6.19 Theorem: Ist n ungerade, so ist $\pi_m(S^n)$ für alle $m \geq n+1$ endlich.

Beweis: Sei F die Homotopie Faser von $S^n \xrightarrow{i_n} K(\mathbb{Z}, n)$.
Aus 6.18 folgt, dass $i_{n*}: H_*(S^n; \mathbb{Q}) \to H_*(K(\mathbb{Z},n); \mathbb{Q})$ ein Isomorphismus ist. Daraus folgt $H_m(F;\mathbb{Q}) = 0$ für $m > 0$ (Edge Hom $\Rightarrow$ $E^2_{m,0} = E^\infty_{m,0}$ $\forall m$; falls $m > 0$ minimal ist mit $H_m(F;\mathbb{Q}) \neq 0$, dann folgt $H_m(F;\mathbb{Q}) \hookrightarrow H_m(S^n, \mathbb{Q})$ $\lightning$).
Hurewicz modulo Tors $\Rightarrow$ $\pi_m(F) \otimes \mathbb{Q} = 0$ $\forall m \geq 1$.
Da $\pi_m(F) \xrightarrow{\cong} \pi_m(S^n)$ für $m > n$ folgt $\pi_m(S^n) \otimes \mathbb{Q} = 0$, und da $\pi_m(S^n) \in \mathcal{FG}$ folgt $\pi_m(S^n) \in \mathcal{F}in$, $\forall m > n$. #

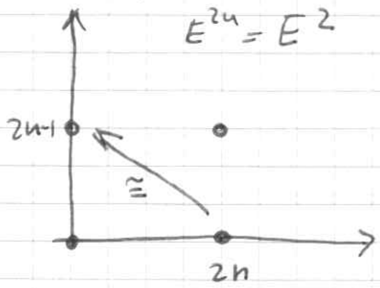
6.20 Korollar π^S_n ist endlich für $n \geq 1$.
Beweis: $\pi^S_n \cong \pi_{2m-n+1} S^{2m+1}$ für m groß genug. #

6.21 Theorem: Ist $k \geq 2$ gerade, so ist $\pi_m(S^k)$ für alle $m \geq k+1$, $m \neq 2k-1$ endlich, und $\pi_{2k-1} S^k \cong \mathbb{Z} \oplus F$ mit F endlich.

Beweis: Sei $k = 2n$. Betrachte das Faserbündel
$$V^{\mathbb{R}}_{2n,1} \hookrightarrow V^{\mathbb{R}}_{2n+1,2} \xrightarrow{p} V^{\mathbb{R}}_{2n+1,1} \quad \text{aus } 2.14,$$
also $S^{2n-1} \to V \xrightarrow{p} S^{2n}$, mit $V = V^{\mathbb{R}}_{2n+1,2}$.
Ein Teil der L.E.F in Homotopie ist
$$0 \to \pi_{2n} V \xrightarrow{p_*} \pi_{2n} S^{2n} \xrightarrow{\partial} \pi_{2n-1} S^{2n-1} \to \pi_{2n-1} V \to 0$$
Wir wissen: ∂ ist injektiv! ($\partial: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, also ist ∂ injektiv oder 0. Wenn es null ist, so ist $\pi_{2n} V \xrightarrow{p_*} \pi_{2n} S^{2n}$ surjektiv; in diesem Fall $\exists f: S^{2n} \to V$ mit $pf \simeq id_{S^{2n}}$. Da p eine Faserung ist, können wir f mit $pf = id_{S^{2n}}$ wählen $\Rightarrow$ S^{2n} hat ein tangentiales Vektorfeld ohne Nullstellen $\lightning$).

Daraus folgt: $\pi_m V \in \mathcal{F}in$ für alle $1 \leq m \leq 2n$;

6.12 $\Rightarrow$ $H_m V \in \mathcal{F}in$ für alle $1 \leq m \leq 2n$. Die Serre sp. seq. der Faserung $S^{2n-1} \to V \to S^{2n}$ für $H_*(-;\mathbb{Q})$:



$E^{2n} = E^2$ hat 4 nicht triviale Einträge.

Da $H_{2n} V \in \mathcal{F}in$ folgt $H_{2n}(V;\mathbb{Q}) = 0$, und $d^{2n} : E^{2n}_{2n,0} \to E^{2n}_{0,2n-1}$ muss ein Iso sein.

$$\Rightarrow \quad H_m(V;\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q} & m = 0, 4n-1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $H_m(V;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt ist, $\forall m$, folgt $H_m(V;\mathbb{Z}) \in \mathcal{F}in$ $\forall\ 1 \leq m < 4n-1$. Daraus folgt $\pi_m(V) \in \mathcal{F}in$ $\forall\ 1 \leq m < 4n-1$, und

$$h_{4n-1} : \pi_{4n-1}(V) \longrightarrow H_{4n-1}(V) \cong \mathbb{Z} \oplus ? \quad (? \in \mathcal{F}in)$$

ist ein $\mathcal{F}in$-Iso; Andererseits: $\pi_m(V) \to \pi_m(S^{2n})$ ist ein $\mathcal{F}in$-Iso $\forall\ m \geq 2n+1$, dank 6.18, also $\pi_m(S^{2n}) \in \mathcal{F}in$ $\forall\ 2n+1 \leq m < 4n-1$ und $\pi_{4n-1}(S^{2n}) \overset{\mathcal{F}in}{\cong} \mathbb{Z}$.

Es bleibt zu zeigen: $\pi_m(V) \in \mathcal{F}in$ $\forall\ m \geq 4n$.

Sei $f : S^{4n-1} \to V$ ein Erzeuger von einer unendlichen zyklischen Untergruppe von $\pi_{4n-1} V \overset{\mathcal{F}in}{\cong} \mathbb{Z}$. Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \pi_{4n-1} S^{4n-1} & \xrightarrow{f_*} & \pi_{4n-1} V \\ \cong \downarrow & & \downarrow \overset{\mathcal{F}in}{\cong} \\ H_{4n-1} S^{4n-1} & \xrightarrow{f_*} & H_{4n-1} V \end{array}$$

Der obere f_* ist ein $\mathcal{F}in$-Iso, also auch der untere. Also induziert f einen Isomorphismus $f_* : H_*(S^{4n-1};\mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} H_*(V)$. Sei F die Homotopie-Faser von f. Wie im Beweis von 6.19 folgt $H_m(F;\mathbb{Q}) = 0$ $\forall\ m \geq 1$, also $H_m(F;\mathbb{Z}) \in \mathcal{T}ors \cap \mathcal{F}\mathcal{G} = \mathcal{F}in$ $\forall\ m \geq 1$, also $\pi_m(F;\mathbb{Z}) \in \mathcal{F}in$ $\forall\ m \geq 1$. Da $\pi_m(S^{4n-1}) \in \mathcal{F}in$ $\forall\ m \geq 4n$ folgt aus der LEF von $F \to V \to S^{4n-1}$, dass $\pi_m V \in \mathcal{F}in$ $\forall\ m \geq 4n$.

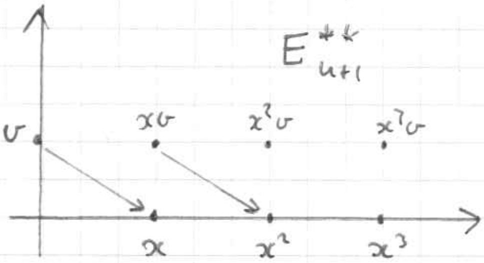
#

Wir untersuche noch etwas π_*^S. Wir werden etwas Info über $H_*(\Omega^2 S^n; \mathbb{F}_p)$ brauchen. Als Aufwärmung berechnen wir erst:

<u>6.22 Lemma</u>: Sei $n \geq 3$ ungerade. Die Abbildung $\rho: S^n \to \Omega^2 S^{n+2}$ (adjungiert zu $\Sigma^2 S^n \xrightarrow{\cong} S^{n+2}$) induziert einen Isomorphismus

$$H_*(S^n; \mathbb{Q}) \to H_*(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{Q}).$$

<u>Beweis</u>: es genügt zu beweisen: ρ induziert einen Iso auf $H^*(-;\mathbb{Q})$.
Aus 5.30 haben wir $H^*(\Omega S^{n+2}; \mathbb{Z}) \cong \Gamma(x)$, $|x| = n+1$, also $H^*(\Omega S^{n+2}; \mathbb{Q}) \cong \Gamma(x) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}[x]$. Die Serre sp. für $\Omega^2 S^{n+2} \to P\Omega S^{n+2} \to \Omega S^{n+2}$ für $H^*(-;\mathbb{Q})$ kann man rückwärts bestimmen: $\exists\, v \in H^n(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{Q})$ mit $d_{n+1}(v) = x$ ($\Rightarrow d_{n+1}(x^n v) = x^{n+1}$)



Also $E_{\mathbb{Q}}(v) \subset H^*(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{Q})$.
Falls $A = H^*(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{Q}) \setminus E_{\mathbb{Q}}(v) \neq \emptyset$,
so muss jede niedrigst dimensionale Klasse in A zu E_{n+1}^{**} überleben;
Also $A = 0$. Es folgt $H_*(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{Q}) \cong H_*(S^n; \mathbb{Q})$.
Aber ρ induziert einen Iso auf π_n, also auf $H_n(-;\mathbb{Z})$ (Hurewicz) also auf $H_*(-;\mathbb{Q})$. #

<u>6.23 Lemma</u>: Sei $n \geq 3$ ungerade, und p eine Primzahl.
Die Abbildung $\rho: S^n \to \Omega^2 S^{n+2}$ induziert einen Isomorphismus

$$H_m(S^n; \mathbb{F}_p) \to H_m(\Omega^2 S^{n+2}; \mathbb{F}_p)$$

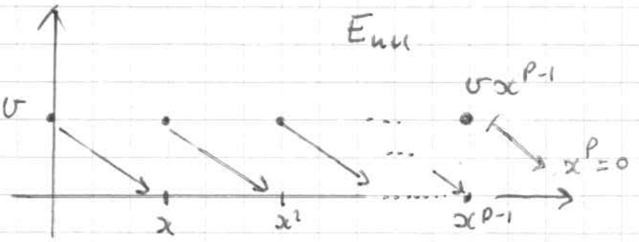
für alle $m \leq p(n+1) - 3$.

<u>Beweis</u>: Analog zu 6.22: Wir beweisen es für $H^*_m(\rho; \mathbb{F}_p)$.
Aus 5.30: $H^*(\Omega S^{n+2}; \mathbb{Z}) \cong \Gamma(x)$, also

$$H^*(\Omega S^{n+2}; \mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[x]/x^p \otimes \mathbb{F}_p[\gamma_p x]/(\gamma_p x)^p \otimes \ldots \cong \bigotimes_{i=1}^{\infty} \mathbb{F}_p[\gamma_{p^i} x]/(\gamma_{p^i} x)^p.$$

Hier $|x| = n+1$, also $|\gamma_p x| = p(n+1)$. Insbesondere ist $\mathbb{F}_p[x] \to H^*(\Omega S^{n+2}; \mathbb{F}_p)$ ein Iso von $\mathbb{F}_p$-Algebren in Graden $* \leq p(n+1) - 1$.

Damit können wir die Serre Sp Seq für $\Omega^2 S^{n+2} \to P\Omega S^{n+2} \to \Omega S^{n+2}$ für $H^*(-;\mathbb{F}_p)$ rückwärts teilweise bestimmen (analog zu 6.22).



$\Rightarrow H^m(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{F}_p) = 0$ für $m \leq p(n+1)-3$.

(hier $\exists\ z \in H^{p(n+1)-2}(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{F}_p)$ mit $d_{(n+1)(p-1)}(z) = v x^{p-1}$).

Wie in 6.22 wissen wir dank Hurewicz, dass ρ ein Iso in $H_m(-;\mathbb{F}_p)$ für $m \leq p(n+1)-3$ induziert. #

Sei nun p eine Primzahl fixiert, und sei $\mathcal{P} = \{\ell \text{ prim} \mid \ell \neq p\}$.

6.24 Korollar: Sei $n \geq 3$ ungerade; Die Abbildung ρ aus 6.22 induziert ein $\mathcal{T}ors_{\mathcal{P}}$-Isomorphismus

$$\rho_*: H_m(S^n;\mathbb{Z}) \to H_m(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{Z})$$

für alle $m \leq p(n+1)-3$.

Beweis: Wir wissen dass $\rho_m: H_m(S^n;\mathbb{Z}) \to H_m(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{Z})$ für alle m injektiv ist. Betrachte die kurze exakte Folge

$$0 \to H_m(S^n;\mathbb{Z}) \xrightarrow{\rho_*} H_m(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{Z}) \to \operatorname{Coker}(\rho_m) \to 0$$

Wir tensorieren mit $\mathbb{F}_p$:

$$\begin{array}{ccccccc} H_m(S^n;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_p & \xrightarrow{\rho\otimes 1} & H_m(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{F}_p & \to & \operatorname{Coker}(\rho_m) \otimes \mathbb{F}_p & \to & 0 \\ \downarrow \cong & & \downarrow \alpha & & & & \\ H_m(S^n;\mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\rho_*} & H_m(\Omega^2 S^{n+2};\mathbb{F}_p) & & & & \end{array}$$

Dank 6.23 ist ρ_* ein Iso für $m \leq p(n+1)-3$, also α auch, also $\rho \otimes 1$ auch, also $\operatorname{Coker}(\rho_m) \otimes \mathbb{F}_p = 0$. Da $\operatorname{Coker}(\rho_m) \in \mathcal{FG}$ folgt $\operatorname{Coker}(\rho_m) \in \mathcal{T}ors_{\mathcal{P}}$ (sogar $\mathcal{F}i_{\mathcal{P}}$). #

6.25 Satz: Seien $n \geq 3$ ungerade, p und $\mathcal{P}$ wie oben. Die Abbildung $\Sigma^2: \pi_i(S^n) \to \pi_{i+2}(S^{n+2})$ ist ein $\mathcal{T}ors_{\mathcal{P}}$-Iso für $i < p(n+1)-3$ (und ein $\mathcal{T}ors_{\mathcal{P}}$-Epi für $i = p(n+1)-3$).

Beweis: Die Abbildung $\Sigma^2 : \pi_i(S^n) \to \pi_{i+2}(S^{n+2})$ ist die Verknüpfung $\pi_i(S^n) \xrightarrow{\rho_*} \pi_i(\Omega^2 S^{n+2}) \cong \pi_{i+2}(S^{n+2})$, also genügt es zu zeigen, dass ρ_* ein $\mathcal{T}ors_{\underline{p}}$ - Iso für $i < p(n+1)-3$ ($\mathcal{T}ors_{\underline{p}}$-Epi für $i = p(n+1)-3$) ist.

Sei F die Homotopie Faser von ρ. Dank 6.24 wissen wir also, dass $H_m(F;\mathbb{Z}) \in \mathcal{T}ors_{\underline{p}}$ für alle $1 \le m \le (n+1)p-4$ (vergleiche Beweis von 6.19).

Also $\pi_m(F) \in \mathcal{T}ors_{\underline{p}}$ für alle $1 \le m \le (n+1)p-4$, und die gewünschte Behauptung folgt aus der LEF von $F \to S^n \to \Omega^2 S^{n+2}$ in Homotopie. (Alternativer Beweis: verwende 6.29). #

6.26 Korollar: Sei $k \geq 0$. Dann induziert
$$\Sigma^{2k} : \pi_i(S^3) \longrightarrow \pi_{i+2k}(S^{3+2k})$$
ein Isomorphismus der p-Primäre Komponenten für alle $i < 4p-3$.

Beweis: $\pi_i(S^3) \xrightarrow{\Sigma^2} \pi_{i+2}(S^5) \xrightarrow{\Sigma^2} \cdots \longrightarrow \pi_{i+2k-2}(S^{2k+1}) \xrightarrow{\Sigma^2} \pi_{i+2k}(S^{3+2k})$

$\mathcal{T}ors_{\underline{p}}$-Iso für $i < 4p-3$, die nächste sogar für größere Werte von i.

6.27 Theorem: Die p-Primäre Komponente von π^S_m ist 0 für $m < 2p-3$ und gleich $\mathbb{Z}/p$ für $m = 2p-3$.

Beweis: $\pi^S_m \cong \pi_{m+\ell}(S^\ell)$ für ℓ gross genug.

Dank 6.26 ist $\pi_{3+m}(S^3) \longrightarrow \pi_{m+\ell}(S^\ell)$ ein $\mathcal{T}ors_{\underline{p}}$ - Iso für $m < 4p-6$, insbesondere für $m \le 2p-3$. Also folgt das Theorem aus 6.15. #

Wir haben in 6.19 und mehrmals danach eine einfache Form des "Whitehead-Theorems modulo Serre Klassen" verwendet. Dafür brauchen wir von unseren Serre Klassen die weitere Eigenschaft

(6.28) Für $A \in \mathcal{C}$ und $B \in Ab$ gilt
$$A \otimes B \in \mathcal{C} \quad \text{und} \quad \mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}^{1}(A, B) \in \mathcal{C}.$$

6.29 Theorem (Whiteheadssatz modulo Serre Klassen). Sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse mit der Eigenschaft (6.28), so gewählt dass Theorem 6.12 gilt (typischerweise $\mathcal{C} = \mathrm{Tors}_{\underline{p}}$).
Seien X, Y 1-zusammenhängende Räume, $f: X \to Y$ eine Abbild. und $n \geq 1$. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:

(a) $f_*: \pi_m X \to \pi_m Y$ ist ein $\mathcal{C}$-Iso für $m < n$ und ein $\mathcal{C}$-Epi für $m = n$.

(b) $f_*: H_m(X;\mathbb{Z}) \to H_m(Y;\mathbb{Z})$ ist ein $\mathcal{C}$-Iso für $m < n$ und ein $\mathcal{C}$-Epi für $m = n$.

Beweis: (a) $\Rightarrow$ (b) Sei F die Homotopie-Faser von f.
Aus der LEF in π_* und (a) folgt also: $\pi_m(F) \in \mathcal{C}$ für alle $m < n$, und aus 6.12 folgt also auch $H_m(F;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ für alle $1 \leq m < n$. Betrachte die Serre Sp.Seq. von $F \to X \xrightarrow{f} Y$. Aus (6.28) folgt also $E^2_{p,q} \in \mathcal{C}$ für alle $0 < q < n$, und dann $E^\infty_{p,q} \in \mathcal{C}$ für alle $0 < q < n$. Es folgt (wie im Beweis von 6.7), dass für $1 \leq m < n$ $F_{m-1}H_m \in \mathcal{C}$; Wir haben eine exakte Folge
$$0 \to F_{m-1}H_m \to F_m H_m = H_m(X) \xrightarrow{f_*} H_m(Y),$$
also $\ker f_* \cong F_{m-1}H_m \in \mathcal{C}$ für $1 \leq m < n$.
Ausserdem liegt $\mathrm{Coker}(f_*) \in \mathcal{C}$ für $1 \leq m \leq n$:
$$\mathrm{Coker}(f_*) = H_m(Y) \big/ E^\infty_{m,0}.$$

Aber betrachte das exakte Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
E^\infty_{m,0} = E^{m+1}_{m,0} \subset E^m_{m,0} & \cdots \subset & E^4_{m,0} & \subset & E^3_{m,0} & \subset & E^2_{m,0} = H_m(Y) \\
\downarrow d^m & & \downarrow d^4 & & \downarrow d^3 & & \downarrow d^2 \\
\operatorname{Bild} d^m & \cdots & \operatorname{Bild} d^4 & & \operatorname{Bild} d^3 & & \operatorname{Bild} d^2
\end{array}$$

$$\underbrace{\operatorname{Bild} d^m \ \cdots \ \operatorname{Bild} d^4 \quad \operatorname{Bild} d^3 \quad \operatorname{Bild} d^2}_{\in \mathcal{C}}$$

Es folgt $H_m(Y) / E^\infty_{m,0} \in \mathcal{C}$!

(Verwende iterativ: $A \hookrightarrow B \hookrightarrow C$, $B \to B/A$, $C \to C/B$ liefert eine exakte Folge $0 \to B/A \to C/A \to C/B \to 0$)

(b) $\Rightarrow$ (a) Zu zeigen: $H_m(F;\mathbb{Z}) \in \mathcal{C}$ für $1 \le m < n$.

Sei angenommen, dass ein $1 \le k < n$ existiert, mit $H_k(F;\mathbb{Z}) \notin \mathcal{C}$, und k minimal mit dieser Eigenschaft.

Dann folgt: $E^\ell_{0,k} \notin \mathcal{C}$ für $2 \le \ell \le k+1$. Für $\ell = 2$ gilt $E^2_{0,k} = H_k(F;\mathbb{Z})$, und dann per Induktion auf ℓ mit Hilfe von

$$E^\ell_{\ell,k-\ell+1} \xrightarrow{d^\ell} E^\ell_{0,k} \twoheadrightarrow E^{\ell+1}_{0,k} \to 0 \quad \text{(exakt)}$$

Zusammen mit $E^\ell_{\ell,k-\ell+1} \in \mathcal{C}$ (dank Minimalität von k und 6.28!).

Betrachte

$$E^{k+1}_{k+1,0} \xrightarrow{d^{k+1}} E^{k+1}_{0,k} \twoheadrightarrow \overset{E^\infty_{0,k}}{\overset{\shortparallel}{E^{k+2}_{0,k}}} \to 0 \quad \text{(exakt)}$$

Diesmal gilt <u>nicht</u> $E^{k+1}_{k+1,0} \in \mathcal{C}$, aber wir haben

$$0 \to E^{k+1}_{k+1,0} / \operatorname{Ker}(d^{k+1}) \xrightarrow{d^{k+1}} E^{k+1}_{0,k} \to E^\infty_{0,k} \to 0 \quad \text{exakt}$$

Wir wissen (Edge) dass $\operatorname{Ker}(d^{k+1}) = E^\infty_{k+1,0} = \operatorname{Bild}(f_*)$

Also ist $E^{k+1}_{k+1,0} / \operatorname{Ker}(d^{k+1}) \subset H_{k+1}(B) / \operatorname{Bild}(f_*) \in \mathcal{C}$

Also wissen wir: $E^\infty_{0,k} \notin \mathcal{C}$. Aber $E^\infty_{0,k} \subset \operatorname{Ker}(f_*)$, was (b) wiederspricht. Also $H_m(F;\mathbb{Z})$ (und $\pi_m(F) \in \mathcal{C}$) $\forall\, 1 \le m < n$.

#