II FASERUNGEN

Faserungen erweitern den Begriff von Überlagerungen (und ihre nette Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft).

2.1 Definition: eine stetige Abbildung $p: E \to B$ hat die Homotopie-Hochhebungseigenschaft (HLP = homotopy lifting property) bezüglich den Raum X, wenn gilt: zu jedem kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "h"'] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & B \end{tikzcd}$$

existiert ein stetige Ab. $H: X \times I \to E$ mit $H i_0 = H_0$ und $pH = h$, wobei $i_0: X \to X \times I$, $x \mapsto (x,0)$.

Die Ab. p heißt eine Faserung (oder Hurewicz-Faserung), wenn sie die HLP bezüglich alle X hat. Sie heißt eine Serre-Faserung, wenn sie die HLP bezüglich I^n, $\forall n \geq 0$ hat.

2.2 Bemerkung: Die Begriffe von "Faserungen" und "Kofaserungen" sind (wie die Namen es andeuten) dual zueinander: es ist leicht zu prüfen (mit den Eigenschaften der k.O Topologie), dass p genau dann die HLP bezüglich Y hat, wenn folgendes Problem für alle $\tilde{h}, \tilde{H}_0$ lösbar ist (hier $B^I = C(I,B)$ mit k.O, und e_0 ist die Auswertung in 0: $e_0(f) = f(0)$).

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "p"'] & \\ B & Y \arrow[u, "\tilde{H}_0"'] \arrow[r, dotted, "\exists \tilde{H}"] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & E^I \arrow[ul, "e_0"'] \arrow[dl, "p^I"] \\ & B^I \arrow[ul, "e_0"] & \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist dual zum "definierenden Diagramm" für Kofaserungen (1.49).

2.3 Beispiel: Eine Überlagerung $E \xrightarrow{p} X$ ist eine Faserung (siehe I, 4.8). Hier ein weiterer Beispiel:

2.4 Lemma + Def: Sei $p: E \to B$ eine Abbildung, so dass ein Raum F existiert, und ein Homöo $\varphi: E \to B \times F$ mit $p_1 F = p$, wobei $p_1: B \times F \to B$ die Projektion ist.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "p"'] & B \times F \arrow[d, "p_1"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Dann ist $p: E \to B$ eine Faserung. Eine Abbildung $p: E \to B$, für welche solche F, φ existieren, heißt eine <u>triviale Faserung</u>.

<u>Beweis</u>:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_0"] \arrow[d] & B\times F \arrow[r, leftrightarrow, "\cong"] \arrow[d, "p_1"] & E \arrow[dl, "p"] \\ X\times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B & \end{tikzcd}$$

Definiere H durch

$$H(x,t) = \big(h(x,t),\ p_2 H_0(x)\big)$$

mit $p_2 : B\times F \to F$ 2. Projektion. #

Faserungen sind besonders nützlich für Berechnungen von Homotopiegruppen.

<u>2.5 Satz</u>: Sei $p: E \to B$ eine Serre-Faserung. Sei $B_0 \subset B$, und sei $E_0 = p^{-1}(B_0) \subset E$. Sei $b_0 \in B_0$ gewählt, und sei $e_0 \in p^{-1}(b_0)$. Dann induziert p eine Bijektion

$$p_* : \pi_n(E, E_0, *) \to \pi_n(B, B_0, *) \quad , \ \forall n \geq 1.$$

<u>Beweis</u>:

(a) p_* ist surjektiv. Sei $[f] \in \pi_n(B, B_0, *)$ mit $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (B, B_0, *)$.

<u>Behauptung</u>: es existiert ein Homöomorphismus

$$h: I^{n-1}\times I \to I^{n-1}\times I \quad \text{mit} \quad h(J^{n-1}) = I^{n-1}\times\{0\}.$$

In der Tat, wir können I^{n-1} durch $[-1,1]^{n-1}$ ersetzen:

Sei $k: [-1,1]^{n-1}\times I \circlearrowleft$ durch

$$k(x,t) = \begin{cases} \left(\frac{1+t}{2-t}\, x,\ t\right) & \|x\|_\infty \leq \frac{1}{2}(2-t) \\ \left(\frac{1+t}{2}\frac{x}{\|x\|_\infty},\ 2(1-\|x\|_\infty)\right) & \|x\|_\infty \geq \frac{1}{2}(2-t) \end{cases}$$

(wobei $\|x\|_\infty = \max\{x_i \mid i = 1, \dots, n-1\}$) definiert.

Dann haben wir Homöo von Paaren

$$(I^{n-1}\times I, J^{n-1}) \cong \big([-1,1]^{n-1}\times I, ([-1,1]^{n-1}\times 0)\cup(\partial[-1,1]^{n-1}\times I)\big) \xrightarrow{k}$$

$$\to \big([-1,1]^{n-1}\times I, [1,1]^{n-1}\times 0\big) \cong (I^{n-1}\times I, I^{n-1}\times 0)$$

(wobei $\cong$ offensichtliche Homöo sind). Das beweist die Behauptung.

Da p die HLP bezüglich I^{n-1} hat, kann man auch folgendes Problem lösen:

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "c_*"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\exists g"] & B \end{tikzcd}$$

Aus $pg(\partial I^n) = f(\partial I^n) \subset B_0$ folgt $g(\partial I^n) \subset E_0$

$\Rightarrow$ Also $g: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, E_0, *)$ und $pg = f$. #(a)

(b) P_* ist injektiv: Seien $f_0, f_1 : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, E_0, *)$ mit $H: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (B, B_0, *)$, $H_i = P f_i$, $i = 0, 1$. Wir suchen $G: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (E, E_0, *)$ mit $G_i = f_i$, $i = 0, 1$. Sei $\tilde{J}^n = I^n \times \partial I \cup J^{n-1} \times I \subset I^n \times I$ und betrachte das kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \tilde{J}^n \arrow[r, "a"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "G"] & B \end{tikzcd}$$

mit $a(x, i) = f_i(x)$, $i = 0, 1$ und $a(J^{n-1} \times I) = \{*\}$. Wie in der Behauptung aus (a) sind die Paare $(I^n \times I, \tilde{J}^n)$ und $(I^n \times I, I^n \times 0)$ homöomorph, also existiert eine Hochhebung G von H mit $G|_{\tilde{J}^n} = a$. Es gilt $G_t(\partial I^n) \subset E_0$ (wie in (a)), also $[f_0] = [f_1] \in \pi_n(E, E_0, *)$

#

<u>2.6 Definition</u>: Sei $p: E \to B$ eine Serre-Faserung; wir nennen $p^{-1}(b) = F_b \subset E$ <u>die Faser von p über b</u>. Ist p punktiert, mit $e_0 \in E_0$ und $b_0 = p(e_0)$ Basispunkte, so nennen wir $(F, *) := (F_{b_0}, e_0)$ <u>die Faser von p</u>.

<u>2.7 Satz</u> (Homotopiefolge einer Serre-Faserung): Für jede punktierte Serre-Faserung $p: (E, *) \to (B, *)$ ist die lange Folge

$$\cdots \to \pi_n(F, *) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, *) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, *) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, *) \to \cdots \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(F, *) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E, *) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, *)$$

von Gruppen und Mengen exakt. Hier ist ∂_n die Verknüpfung

$$\pi_n(B, *) = \pi_n(B, \{*\}, *) \xrightarrow{p_*^{-1}} \pi_n(E, F, *) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, *)$$

für $n \geq 1$, und i_* ist von der Inkl. $i: F \hookrightarrow E$ induziert.

<u>Beweis</u>: Das folgt natürlich aus der LEF des Paares $(E, F, *)$ und der Ersetzung von $\pi_n(E, F, *)$ durch $\pi_n(B, *)$ via p_* dank 2.5. Es ist noch die Exaktheit in $\pi_0(E, *)$ zu prüfen; $p \circ i = c_*$ konstant, also Bild $i_* \subset p_*^{-1}(0)$.
$p_*^{-1}(0) \subset$ Bild i_*: Sei $f: I^0 \to E$ mit $pf \simeq *$; $\exists\, \omega: I \to B$ mit $\omega(0) = pf(0)$, $\omega(1) = *$. Sei $\tilde{\omega}: I \to E$ eine Hochhebung mit $\tilde{\omega}(0) = f(0)$. Dann gilt $\tilde{\omega}(1) \in F$, also $[f] \in$ Bild i_* !

#

2.8 Bemerkungen: (a) ∂_n in der Homotopie-Folge einer Serre-Faserung kann man auch direkt beschreiben;

$$\begin{tikzcd} J^{n-1} \arrow[r, "*"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "F"] & B \end{tikzcd}$$

Sei $f: (I^n, \partial I^n) \to (B,*)$; $\exists$ Hochhebung F mit $F(J^{n-1}) = \{*\}$; dann gilt $\partial_n[f] = [F|_{I^{n-1}\times 0}]$.

(b) Ist $E \xrightarrow{p} B$ eine punktierte Überlagerung, so ist F diskret, also $\pi_n(F,*) = 0 \ \forall n \geq 2$; wir erhalten wieder 1.20.

2.9 Satz: Sei $p: E \to B$ eine stetige Abbildung, und sei $\{U_i\}_{i\in\Theta}$ eine offene Überdeckung von B, sodass $p: p^{-1}(U_i) \to U_i$ für alle $i \in \Theta$ eine Serre-Faserungen ist. Dann ist $p: E \to B$ eine Serre-Faserung.

Beweis: Sei ein komm. Diagramm gegeben:

$$\begin{tikzcd} I^n\times 0 \arrow[r, "a"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n\times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Wir müssen H konstruieren. Wir unterteilen I^n in N^n n-dim. Würfeln $\{W_i\}_{i=1,\dots,N^n}$ mit Kanten-Länge $1/N$, und wählen $0 = t_0 < t_1 \dots < t_m = 1$, so dass $\{h(W_i \times [t_j, t_{j+1}])\}_{\substack{i=1,\dots,N^n \\ j=0,\dots,m-1}}$ der Familie $\{U_i\}_{i\in\Theta}$ untergeordnet ist (Existenz einer Lebesgue'sche Zahl).

Sei $W^k = \{W_i^k \mid i \in J_k\}$ die Menge der k-dimensionalen Würfeln in I^n, die als Seite von einem W_i vorkommen, für $k = 0, \dots, n$.

Wir konstruieren H per Induktion auf $j \in \{0,\dots,m-1\}$, wie folgt: H_0 ist auf $I^n \times [t_0, t_0]$ durch a bestimmt.

Wir nehmen nun an, $j \in \{0,\dots,m-1\}$ und H_j ist auf $I^n\times[t_0,t_j]$ definiert; wir erweitern H_j zu $H_{j+1}: I^n \times [t_0, t_{j+1}] \to E$ wie folgt;

Sei $V^k = \bigcup_{i\in J_k} W_i^k$, $k = 0,\dots,n$. Dann können wir das Hochhebungsproblem

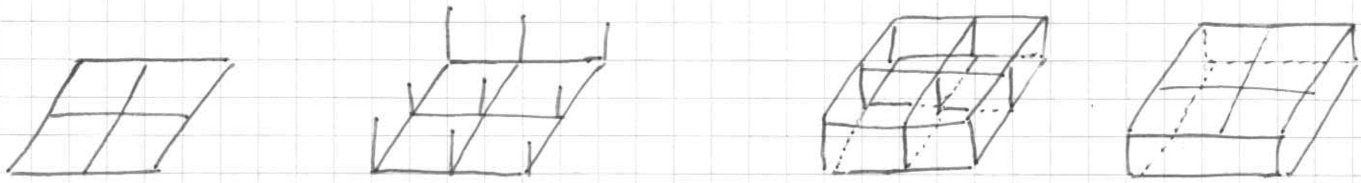
$$\begin{tikzcd} I^n\times[0,t_j] \cup (V^0\cup\dots\cup V^{k-1})\times[t_j,t_{j+1}] \arrow[r, "H_j^{k-1}"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n\times[0,t_j] \cup (V^0\cup\dots\cup V^{k})\times[t_j,t_{j+1}] \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H_j^k"] & B \end{tikzcd}$$

durch Induktion auf $k = 0,\dots,n$ lösen, und nehmen $H_{j+1} = H_j^n$.

als Erweiterung von $h : I^n \times [t_0, t_j] \to E$ auf $I^n \times [t_0, t_{j+1}]$.
In der Tat, das Problem ist lösbar, weil

$$\begin{tikzcd}
W_i^k \times 0 \cup \partial W_i^k \times [t_j, t_{j+1}] \arrow[r] \arrow[d, hook] & p^{-1}(U_j) \arrow[d, "p"] \\
W_i^k \times I \arrow[r] & U_j
\end{tikzcd}$$

Lösbar ist, $\forall i \in J_k$.



$I^2 \times 0$ $\quad (I^2 \times 0) \cup (V^0 \times [t_0, t_1])$ $\quad (I^2 \times 0) \cup ((V^0 \cup V^1) \times [t_0, t_1])$ $\quad I^2 \times [t_0, t_1]$

#

<u>2.10 Definition</u>: Sei $p : E \to B$ eine stetige Abbildung, $U \subset B$ offen. Eine <u>lokale Trivialisierung</u> von p über U mit Faser F ist ein Homöomorphismus $h : p^{-1}(U) \to U \times F$ mit $pr_1 \circ h = p$, wobei $pr_1 : U \times F \to U$, $(u, f) \mapsto u$. Die Abbildung p heißt ein <u>Faserbündel</u> mit Faser F, wenn jeder Punkt $b \in B$ eine offene Umgebung U besitzt, über der eine lokale Triv. mit Faser F existiert.

<u>2.11 Satz</u>: Ist $p : E \to B$ ein Faserbündel, so ist p eine Serre-Faserung.

<u>Beweis</u>: Hat p eine lokale Trivialisierung über $U \subset B$ offen, so ist $p : p^{-1}(U) \to U$ eine triviale Faserung (2.4). Verwende 2.9. #

<u>2.12 Bemerkung</u>: Es existieren auch analoge Ergebnisse zu 2.9 (und dann auch 2.11) für Faserungen:

<u>Satz</u>: Ist B Hausdorff und parakompakt, dann ist eine Abbildung $p : E \to B$ genau dann eine Faserung, wenn es lokal eine Faserung ist. Insbesondere: ist p ein Faserbündel, so ist p eine Faserung.

<u>Beweis</u>: Spanier, § 8, Th 13 und Corollary 14. #

Hier kommt eine wichtige Familie von Beispielen von Faserbündeln: Homogene Räume. Sei G eine topologische Gruppe und H eine abgeschlossene Untergruppe. Sei G/H der Raum der Bahnen mit der Quotiententopologie, und $p: G \to G/H$ die Quotientenabbildung.

2.13 Satz: Sei angenommen, dass $p: G \to G/H$ einen lokalen Schnitt in $[e]_H$ hat ($e \in G$ neutral; also existiert eine offene Umgebung U von $[e]_H$ in G/H und eine stetige Abb. $s: U \to G$ mit $p \circ s = id_U$).
Sei $K < H$ eine abgeschlossene Untergruppe. Dann ist die Quotientenabbildung $p': G/K \longrightarrow G/H$ ein Faserbündel mit Faser H/K.

Beweis (a) p hat einen lokalen Schnitt in $[g]_H$ für alle $g \in G$: in der Tat, ist $U \xrightarrow{s} G$ ein Schnitt von p in $[e]_H$, so ist $g \cdot U \xrightarrow{t} G$, $t([x]_H) = g \cdot s(g^{-1}[x]_H)$ ein lok. Schnitt in $[g]_H$ (G wirkt links transitiv auf G/H durch $g \cdot [x]_H = [gx]_H$.
(b) Sei $[g]_H \in G/H$ und $s: U \to G$ ein lokaler Schnitt von p in $[g]_H$. Definiere $\phi: U \times H/K \to G/K$ durch $\phi([x]_H, [h]_K) \mapsto s([x]_H) \cdot [h]_K$. Dann ist ϕ stetig und $p' \circ \phi([x]_H, [h]_K) = p'(s([x]_H) \cdot [h]_K) = [s([x]_H)]_H = [x]_H = p_1([x]_H, [h]_K)$; ϕ ist ein Homöo auf $p'^{-1}(U) \subset G/K$: ein Inverse ist von $\psi: p'^{-1}(U) \to U \times H/K$,
$\psi([g]_K) = ([g]_H, s([g]_H)^{-1} \cdot [g]_K)$ gegeben. #

2.14 Beispiel (Stiefel Mannigfaltigkeiten). In (II, 2.30) haben wir bereits die Stiefel Mannigfaltigkeiten eingeführt: $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}^n$ mit dem Eukl. beziehungsweise Herm. Skalarprodukt $\langle , \rangle$ versehen.
Dann definieren wir für $n \geq 1$, $1 \leq k \leq n$

$$V^{\mathbb{F}}_{n,k} = \{ (v_1, \dots, v_k) \in (\mathbb{F}^n)^k \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \}$$

mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{F}^{nk}$.