdot \psi(\beta)$ und $X \xleftarrow{p_1} X \times Y \xrightarrow{p_2} Y$ sind die Projektionen.

4.28 Bemerkungen: Wir haben auch relative Versionen des Cup- und Kreuz-Produkts:

(a) $H^p(X,A;R) \otimes_R H^q(Y,B;R) \xrightarrow{\times} H^{p+q}((X,A) \times (Y,B); R)$

Unter der Voraussetzung auf die Paare, die auch in 3.51 nötig sind.

(b) $H^p(X,A;R) \otimes_R H^q(X,B;R) \xrightarrow{\smile} H^{p+q}(X, A \cup B; R)$

unter der Voraussetzung, dass $(X; A, B)$ ein Ausschneidungstripel ist (Eigenschaften aus 3.49 gelten).

Hier ist leicht zu sehen: $S^*(X;R) \otimes_R S^*(X;R) \xrightarrow{\smile} S^*(X;R)$ induziert $S^*(X,A;R) \otimes_R S^*(X,B;R) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\frac{S_*(X)}{S_*(A) + S_*(B)}; R\right)$.

4.29 Theorem (Universelle Koeffizienten, schwache Kohomologie Version):
Sei (X,A) ein Paar so dass $H_n(X,A;\mathbb{Z})$ ein endlich-erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul ist, für alle $n \geq 0$ (wir sagen: (X,A) ist von endlichen Typ).
Sei Π eine Abelsche Gruppe. Dann haben wir eine kurze exakte Folge

$$0 \to H^n(X,A;\mathbb{Z}) \otimes \Pi \xrightarrow{\alpha} H^n(X,A;\Pi) \to \mathrm{Tor}(H^{n+1}(X,A;\mathbb{Z}), \Pi) \to 0,$$

die natürlich (unter diese Bedingungen) ist. Sie spaltet unnatürlich.

4.30 Theorem (schwache Künneth Formel für Kohomologie):
Seien (X,A), (Y,B) Paare von endlichen Typ, so dass die Voraussetzung aus 3.51 gilt. Dann haben wir eine kurze exakte Folge

$$0 \to \sum_{p+q=n} H^p(X,A;\mathbb{Z}) \otimes H^q(Y,B;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\times} H^n((X,A)\times(Y,B);\mathbb{Z}) \to$$
$$\to \sum_{k+l=n+1} \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(H^k(X,A;\mathbb{Z}), H^l(Y,B;\mathbb{Z})) \to 0$$

die natürlich (unter diese Bedingungen) ist. Sie spaltet unnatürlich.

Beweisskizze: Die Voraussetzung, dass die Paare von endlichen Typ sind, ist wegen folgenden Tatsache notwendig: $S^*(X,A;\mathbb{Z})$ ist in allg. kein Kokomplex von freien Moduln (vergleiche Aufgabe 12.4).
Wenn (X,A) end. Typ hat, so kann man einen Kettenkomplex E_* finden mit:
(a) E_n frei und endlich erzeugt $\forall n$ ($\Rightarrow$ Ebenso $\mathrm{Hom}(E_n;\mathbb{Z})$)
(b) Eine Ketten-Homotopie Äquivalenz $f_*: E_* \to S_*(X,A)$ existiert.
Dann laufen die Beweise "algebraisch" wie in 3.22 (für 4.29) und 3.31 (für 4.30); Konstruktion von E_*:
wähle $F_n \subset Z_n(X,A)$ endlich erzeugt (und autom. frei) mit $F_n \subset Z_n(X,A) \to H_n(X,A;\mathbb{Z})$ surjektiv (Komposition i_n): Sei $F_n' = \ker(i_n)$.

$$\text{Setze } E_n = F_n \oplus F_{n-1}' \xrightarrow{f_n} S_n(X,A), \quad (a,b) \mapsto a + h_{n-1}(b)$$
$$\downarrow d$$
$$E_{n-1} = F_{n-1} \oplus F_{n-2}'$$

mit $h_{n-1}: F_{n-1}' \to S_n(X,A)$ so dass $d h_{n-1}(b) = b$. #

4.31 Bemerkung Das Kreuz-Produkt

$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R) \xrightarrow{\times} H^*(X\times Y;R)$$

ist ein Homomorphismus von R-Algebren (unter cup), wenn die linke Seite mit dem Produkt

$$\left(H^*(X;R) \otimes_R H^*(Y;R)\right) \otimes_R \left(H^*(X;R) \otimes H^*(Y;R)\right)$$
$$\downarrow 1\otimes\tau\otimes 1$$
$$H^*(X;R) \otimes_R H^*(X;R) \otimes H^*(Y;R) \otimes H^*(Y;R) \xrightarrow{\cup\otimes\cup} H_*(X;R) \otimes H_*(Y;R)$$

In der Tat, rechnen wir $(a\times b)\cup(c\times d) = (p_1^*a \cup p_2^*b)\cup$
$\cup\,(p_1^*c \cup p_1^*d) = (-1)^{|b||c|}\, p_1^*a \cup p_1^*c \cup p_2^*b \cup p_2^*d =$
$(-1)^{|b||c|}\,(a\cup c)\times(b\cup d)$.

4.32 Definition: Sei (X,A) ein Paar von Räumen, R ein kommutativer Ring, $n\geq 0$. Wir haben ein Homomorphismus

$$S^p(X,A;R) \otimes_R S_p(X,A;R) \xrightarrow{\cong} S^p(X,A;R) \otimes_{\mathbb{Z}} S_p(X,A)$$
$$\xrightarrow{ev} R \quad \text{wobei} \quad ev(\varphi\otimes\alpha) = \varphi(\alpha).$$

(Der erste Isomorphismus ist durch $A\otimes_R (M\otimes_{\mathbb{Z}} R) \longrightarrow A\otimes_{\mathbb{Z}} M$ gegeben, A ein R-Modul, M ein $\mathbb{Z}$-Mod. $(a\otimes m\otimes r) \longmapsto (ar\otimes m)$)

Er induziert ein wohl-definierten Homomorphismus

$$H^p(X,A;R) \otimes_R H_p(X,A;R) \longrightarrow R, \quad (\varphi\otimes\alpha)\mapsto\langle\varphi,\alpha\rangle$$

das man <u>Kronecker-Produkt</u> nennt.

4.33 Bemerkung: Der Homomorphismus $\beta: H^p(X,A;R)\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(H_p(X,A;R),R)$ ist als $\beta(\varphi)(\alpha) = \langle\varphi,\alpha\rangle$ definiert.

4.34 Definition: Sei X ein Raum, $A,B\subset X$ mit Voraus. 3.51, R ein kommutativer Ring. Das cap-Product

$$H^p(X,A;R) \otimes_R H_q(X,A\cup B;R) \xrightarrow{\ \cap\ } H_{q-p}(X,B;R)$$

ist von der Abbildung von Kettenkomplexen

$$S^*(X,A;R) \otimes_R S_*(X,A\cup B;R) \xrightarrow{1\otimes D_*} S^*(X,A;R)\otimes S_*((X,A)\times(X,B);R)$$
$$\xrightarrow{1\otimes EZ_*} S^*(X,A;R) \otimes_R S_*(X,A;R)\otimes S_*(X,B;R) \xrightarrow{\langle\ \rangle\otimes 1} S_*(X,B;R)$$

induziert (Kettenkomplexe: ersetze $S^*(X,A;R)$ durch $S_{-*}(X,A:R)$ und benutze die Def. von $\otimes_R$ für Kettenkomplexe. Damit $\langle\,,\rangle$ eine Abbildung von Kettenkomplexen wird, muss man $\delta(\varphi)(\alpha) = (-1)^{|\varphi|+1}\varphi(d\alpha)$ verlangen:
Dann gilt $d\langle\varphi\otimes\alpha\rangle = \langle\delta\varphi\otimes\alpha + (-1)^{|\varphi|}\varphi\otimes d\alpha\rangle =$
$(-1)^{|\varphi|+1}\varphi(d\alpha) + (-1)^{|\varphi|}\varphi(d\alpha) = 0$, wie gewünscht ($(R, d=0)$ als Ziel).)

<u>4.35 Bemerkungen</u>: (a) Benutzt man $\Delta_* = AW_*\circ D_*$, so ist
$$[\varphi]\cap[\alpha] = \begin{cases}\varphi(\alpha\circ a^q_p)\cdot\alpha\circ b^q_{q-p}, & 0\le p\le q\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$
Das Cap-Produkt ist also durch die Formel
$$\psi(\varphi\cap\alpha) = (\psi\cup\varphi)(\alpha) \quad \text{charakterisiert,}$$
wobei $\psi\in H^{q-p}(X,B;R)$, $\varphi\in H^p(Y,A:R)$, $\alpha\in H_q(X,A\cup B:R)$.

(b) Natürlichkeit: sei $f: X\to Y$ mit $f(A)\subset C$, $f(B)\subset D$.
$$\begin{tikzcd}
H^p(Y,C;R)\otimes_R H_q(X,A\cup B:R) \arrow[r, "1\otimes f^*"] \arrow[d, "f^*\otimes 1"'] & H^p(Y,C;R)\otimes H_q(Y,C\cup D:R) \arrow[d, "\cap"] \\
H^p(X,A:R)\otimes_R H_q(X,A\cup B:R) \arrow[dr, "\cap"'] & H_{q-p}(Y,D:R) \\
& H_{q-p}(X,B;R) \arrow[u, "f_*"']
\end{tikzcd}$$
In Formeln: $f_*(f^*(\varphi)\cap\alpha) = \varphi\cap f_*(\alpha)$.

Nun möchten Poincaré-Dualität beweisen.

<u>Sei R ein kommutativer Ring mit Einheit</u> (gilt bis Ende des Kapitels). Sei M^n ein kompakte, n-Dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, die <u>R-Orientiert</u> ist. Dann haben wir ein Isomorphismus
$$D: H^p(M^n, R)\to H_{n-p}(M^n, R)$$
(gegeben durch $\varphi\mapsto\varphi\cap[M]$, wobei $[M]\in H_n(M^n,R)$ die <u>fundamental Klasse</u> ist). Hauptbeispiele: $R=\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{F}_2$.
Wir führen die notwendige Begriffe erst ein.

Bemerkung: es ist leicht, davon sich zu überzeugen: eine Orientierung von $\mathbb{R}^n$ entspricht die Wahl eines Erzeugers der freien Gruppe $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}; \mathbb{Z}) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Das kann man auch (lokal) für Mannigfaltigkeiten verwenden (Tangentialraum wird nicht benötigt).

4.36 Notation: Sei $M = M^n$ eine n-dimensionale topologische Mannigf. (nicht notwendigerweise kompakt aber ohne Rand), für den Rest des Kapitels. Ist $A \subset M$, so schreiben wir $H_k(M|A) := H_k(M, M \setminus A; R)$. Falls $A \subset B \subset M$ so notieren wir $j_A^B : (M, M \setminus B) \hookrightarrow (M, M \setminus A)$ die Inklusion, und ebenso das induzierte Homomorphismus

$$j_A^B : H_k(M|B) \to H_k(M|A)$$

Falls $A = \{x\}$ schreiben wir einfach j_x^B und $H_k(M|x)$.

4.37 Lemma: Sei $x \in M$, und sei W eine Umgebung von x in M. Dann existiert eine offene Umgebung U von x, mit $x \in U \subset W$, so dass wir Isomorphismen

$$H_n(M|U) \xrightarrow[\cong]{j_x^U} H_n(M|x) \cong R \quad \text{haben.}$$

Beweis: Sei V eine Karte Umgebung von x mit $x \in V \subset W$ und $(V, x) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}^n, 0)$ ein Homöo. Sei $U = h^{-1}(\mathring{D}^n)$.
Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(M|U) & \xleftarrow[\cong]{i_*} & H_n(V|U) & \xrightarrow[\cong]{h_*} & H_n(\mathbb{R}^n|\mathring{D}^n) & \cong & H_{n-1}(S^{n-1}) \\
\downarrow j_x^U & & \downarrow j_x^U & & \downarrow j_0^{\mathring{D}^n} & & \downarrow \cong \\
H_n(M|x) & \xleftarrow[\cong]{j_*} & H_n(V|x) & \xrightarrow[\cong]{h_*} & H_n(\mathbb{R}^n|0) & \cong & H_{n-1}(S^{n-1})
\end{array}$$

Die Inklusion $i: (V, V \setminus U) \to (M, M \setminus U)$ induziert ein Isomorph. dank Ausschneidung, ebenso $j: (V, V \setminus x) \hookrightarrow (M, M \setminus x)$. #

4.38 Definition (Orientierung): (a) Eine lokale R-Orientierung in $x \in M$ ist ein Erzeuger α_x von $H_n(M|x)$ (als freien R-Modul von Rang 1).

(b) Eine <u>lokale R-Orientierung auf $A \subset M$</u> ist eine Klasse $\alpha_A \in H_n(M|A)$, sodass $j_x^A(\alpha_A)$ eine lokale R-Orient. in x ist.

(c) Ein <u>R-Orientierungssystem</u> für M ist eine Familie $\{(U_i, \alpha_i)\}_{i\in I}$, mit $\{U_i\}_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M und $\alpha_i \in H_n(M|U_i)$ eine lokale R-Orientierung auf U_i, so dass $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$ für alle i, j, x mit $x \in U_i \cap U_j$.
Zwei R-Orient.-Systeme $\{(U_i, \alpha_i)\}$, $\{V_j, \beta_j\}$ sind äquivalent, falls ihre Vereinigung noch ein R-Orient.system ist.

(d) Eine <u>R-Orientierung</u> von M ist eine Äquivalenzklasse von R-Orientierungssystem. Existiert eine R-Orientierung, so heißt M <u>R-orientierbar</u>. Ist eine gewählt, so ist M <u>R-orientiert</u>.

<u>4.39 Bemerkungen</u>: (a) Eine lokale R-Orientierung $\alpha_x \in H_n(M|x)$ bestimmt eine lokale R-Orientierung auf U für eine offene Umgebung U, die man so klein wie gewünscht wählen kann: wähle U wie in 4.37. Eine R-Orientierung von M entspricht genau einer Wahl von Erzeugern $\{\alpha_x \in H_n(M|x)\}_{x\in M}$, die lokal verträglich sind in diesem Sinn.

(b) Ist M R-orientiert und $V \subset M$ offen, so erbt V eine R-Orientierung: in der Tat, ist $\{(U_i, \alpha_i)\}$ ein R-Orient.-System für M, der $\alpha_x \in H_n(M|x)$ bestimmt, so wähle $\beta_x \in H_n(V|x) \xrightarrow{\cong} H_n(M|x)$ mit $\beta_x \mapsto \alpha_x$. Die β_x sind dann lokal verträglich dank Lemma 4.37, weil die α_x es sind. #

(c) M ist R-orientier(bar)(t), wenn alle seine Zusammenhangskomponenten es sind.

(d) Ist M zusammenhängend und R-orientierbar, so sind zwei Orientierungen gleich, wenn sie in einem Punkt die Gleiche lokale R-Orientierung bestimmen.

<u>4.40 Beispiele</u>: (a) jede Mannigfaltigkeit M besitzt eine eindeutige $\mathbb{F}_2$-Orientierung: $H_n(M|x;\mathbb{F}_2)$ besitzt genau ein Erzeuger.

(b) S^n ist R-orientierbar $\forall R$: $H_n(S^n) \xrightarrow{j_x^{S^n}} H_n(S^n|x)$ ist ein Iso $\forall x$, da $S^{n-1} \setminus x \simeq *$.

(c) Ist M $\mathbb{Z}$-orientierbar (t), so ist M R-orientierbar (t) für alle R: Universelle Koeffizienten!

Ebenso: gilt $2=0$ in R, so ist jede Mannigfaltigkeit R-orientierbar.

Aus (c) folgt dass $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{F}_2$ die Hauptbeispiele für R sind.

<u>4.41 Definition</u>: Wenn $R=\mathbb{Z}$ sagt man einfach Orientierung, Orientiert, etc statt R-Orientierung, etc...

<u>4.42 Satz</u>: Sei M zusammenhängend und nicht orientierbar. Dann besitzt M eine zwei-blättrige Überlagerung $p: E \to M$, wobei E eine orientierbare top. Mannigfaltigkeit (der selben Dimension) ist.

<u>Beweis</u>: Sei $E = \{(x, \alpha_x) \mid x \in M, \alpha_x \text{ lokale Orient. in } x\}$ (also $\alpha_x \in H_n(M|x;\mathbb{Z})$). Als Basis einer Topologie auf E wählen wir $\mathcal{B} = \{O(U, \alpha_U) \mid U \subset X \text{ offen}, \alpha_U \text{ lokal. Or. auf } U\}$ mit $O(U,\alpha_U) = \{(x, \alpha_x) \mid x \in U, \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}$.

Es folgt direkt aus Lemma 4.37, dass $\mathcal{B}$ in der Tat eine Basis ist. Sei $P: E \to X$, $(x,\alpha_x) \mapsto x$. Dann ist $P|: O(U,\alpha_U) \to U$ ein Homeo ($V \subset U$ offen $\Rightarrow$ $(P|)^{-1}(V) = O(V, j_V^U(\alpha_U))$, was $\in \mathcal{B}$ dank 4.37).

Also ist P eine Überlagerung; wir haben zwei Blätter: $P^{-1}(x) = \{(x,\alpha_x), (x,-\alpha_x)\}$.

<u>E ist orientierbar</u>: für $x \in M$ wähle U_x wie 4.37, mit $j_x^{U_x}$ ein Iso. Für $e = (x, \alpha_x) \in E$, sei $\alpha_e = (j_x^{U_x})^{-1}(\alpha_x)$ und $O_e = (U_x, \alpha_e)$. Dann

ist $\{(O_e, \alpha_e)\}_{e \in E}$ ein Orientierungssystem von E.
Ist M nicht zusammenhängend, so folgt $E = M \amalg M$, und die Einschränkung $p| : M \to M$ ist ein Homöo, woraus folgt, dass M orientierbar wäre. Also ist M zusammenhängend. #

4.43 Bemerkung: wenn M orientierbar ist so funktioniert die gleiche Konstruktion, und diesmal $E = M \amalg M$.

4.44 Korollar: Ist M einfach zusammenhängend, so ist M orientierbar.
Beweis: M nicht orientierbar $\overset{4.42}{\Longrightarrow}$ $p_*(\pi_1(E, e_0)) \subset \pi_1(M, x_0)$ ist eine Untergruppe von Index 2, also $\pi_1 M \neq 0$. #

4.45 Beispiele: $S^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2$, $S^1 \times S^1 \to K$ (Kleinsche Flasche) sind solche Überlagerungen.

Diese Konstruktion kann man etwas verallgemeinern. ↯ Koef in R!
4.46 Definition. Sei $E_R = \{(x, \gamma_x) \mid x \in M, \gamma_x \in H_n(M|x)\}$ mit der Topologie versehen, die durch der Basis ← nicht notw. Erzeuger!
$\mathcal{B} = \{O(U, \gamma_U) \mid U \subset X$ offen, $\gamma_U \in H_n(M|U)\}$
mit $O(U, \gamma_U) = \{(x, \gamma_x) \mid x \in U, j_x^U(\gamma_U) = \gamma_x\}$.
Sei $p: E_R \to M$, $(x, \gamma_x) \mapsto x$.
Es ist leicht zu prüfen (wie in 4.42) dass $E_R \xrightarrow{p} M$ eine Überlagerung ist (im allg. ist E_R nicht zusammenhängend).
Wir nennen (E_R, p) die R-Orientierungs-Überlagerung (R-O.Ü.) von M.

4.47 Bemerkungen: (a) Die Faser: $p^{-1}(x) = H_n(M|x)$
(b) Falls $R = \mathbb{Z}$ so ist $E \overset{\text{of.}}{\subset} E_{\mathbb{Z}}$ ein offener Teilraum; ($E \searrow M \swarrow E_{\mathbb{Z}}$)
(c) Für R allgemein geht das auch: betrachte $E_R \xrightarrow{\nu} R/\sim$
$\nu(x, \gamma_x) = [\gamma_x]$, wobei $r \sim s$ falls ein $u \in R^\times$ (invertierbare Elemente) existiert, mit $r = us$. Dann ist $E_R^\times = \nu^{-1}[1]$

ein offener Teilraum von E_R, und $p: E_R^\times \to M$ ist auch eine Überlagerung, mit $p^{-1}(x) \cong R^\times$. Also falls $(x, \gamma_x) \in E_R^\times$, so ist $\gamma_x \in H_n(M|x)$ ein Erzeuger.

(d) Wir haben $E_{\mathbb{F}_2} = M \times \mathbb{F}_2$ und $E_{\mathbb{F}_2}^\times = M$.

<u>4.48 Definition</u>: Sei $A \subset M$ ein Teilraum. Ein <u>Schnitt von $E_R \xrightarrow{p} M$ über A</u> ist eine stetige Ab. $s: A \to E_R$ mit $ps = id_A$. Sei ΓA die Menge aller Schnitte über A, versehen mit der R-Modul Struktur $(rs + ts')(a) = (a, rs_1(a) + ts_1'(a))$, wobei $s(a) = (a, s_1(a))$. Ein $s \in \Gamma M$ heißt ein <u>globaler Schnitt</u>. Seien $\Gamma^\times A$, $\Gamma^\times M$ die Teilmenge der Schnitte von $A \to E_R^\times$ (keine Moduln).

<u>4.49 Lemma</u> Wir haben eine bijektive Korrespondenz zwischen
(a) Lokale R-Orientierungen auf $A \subset M$ und $\Gamma^\times A$
(b) R-Orientierungen von M und $\Gamma^\times M$.

<u>Beweis</u>: 4.47 (c), 4.39 (a). #

<u>4.50 Lemma</u>: Die folgenden Aussagen sind äquivalent:
(a) M hat eine lokale R-Orientierung entlang A
(b) Als Überlagerung ist $E_R|A$ trivial: $\exists$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[rr, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & & A \times R \arrow[dl, "p_1"] \\ & A & \end{tikzcd}.$$

In diesem Fall ist $\Gamma A = Top(A, R)$, wobei R diskret ist, und $\Gamma A = R^{\pi_0(A)}$.

<u>Beweis</u>: (a) $\Rightarrow$ (b) Dank 4.49 ist ein $s \in \Gamma^\times(A)$ gegeben. Falls $(x, \gamma_x) \in p^{-1}(x)$, $x \in A$, so $\exists!\ \lambda_x \in R$ mit $\gamma_x = \lambda_x \cdot s_1(x)$. Definiere

$$h: p^{-1}(A) \to A \times R, \quad (x, \gamma_x) \mapsto (x, \lambda_x).$$

γ_x bestimmt γ_U für eine kleine Umgebung U von x in M, und $h: O(U, \gamma_U) \cap p^{-1}(A) \to (U \cap A) \times \{\lambda_x\}$ ist ein Homöo.

(b) $\Rightarrow$ (a) Gegeben h, wähle $s(x) = h^{-1}(x, 1)$. #

4.51 Lemma: Wir haben einen kanonischen Homomorphismus von R-Moduln $j_A : H_n(M|A) \to \Gamma(A)$ definiert durch $j_A(\alpha) = (x, j^A_x(\alpha))$, $x \in A$. Er ist natürlich bezüglich Inklusionen: $B \subset A$, so haben wir ein kom. Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_n(M|A) \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "j^A_B"'] & \Gamma(A) \arrow[d, "res"] \\ H_n(M|B) \arrow[r, "j_B"] & \Gamma(B) \end{tikzcd}$$

wobei $res(s) = s|_B$.

Beweis: das einzige, was nicht ganz offensichtlich ist, ist die Stetigkeit von $j_A(\alpha) : A \to p^{-1}(A)$; die folgt wieder aus 4.37. #

4.52 Definition: ein $s \in \Gamma A$ hat kompakten Träger falls $s|_{A \setminus K} = 0$ für ein $K \subset A$ kompakt. Sei
$\Gamma_c A = \{ s \in \Gamma A \mid s \text{ hat kompakten Träger} \}$, als Unter-$R$-Modul von ΓA.

4.53 Theorem: Sei $A \subset M$ abgeschlossen. Dann gelten:
(a) $H_q(M|A) = 0$ für $q > n$
(b) $j_A : H_n(M|A) \to \Gamma(A)$ ist injektiv mit Bild $\Gamma_c(A)$
Insbesondere $(A = M)$: $H_q(M) = 0$ für $q > n$, $j_M : H_n(M) \xrightarrow{\cong} \Gamma_c(M)$.

4.54 Korollar: Ist A zusammenhängend und nicht kompakt, so folgt $H_n(M|A) = 0$; Insbesondere $H_n(M) = 0$ falls M zusammenh. und nicht kompakt.

4.55 Korollar: Ist A kompakt und M R-orientierbar entlang A, so folgt $j_A : H_n(M|A) \xrightarrow{\cong} \Gamma(A) \cong R^{\pi_0 A}$.

Beweis: 4.53 und 4.50 #

4.56 Korollar: Sei M kompakt und zusammenhängend, und $R = \mathbb{Z}$ oder ein Körper. Dann gilt

$$H_n(M) \cong \begin{cases} R & \text{falls } M \text{ } R\text{-orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis: Falls M R-orientierbar ist, so folgt $H_n(M) \cong R$ aus 4.55.

Nehmen wir nun an, $H_n(M) \neq 0$; Dank 4.53 existiert also $0 \neq s \in \Gamma(M)$. Die Abbildung $M \xrightarrow{s} E_R \xrightarrow{\nu} R/\sim$ (ν: 4.47) ist konstant, weil M zusammenhängend und $R/\sim$ diskret. Sei $x \in M$, $\alpha_x \in H_n(M|x)$ gewählten Erzeuger, und sei $\lambda \in R$ mit $s_1(x) = \lambda \cdot \alpha_x$. R ist so gewählt, dass falls $\alpha'_x \in H_n(M|x)$ ein anderer Erzeuger ist, es gilt $\lambda \cdot \alpha_x = \lambda \cdot \alpha'_x \Rightarrow \alpha_x = \alpha'_x$. Also ist $y \mapsto (y, s_1(y)/\lambda)$ ein Schnitt von $p: E_R^\times \to M$, und M ist R-orientierbar. Also folgt $H_n(M) \cong R$. #.

4.57 Definition: Ist M kompakt, zusammenhängend und R-orientierbar, so haben wir gesehen, dass eine R-Orientierung von M durch ein Erzeuger α_M von $H_n(M) \cong \Gamma(M) \cong R$ eindeutig bestimmt ist. Diese Klasse α_M heißt die Fundamental Klasse des R-orientierten M.

4.58 Bemerkung: in diesem Fall bestimmt α_M die R-lokale Orientierungen in $x \in M$, durch $\alpha_x = j_x^M(\alpha_M)$.

Beweis von Theorem 4.53: Wir beweisen es schrittweise, für A immer allgemeiner. Es gilt offensichtlich: $J_A(\alpha)$ hat kompakten Träger. (siehe * unten)

(A) $A = \emptyset$: Dann gilt $H_*(M|A) := H_*(M,M) = 0$ und $\Gamma(A) = 0$.

(B) Seien $A, B \subset M$ abgeschlossen; gilt 4.53 für $A \cap B$, A, B, so gilt es auch für $A \cup B$: Mayer-Vietoris für $(M, M \setminus A, M \setminus B)$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & H_n(M|A\cup B) & \to & H_n(M|A) \oplus H_n(M|B) & \to & H_n(M|A\cap B) \\
& \downarrow J_{A\cup B} & & \downarrow J_A \oplus J_B & & \downarrow J_{A\cup B} \\
0 \to & \Gamma_c(A\cup B) & \xrightarrow[r_1+r_2]{} & \Gamma_c(A) \oplus \Gamma_c(B) & \xrightarrow[r_3-r_4]{} & \Gamma_c(A\cap B)
\end{array}$$

mit r_i die Einschränkung; es ist klar, dass dann die untere

Zeile auch exakt ist, und dass das Diag. kommutiert. Voraussetzung + 5-Lemma $\Rightarrow$ $j_{A\cup B}$ ist ein Iso; die Fortführung der ersten Zeile links $\Rightarrow$ $H_k(M|A\cup B) = 0$ für $k > n$. #B

(C) A ist kompakt, zusammenhängend, und liegt in einer Karten-Umgebung U, die von $p: M_R \to M$ trivial überlagert ist. Dann gilt 4.53 für A. Durch Ausschneidung $H_n(M|A) \xleftarrow{\cong} H_n(U|A) \underset{\cong}{\xrightarrow{\phi}} H_n(\mathbb{R}^n|\phi(A))$ ($\phi: U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$ Karte) können wir annehmen: $M = \mathbb{R}^n$.

Fall 1: A ist ein Würfel $\prod_{i=1}^n [a_i, b_i] \subset \mathbb{R}^n$, $a_i \leq b_i$.
Sei $a \in A$; dann ist $j_a^A : H_n(\mathbb{R}^n|A) \xrightarrow{\cong} H_n(\mathbb{R}^n|a)$ ein Iso, und $\mathbb{R}^n$ ist R-orientierbar entlang A, so dass $P|_{p^{-1}(A)}$

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(A) \arrow[r, "h", "\cong"'] \arrow[dr, "p"'] & A \times R \arrow[d, "p_1"] \\ & A \end{tikzcd}$$

trivial ist. Es folgt: die Einschränkung $\Gamma A \xrightarrow{r} \Gamma a$ ist ein Iso mit Inverse $t : \Gamma a \to \Gamma A$, $s \mapsto (x \mapsto h^{-1}(x, s(a)))$. Die Natürlichkeit von j_A (4.51) impliziert dass j_A ein Iso ist:

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{R}^n|A) \arrow[r, "j_A"] \arrow[d, "j_a^A"', "\cong"] & \Gamma A \arrow[d, "r", "\cong"'] \\ H_n(\mathbb{R}^n|a) \arrow[r, "j_a", "\cong"'] & \Gamma a = R \end{tikzcd}$$

$(= \Gamma_c A$, A kompakt$)$. Außerdem $H_k(\mathbb{R}^n|A) \underset{\cong}{\xrightarrow{\partial}} \tilde{H}_{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus A) \cong \tilde{H}_{k-1}(S^{n-1}) = 0$ falls $k > n$

Fall 2: $A = A_1 \cup \ldots \cup A_m$ mit A_i Würfeln in $\mathbb{R}^n$: Induktion auf m, zusammen mit Fall 1 und (B).

Fall 3: $A \subset U$ mit U offen, zusammenhängend und von p trivial überlagert.

Sei $s \in \Gamma A$; Dann liegt $s(A)$ in einem Blatt $U \times \{\alpha\}$ über U, und s kann man zu $\tilde{s} \in \Gamma U$ erweitern.

Es existiert eine endliche Überdeckung $A \subset \underbrace{A_1 \cup \ldots \cup A_m}_{= B} \subset U$ von A durch Würfeln A_i wie in Fall 1 (A kompakt!).

Betrachte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H_n(\mathbb{R}^n|B) \arrow[r, "j_B", "\cong \text{ ②}"'] \arrow[d, "j_A^B"'] & \Gamma B \arrow[d, "r"] \\ H_n(\mathbb{R}^n|A) \arrow[r, "j_A"] & \Gamma A \end{tikzcd}$$

②: Fall 2.

Es folgt: j_A surjektiv.

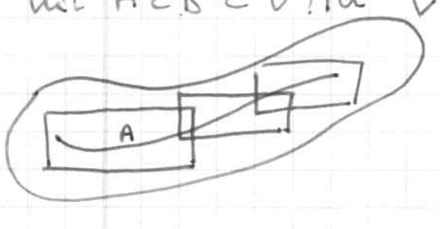
Sei $q \geq n$ und $\alpha \in H_q(\mathbb{R}^n | A)$, mit $j_A(\alpha) = 0$ falls $q = n$.

Zu zeigen: $\alpha = 0$.

Sei $z \in S_q(\Omega)$ ein Relativen Zykel der α repräsentiert, also

$z = \sum a_i \sigma_i$ und $\mathrm{Supp}(z) := \mathrm{Bild}(\sigma_i) \subset \mathbb{R}^n$, $\mathrm{Supp}(dz) \subset \mathbb{R}^n \setminus A$.

Sei $V = \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{supp}\, d(z)$; V ist offen, $A \subset V$. Sei $\bar{z}$ die Klasse von z in $S_q(\mathbb{R}^n | V)$. Sei B' eine endliche Vereinigung von Würfeln mit $A \subset B' \subset V \cap U$



Für $q > n$ gilt

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\text{Fall}(2)}{0} & & \\ & & \| & & \\ H_q(\mathbb{R}^n | V) & \longrightarrow & H_q(\mathbb{R}^n | B') & \longrightarrow & H_q(\mathbb{R}^n | A) \\ [\bar{z}] & & \longmapsto & & \alpha \end{array}$$

Also $\alpha = 0$ und es folgt, $H_q(\mathbb{R}^n | A) = 0$ für $q > n$.

Ebenso für $q = n$:

$$\begin{array}{ccccc} [\bar{z}] & & \longmapsto & & [\alpha] \\ H_n(\mathbb{R}^n | V) & \xrightarrow{j^V_{B'}} & H_n(\mathbb{R}^n | B') & \longrightarrow & H_n(\mathbb{R}^n | A) \\ & & \cong \downarrow j_{B'} & & \\ & & \Gamma(B') & & \end{array}$$

Dank 4.37 können wir B' klein genug wählen, so dass

$j^V_x([\bar{z}]) = 0$ $\forall x \in B'$, also $j_{B'} \circ j^V_{B'}([\bar{z}]) = 0$, also $j^V_{B'}([\bar{z}]) = 0$.

(D) $A \subset \Omega$, A kompakt. Dann gilt $A = A_1 \cup \dots \cup A_m$ mit A_i wie in Fall 3. Dann $A_i \cap A_j = \emptyset$ oder auch wie im Fall 3, und dieser Fall folgt aus Induktion auf m, und (A) und (B).

(E) $U \subset \Omega$ offen mit $\bar{U}$ kompakt, $A \subset U$ abg. in U; Dann gilt das Th. für A als Teilmenge der Mannigfaltigkeit U: betrachte die Homologie Folge des Tripels $(M, U \cup (M \setminus \bar{U}), (U \setminus A) \cup (\Omega \setminus \bar{U}))$;

Dank Ausschneidung haben wir ein Iso

$$H_q(U | A) \xrightarrow{\cong} H_q(U \cup (M \setminus \bar{U}), (U \setminus A) \cup (\Omega \setminus \bar{U})).$$

Teil der Folge des Tripels, unter diesem Iso, gibt also

$$\underset{①}{H_{q+1}(M, U \cup (\Omega \setminus \bar{U}))} \to \underset{②}{H_q(U | A)} \to \underset{③}{H_q(M, (U \setminus A) \cup (\Omega \setminus \bar{U}))}$$

① $= 0$: $(\Omega, U \cup (\Omega \setminus \bar{U})) = (M, \Omega \setminus B)$ mit $B = \bar{U} \setminus U$ kompakt (C).

③ $= 0$ $(\Omega, (U \setminus A) \cup (\Omega \setminus \bar{U})) = (\Omega, \Omega \setminus C)$ mit $C = (\bar{U} \setminus U) \cup \bar{A}$ kompakt.

Also ② auch $=0$. Für $q=n$ haben wir ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H_n(U|A) \arrow[r] \arrow[d, "j_A"] & H_n(M|C) \arrow[r] \arrow[d, "j_C", "\cong"'] & H_n(M|B) \arrow[d, "j_B", "\cong"'] \\ 0 \arrow[r] & \Gamma_c A \arrow[r, "i"] & \Gamma(C) \arrow[r, "res"] & \Gamma(B) \end{tikzcd}$$

mit exakten Zeilen, wobei i wie folgt definiert ist:

Sei $s \in \Gamma_c A$, $s: A \to U_R$ $(= p^{-1}(U))$

Dann $s=0$ auf $A \setminus K$ für $K \subset A$ kompakt; Setze

$$i(s)(x) = \begin{cases} s(a) & \text{für } a \in A \\ 0 & \text{für } x \in C \setminus K. \end{cases}$$

5-Lemma: j_A auch ein Iso. #(E)

(F) Allgemeiner Fall: Sei $s \in \Gamma_c A$: $\exists K \subset A$ kompakt mit $s=0$ auf $A \setminus K$; Es existiert $U \subset M$ offen mit $K \subset U$ und und $\bar{U}$ kompakt (Für $k \in K$ wähle ein Karte $(V_k, k) \xrightarrow[\cong]{\phi_k} (\mathbb{R}^n, 0)$; $\exists$ $k_1, \dots, k_m \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^m \phi_{k_i}^{-1}(\mathring{D}^n) = U$; $\bar{U} = \bigcup \phi_{k_i}^{-1}(D^n)$).

Verwende (E) auf U und $B = A \cap U$:

$$\begin{tikzcd} H_n(U|B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_n(M|A) \arrow[d, "j_A"] \\ \Gamma_c(B) \arrow[r, hook, "i"] & \Gamma_c A \end{tikzcd}$$

$$s' = \mathrm{Res}(s) \longmapsto s$$

Das impliziert: $s \in$ Bild j_A und j_A ist surjektiv.

Sei $\alpha \in H_q(M|A)$, $q \geq n$, mit $j_A(\alpha) = 0$ falls $q=n$.

Zu zeigen: $\alpha = 0$. Sei $z \in S_q(M)$ ein relativer Zykel, der α repräsentiert; Sei V offen mit $\mathrm{Supp}(\alpha) \subset V \subset \bar{V}$ kompakt.

Sei $A' = A \cap V$ und b die Klasse von z in $H_q(V|A')$.

Betrachte

$$\begin{tikzcd} H_n(V|A') \arrow[r] \arrow[d, "j_{A'}", "\cong"'] & H_n(M|A) \arrow[d] \\ \Gamma_c(A') \arrow[r, hook] & \Gamma_c(A) \end{tikzcd}$$

$b \longmapsto \alpha$, $\alpha \mapsto 0$

mit $j_{A'}$ Iso dank (E) $\Rightarrow j_{A'}(b) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

Für $q > n$, $b = 0$ in $H_q(V|A')$ dank (E), also $\alpha = 0$.

#(F)

(*) $j_A : H_n(M|A) \to \Gamma(A)$; $\alpha \in H_n(M|A)$, dann liegt $j_A(\alpha)$ in $\Gamma_c(A)$: Sei $z \in S_n(M)$ ein Repräsentant für α; $\operatorname{Supp}(z) \subset B$ für B kompakt. Es folgt
$j_A(\alpha)(x) = 0$ für $x \notin B$: klar, weil

$$S_n(M|A) \longrightarrow S_n(M|x)$$
$$z \longmapsto 0 \qquad \text{da } B \subset M \setminus x.$$ #

<u>4.59 Theorem</u> (Poincaré Dualität) : Sei M eine kompakte, n-Dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand, zusammenhängend, und R-Orientiert. Sei $[M]$ die Fundamental klasse von M. Dann ist die Abbildung

$$D : H^k(M;R) \longrightarrow H_{n-k}(M;R),$$
$$[\varphi] \longmapsto [\varphi] \cap [M]$$

ein Isomorphismus für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Das Theorem liefert auch wichtige Information über das Cup-Produkt für solche M. Betrachte die Paarung

$$H^k(M;R) \otimes H^{n-k}(M;R) \to R, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \langle \varphi \cup \psi, [M] \rangle$$

Für M, R wie in 4.59 und R ein Körper, oder $R = \mathbb{Z}$ und $H^*(M;\mathbb{Z})$ hat kein Torsion, so haben wir

$$(*) \quad H^{n-k}(M;R) \xrightarrow[\beta\,(4.13)]{\cong} \operatorname{Hom}_R(H_{n-k}(M;R), R) \xrightarrow[\cong]{D^*} \operatorname{Hom}_R(H^k(M;R);R).$$

Daraus folgt: die obige Paarung ist nicht entartet.

<u>4.60 Lemma</u> : M, R wie in 4.59, mit R ein Körper. Für jedes $\alpha \in H^k(M;R)$, $\alpha \neq 0$, ein $\beta \in H^{n-k}(M;R)$ existiert, so dass $\alpha \cup \beta$ ein Erzeuger von $H^n(M;R)$ ist; Falls $R = \mathbb{Z}$, $\alpha \in H^k(M;\mathbb{Z})$ ein $\mathbb{Z}$-Summand erzeugt, so $\exists\ \beta \in H^{n-k}(M;\mathbb{Z})$ mit $\alpha \cup \beta$ ein Erzeuger von $H^n(M;\mathbb{Z})$.

Beweis: im Fall von $\mathbb{Z}$: wir haben dann ein Homomorphismus $f: H^k(\Pi;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ mit $\alpha \mapsto 1$. Also existiert $\beta \in H^{n-k}(\Pi;R)$ mit $f(\gamma) = \langle \beta \cup \gamma, [\Pi] \rangle$ $\forall \gamma \in H^k(\Pi;R)$, dank $(*)$. Insbesondere $\langle \beta \cup \alpha, [\Pi] \rangle = f(\alpha) = 1$, und $\beta\cup\alpha$ ist ein Erzeuger von $H^n(\Pi;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. Fall von Körper Analog. #

4.61 Beispiele. (a) $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]/(u^{n+1})$, $|u|=2$.
In der Tat, dass gilt Additiv; Induktion auf n.
Für $n=1$ ist es klar; gilt $H^*(\mathbb{C}P^{n-1};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]/(u^n)$.
So betrachte die Inklusion $\mathbb{C}P^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{C}P^n$;
Sie Induziert eine surjektion von $\mathbb{Z}$-Algebren

$$H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^*(\mathbb{C}P^{n-1};\mathbb{Z}), \quad u \mapsto u.$$

Insbesondere is u^i ein Erzeuger von $H^{2i}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ für alle $0 \leq i \leq n-1$. Anderseits ist $u^{n-1}\cup u$ ein Erzeuger von $H^{2n}(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$. (a') Aus (a) folgt $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[u]$.
(b) Ebenso: $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x]/(x^{n+1})$, $|x|=1$, und $H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{F}_2) \cong \mathbb{F}_2[x]$.

Um Poincaré Dualität zu beweisen müssen wir es auch für offene Teilmengen beweisen; also auch im nicht kompakten Fall, wofür wir Kohomologie mit kompakten Träger brauchen.

4.62 Definition: Sei I eine kleine Kategorie, $F: I \to R\text{-Mod}$ ein Funktor; Definiere

$$\operatorname{Colim} F = \bigoplus_{i\in I} F(i) \Big/ R$$

wobei R der Untermodul ist, der von $\{F(\alpha)(x) - x \mid \alpha: i \to j$ Morphismus in I, $x \in F(i)\}$ erzeugt ist (hier wird $F(i)$ als Untermodul von $\bigoplus F(i)$ betrachtet), zusammen mit kanonischen Homomorphismus $\eta_i: F(i) \to \bigoplus_{j\in I} F(j) \twoheadrightarrow \operatorname{Colim} F$.

4.63 Bemerkungen: (a) $\operatorname{Colim} F$ hat die folgende univ. Eigenschaft: Bezeichne $M: I \to R\text{-Mod}$ den konstanten Funktor mit $i \mapsto M$. Für jede natürliche Transformation $f: F \Rightarrow M$ existiert genau ein Hom. $\bar{f}: \operatorname{Colim} F \to M$ mit $f(i) = \bar{f} \circ \varphi_i$

(b) Mit Hilfe von (a) ist es leicht zu sehen: hat I ein terminales Objekt t, so ist $\varphi_t: F(t) \to \operatorname{Colim} F$ ein Isomorphismus.

(c) Als Indexkategorie kommt oft eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$; I heißt filtriert falls zu jedem Paar (i,j) in I, $k \in I$ existiert, mit $i \leq k$ und $j \leq k$.
Falls I filtriert ist, so ist $\operatorname{Colim}: R\text{-Mod}^I \to R\text{-Mod}$ als Funktor exakt: $F \overset{\varepsilon}{\Rightarrow} G \overset{\eta}{\Rightarrow} H$ ist exakt in $R\text{-Mod}^I$ falls $F(i) \to G(i) \to H(i)$ exakt ist, $\forall i \in I$. Dann ist
$\operatorname{Colim} F \xrightarrow{\varepsilon} \operatorname{Colim} G \xrightarrow{\eta} \operatorname{Colim} H$ exakt;

(d) Additivität: $\operatorname{Colim}(F \oplus G) \cong \operatorname{Colim} F \oplus \operatorname{Colim} G$

(e) Falls $(J, \leq) \overset{\phi}{\hookrightarrow} (I, \leq)$ kofinal ist (i.e. $\forall\, i \in I$, $\exists\, j \in J$ mit $i \leq j$ in I), so liefert die universelle Eigenschaft von $\operatorname{Colim} F \circ \phi$ ein Homomorphismus

$$\operatorname*{Colim}_J (F \circ \phi) \xrightarrow{\Phi} \operatorname*{Colim}_I (F), \qquad F: I \to R\text{-Mod},$$

und Φ ist ein Iso.

(f) Umtauschen von Colim: $(J, \leq)$ filtriert, so dass $\forall\, j \in J$, eine filtrierte p. geo. Menge $(I_j, \leq) \overset{\phi_j}{\hookrightarrow} (I, \leq)$ gegeben ist, mit $I = \bigcup_{j \in J} I_j$. Sei $F: I \to R\text{-Mod}$ gegeben; Sei $F_j = F \circ \phi_j : I_j \to R\text{-Mod}$; Dann erhalten wir ein Funktor $J \to R\text{-Mod}$, $j \mapsto \operatorname*{Colim}_{I_j} F_j$ und Homomorphismen

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[r] \arrow[dr, bend right] & \operatorname*{Colim}_{I_j} F_j \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname*{Colim}_J \left(\operatorname*{Colim}_{I_j} F_j\right) \arrow[dl, dashed, shift right, "\Psi"'] \\
& \operatorname*{Colim}_I F \arrow[ur, dashed, shift right, "\Theta"'] &
\end{tikzcd}$$

und Ψ, Θ sind inverse zueinander.

<u>4.64 Definition</u>: Sei M eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
Sei $I_M = \{ K \subset M \mid K \text{ kompakt} \}$ mit partieller Ordnung $\leq = \subseteq$.
Dann ist $(I_M, \leq)$ filtriert ($K \cup L$ wieder kompakt).
Wir haben ein Funktor $(K \leq L) \longmapsto \left(H^q(M \mid K) \xrightarrow{j_K^{L*}} H^q(M \mid L) \right)$
und definieren die Kohomologie von M mit kompakten Träger als
$$H_c^q(M) = \operatorname*{colim}_{I_M} H^q(M \mid -)$$

<u>4.65 Bemerkungen</u>: (a) M - kompakt $\Rightarrow$ M terminal in I_M
$\Rightarrow$ $\eta_M : H^q(M) \to H_c^q(M)$ ist ein Iso.
(b) Funktorialität: $f : M \to N$ eigentlich (i.e. $K \subset N$ kompakt $\Rightarrow f^{-1}(K) \subset M$ kompakt), dann induzieren
$$H^q(N \mid L) \to H^q(M \mid f^{-1}(L)) \to H_c^q(M) \quad \text{ein Hom}$$
$f_c^q : H_c^q(N) \to H_c^q(M)$
(Beispiel: $M = A \hookrightarrow N$, A abgeschlossen).
(c) $U \hookrightarrow M$ offen; dann gilt $I_U \hookrightarrow I_M$ und wir erhalten $H_c^q(U) \to H_c^q(M)$, gegeben durch die Inverse des Ausschneidungs-Isomorphismus: $H^q(U \mid K) \to H^q(M \mid K) \to H_c^q(M)$ induziert $H_c^q(U) \to H_c^q(M)$; Funktoriell unter Inklusionen von offenen Teilmengen.

<u>4.66 Beispiel</u>: $H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} R & q = n \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$
Idee: $\{ B(0,r) \mid r \in \mathbb{N} \}$ ist kofinal in $I_{\mathbb{R}^n}$, und
$$H_c^\ell(\mathbb{R}^n \mid B(0,r)) \underset{\forall r \leq n}{\xrightarrow{\cong}} H_c^\ell(\mathbb{R}^n \mid B(0,n)) \cong \tilde{H}^{\ell-1}(S^{n-1}),$$
was ein Iso $H_c^\ell(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}^{\ell-1}(S^{n-1})$ induziert.

<u>4.67 Warnung</u> Genau wie Kompaktheit ist H_c^q kein Homotopie-Invariant: $\mathbb{R}^n \simeq *$ und $H_c^n(*) = 0$ falls $n \geq 1$.

4.68 Definition: Sei M R-orientiert, $K \subset M$ mit K kompakt.

Betrachte $j_K : H_n(M|K) \xrightarrow{\cong} \Gamma(K)$, $S \in \Gamma(M)$ die Orientierung.

Sei $[M_K] = j_K^{-1}(S|_K)$. Das relative cap-Produkt (4.34 mit $B = \emptyset$)

$$H^q(M|K) \otimes_R H_n(M|K) \xrightarrow{\frown} H_{n-q}(M)$$

liefert einen Homomorphismus
$$D_K : H^q(M|K) \to H_{n-q}(M)$$
$$\varphi \mapsto \varphi \cap [M]_K$$

Es gilt $D_K = j_K^{L*} \circ D_L$ falls $K \subset L$ kompakt, also gewinnen wir einen Homomorphismus $D : H^q_c(M) \to H_{n-q}(M)$

4.69 Lemma: $K \subset L \subset M$ wie in 4.68. Dann ist

$$\begin{tikzcd} H^q(M|K) \arrow[rr, "(j_K^L)^*"] \arrow[dr, "D_K"'] & & H^q(M|L) \arrow[dl, "D_L"] \\ & H_{n-q}(M) & \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Beweis: Natürlichkeit des cap-Produktes (4.35)

$$\begin{tikzcd} H^q(M|K) \otimes H_n(M|L) \arrow[r, "1 \otimes j_K^L"] \arrow[d, "j_K^{L*} \otimes 1"'] & H^q(M|K) \otimes H_n(M|K) \arrow[d, "\cap"] \\ H^q(M|L) \otimes H_n(M|L) \arrow[r, "\cap"] & H_{n-q}(M) \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $D_K(\varphi) = \varphi \cap [M]_K = \varphi \cap j_K^L([M_L]) = j_K^{L*}(\varphi) \cap [M]_L$

$= D_M(j_K^{L*}(\varphi))$. #

4.70 Theorem (Poincaré-Dualität): Sei M^n eine zusammenhäng., R-Orientierte top. Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Dann ist

$$D : H^q_c(M) \to H_{n-q}(M)$$

ein Isomorphismus.

Beweis:

(A) Seien $U, V \subset M$ offen. Gilt 4.70 für U, V und $U \cap V$, so gilt es auch für $U \cup V$.

Das ist wieder ein Mayer-Vietoris Argument. Seien $K \subset U$ und $L \subset V$ kompakt.

Wir betrachten die MV-Folge von $(U\cup V, (U\setminus K|U\cup V, U\cup(V\setminus L)))$

$$\begin{tikzcd} H^q(U\cap V|K\cap L) \arrow[r] \arrow[d, "D_{K\cap L}"] \arrow[dr, phantom, "1"] & H^q(U|K)\oplus H^q(V|L) \arrow[r] \arrow[d, "D_K \oplus -D_L"] \arrow[dr, phantom, "2"] & H^q(U\cup V|K\cup L) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "D_{K\cup L}"] \arrow[dr, phantom, "3"] & H^{q+1}(U\cap V|K\cap L) \arrow[d, "D_{K\cap L}"] \\ H_{n-q}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-q}(U)\oplus H_{n-q}(V) \arrow[r] & H_{n-q}(U\cup V) \arrow[r, "\partial"] & H_{n-q-1}(U\cap V) \end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt (MV), und ① und ② kommutieren dank Natürlichkeit des Cap-Produktes.

Deutlich technischer ist: ③ kommutiert (bis auf Zeichen). Wir machen es hier nicht; siehe Hatcher, Beweis von Lemma 3.36, ab Mitte Seite 246.

Sei $I = \{(K,L) \mid K\subset U, L\subset V, K \text{ und } L \text{ kompakt}\}$ mit $(K,L)\leq (P,Q)$ falls $K\subseteq P$ und $L\subseteq Q$; Dann ist $(I,\leq)$ filtriert, also ist colim_I exakt, 4.63 (c).

Bemerke, dass die kompakten Teilmengen von $U\cap V$ (bzw. $U\cup V$) die Form $K\cap L$ (bzw $K\cup L$) für $(K,L)\in I$ haben.

Also erhalten vom obigen Diagramm den folg. komm. Diagramm (bis auf Zeichen), durch Anwendung von colim_I auf der oberen Zeile

$$\begin{tikzcd} H^q_c(U\cap V) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & H^q_c(U)\oplus H^q_c(V) \arrow[r] \arrow[d, "D\oplus -D"] & H^q_c(U\cup V) \arrow[r] \arrow[d, "D"] & H^{q+1}_c(U\cap V) \arrow[d, "D"] \\ H_{n-q}(U\cap V) \arrow[r] & H_{n-q}(U)\oplus H_{n-q}(V) \arrow[r] & H_{n-q}(U\cup V) \arrow[r] & H_{n-q-1}(U\cap V) \end{tikzcd}$$

Die Zeilen sind exakt. Hier benutzen wir auch

$$\operatorname{colim}_I (H^q(U|-)\oplus H^q(V|-)) = \operatorname{colim}_I (H^q(U|-)) \oplus \operatorname{colim}_I (H^q(V|-))$$

Dank 5-Lemma folgt (A).

(B) Sei $\{U_i\}_{i\in I}$ eine Menge von offenen Teilmengen in M, total geordnet durch Inklusion. Falls 4.70 für alle U_i gilt, so gilt es auch für $U=\bigcup_i U_i$.

Wir haben Isomorphismen $D_i : H^q_c(U_i) \xrightarrow{\cong} H_{n-q}(U_i)$, verträglich mit den Inklusionen $U_i \hookrightarrow U_j \subset U$.

$$\begin{tikzcd} H^q_c(U_i) \arrow[r, "\cong"', "D_i"] \arrow[d] & H_{n-q}(U_i) \arrow[d] \\ H^q_c(U_j) \arrow[r, "\cong"', "D_j"] \arrow[d] & H_{n-q}(U_j) \arrow[d] \\ H^q_c(U) \arrow[r, "D"'] & H_{n-q}(U) \end{tikzcd}$$

kommutiert (linker Kom: siehe 4.65 (c), mit Hilfe von Ausschneidung definiert). Insbesondere haben wir ein

kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Colim}_i H^q_c(U_i) \arrow[r, "\cong", "\operatorname{colim}_i D_i"'] \arrow[d, "\cong"', "①"] & \operatorname{Colim}_i H_{n-q}(U_i) \arrow[d, "\cong"', "②"] \\ H^q_c(U) \arrow[r, "D"'] & H_{n-q}(U) \end{tikzcd}$$

Das ② ein Iso ist ist klar ($z \in S_{n-q}(U) \Rightarrow \operatorname{Supp} z \subset U_i$ für i, wegen Kompaktheit, also ② surjektiv; Injektiv: analog).

Dass ① ein Iso ist folgt aus 4.63 (f): Umtauschen von Colim:

$$\operatorname{Colim}_i H^q_c U_i = \operatorname{colim}_i \left(\operatorname{colim}_{K \subset U_i} H^q(U_i|K) \right) \underset{(\text{Ausschneidung})}{\cong}$$

$$= \operatorname{Colim}_i \left(\operatorname{Colim}_{K \subset U_i} H^q(U|K) \right) = \operatorname{colim}_{K \subset U} H^q(U|K) = H^q_c(U)$$

(C) $U \subset M$ offene Karten Umgebung mit $\phi : U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$.

Dann gilt 4.70 für U.

$H^q_c(U)$ und $H_{n-q}(U)$ sind beide $= 0$ falls $q \neq n$, und beide $\cong R$ falls $q = n$.

$D : H^n_c(\mathbb{R}^n) \to H_0(\mathbb{R}^n)$ ist ein Iso: klar, weil der Dual X von $[\mathbb{R}^n]_{\overline{B(0,n)}}$ in $H^n(\mathbb{R}^n | \overline{B(0,n)})$ ist ein Erzeuger, also $X \cap [\mathbb{R}^n]_{\overline{B(0,n)}} = 1$ (4.35 (a)).

(D) $U \subset M$ offen, U liegt in einer Karten Umgebung V mit $U \subset V \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^n$. Dann gilt 4.70 für U.

Wir können $M = \mathbb{R}^n$ und U offen in $\mathbb{R}^n$ annehmen.

Wähle eine dichte Folge $\{x_1, x_2, \dots\}$ in U, und sei V_j ein offener Würfel mit $x_j \in V_j \subset U$, und $U_i = \bigcup_{j=1}^{i} V_j$.

Dann gilt das Theorem für V_j dank (C), für U_i dank (A) und für $U = \bigcup U_i$ dank (B).

(E) Das Theorem gilt für M, $M \neq \emptyset$:

Sei $\Omega = \{ U \subset M \mid U$ offen, 4.70 gilt für $U \}$.

Dann gilt $\Omega \neq \emptyset$ da Ω die offene Karten Umgebungen U mit $U \cong \mathbb{R}^n$ enthält. Die Menge Ω ist partiell geordnet durch Inklusion, und jede totalgeordnete Kette hat eine obere Schranke dank (B).

Zornsche Lemma $\Rightarrow$ Ω hat ein Maximales Element, N.

Falls $N \neq M$ wähle $x \in M \setminus N$ und eine of. Karte Umgebung $V \cong \mathbb{R}^n$ von x. Dann gilt 4.70 für V (C) und $V \cap N$ (D), also auch für $V \cup N$ (A) $\lightning$

#