<u>3.30 Korollar</u>: Sei X einfach zusammenhängend, und sei $n \geq 2$ mit $\tilde{H}_i(X) = 0$ für alle $i < n$.
Dann gilt $\pi_i(X,*) = 0$ für alle $i < n$ und alle $* \in X$, und $\pi_n(X,*) \xrightarrow{h} \tilde{H}_n(X)$ ist ein Isomorphismus.

<u>Beweis</u>: wir haben $\pi_0(X) = 0$ und $\pi_1(X) = 0$, und dank 2.29 gilt dann auch $\pi_i(X) = 0$ für $i < n$: ist $m \geq 2$ minimal mit $\pi_m(X) \neq 0$, so folgt $H_m(X) \neq 0$. #

Wir haben auch eine relative Version vom Hurewicz-Homomorphismus (und Satz).

<u>3.31 Definition</u>: Sei (X,A) ein Paar, $a \in A$, $n \geq 2$. Wir definieren $h_n^{(X,A)} : \pi_n(X,A,a) \to H_n(X,A;\mathbb{Z})$ durch $h_n^{(X,A)}([\alpha]) = \alpha_*(j_n)$, wobei $[\alpha] \in \pi_n(X,A,a) = [(D^n, S^{n-1}, *), (X,A,*)]$ und $j_n \in H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$ (wie vor 3.28).

<u>3.32 Bemerkung</u>: Analog zu 3.28 beweist man, dass $h_n^{(X,A)}$ für $n \geq 2$ ein Homomorphismus von Gruppen ist. Die Natürlichkeit von h_n im relativen Fall ist auch klar; Ausserdem folgt aus der Definition von den Erzeuger i_n, j_n, i_{n-1}, dass das Diagram

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X,a) \arrow[r] \arrow[d, "h_n"] & \pi_n(X,A,a) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h_n"] & \pi_{n-1}(A,a) \arrow[d, "h_{n-1}"] \\
\tilde{H}_n(X;\mathbb{Z}) \arrow[r] & H_n(X,A;\mathbb{Z}) \arrow[r, "\partial"] & \tilde{H}_{n-1}(A;\mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

kommutiert, $n \geq 2$, so dass wir durch h einen Homomorphismus der langen exakten Folgen von Paaren in Homotopie und Homologie erhalten.

<u>3.33 Theorem</u>: Sei (X,A) ein rel. CW mit X und A einfach zusammenhängend. Sei $n \geq 2$, $H_i(X,A) = 0$ für $i < n$. Dann ist $\pi_i(X,A,a) = 0$ für $i < n$ und $h_n : \pi_n(X,A,a) \xrightarrow{\cong} H_n(X,A;\mathbb{Z})$ Iso.

<u>Beweis</u>: <u>$n=2$</u>: Wir haben $\pi_i(A,a)=0$ für $i=0,1$, und $\pi_1(X,A,a)=0$. Da $A\hookrightarrow X$ ein Kofaserung ist, haben wir dank 1.53: die Quotienten Abbildung q induziert einen Isomorphismus $\pi_2(X,A,a)\xrightarrow{q_*}\pi_2(X/A,*)$.

Dank Seifert-Van Kampen gilt $\pi_i(X/A,*)=0$ für $i<2$.

Wir haben ein kom. Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_2(X,A,a) \arrow[r, "q_*", "\cong"'] \arrow[d, "h_2^{(X,A)}"'] & \pi_2(X/A,*) \arrow[d, "h_2"] \\ H_2(X,A;\mathbb{Z}) \arrow[r, "q_*", "\cong"'] & \tilde{H}_2(X/A) \end{tikzcd}$$

Hier ist $H_*(X,A;\mathbb{Z})\xrightarrow[\cong]{q_*}\tilde{H}_*(X/A;\mathbb{Z})$ ein Iso Dank I.5.66.

Also ist $h_2^{(X,A)}$ auch ein Iso.

<u>$n>2$</u> und $n-1$ ok: per Induktion wissen wir dann, dass $\pi_i(X,A,a)=0$ für $i<n$; es folgt aus 1.53 dass $q_*:\pi_m(X,A,a)\to\pi_m(X/A,*)$ ein Iso ist, für $m\leq n$. Dann läuft der Beweis wie für $n=2$. #

Der Fall wo X und A nicht einfach zusammenhängend sind ist wegen der $\pi_1 A$-Wirkung etwas komplizierter. Von Interesse ist der Fall wo A und X wegzusammenhängend sind, und (X,A) mindestens 1-zusammenhängend ist (insbesondere $\pi_1(X,A) = \{*\}$).

Zur Erinnerung: die Gruppe $\pi_1(A,a)$ wirkt rechts auf $\pi_n(X,A,a)$:

$$\pi_n(X,A,a)\times\pi_1(A,a)\longrightarrow\pi_n(X,A,a)$$

(1.39 + Aufg. 3.2) $\qquad ([f],[\alpha]) \longmapsto [f]\cdot[\alpha]$

Nun: zwei Ab. $f, f_\alpha:(D^n,S^{n-1},*)\to(X,A,a)$, die $[f]$ und $[f]\cdot[\alpha]$ darstellen, sind frei homotop als Ab. von Paaren; insbesondere gilt $h_n([f]) = f_*(j_n) = f_{\alpha *}(j_n) = h_n([f]\cdot[\alpha])$.

(Sowas hatten wir natürlich auch für $h:\pi_1(X)\to H_1(X)$, mit $[f]\cdot[\alpha] = [\alpha][f][\alpha]^{-1}$ in diesem Fall).

Das motiviert folgende Definition.

3.34 Definition: Sei (X, A, a) ein punktierter Paar; definiere

$$\pi_n^{\#}(X, A, a) = \pi_n(X, A, a)/N \qquad \text{für } n \geq 2$$

wobei N die (normale) Untergruppe von $\pi_n(X, A, a)$ ist, die von $\{[f] - [f]\cdot[\alpha] \mid [f] \in \pi_n(X, A, a), [\alpha] \in \pi_1(A, a)\}$ erzeugt ist (hier wird $\pi_n(X, A, a)$ additiv notiert, auch für $n=2$ obwohl es nicht kommutativ ist!)

3.35 Lemma: Seien $[f], [g] \in \pi_2(X, A, a)$, und betrachte $\partial : \pi_2(X, A, a) \to \pi_1(A, a)$. Dann gilt

$[f]\cdot(\partial[g]) = [g]^{-1}[f][g]$ in $\pi_2(X, A, a)$ (multiplikative Notation!). Insbesondere ist $\pi_n^{\#}(X, A, a)$ Abelsch.

Beweis: Aufgabe 9.1. # Nun eine Verallgemeinerung:

3.36 Theorem (Relativer Hurewicz-Satz): Sei $n \geq 2$, und sei (X, A) ein $(n-1)$-zusammenhängender Paar. Dann ist

$$h^{\#} : \pi_n^{\#}(X, A, a) \to H_n(X, A; \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus von Gruppen.

Beweis: Induktion fangt mit dem Absoluten Fall (nicht in 3.36)

$$h_1 : \pi_1^{ab}(X) \xrightarrow{\cong} H_1(X; \mathbb{Z}).$$

Sei nun $n \geq 2$, und sei angenommen, der Absolute Satz gilt für $\leq n-1$. Wir haben in 3.27 eine Inklusion von Kettenkx definiert

$$\phi : S_\bullet^{(A,m)}(X, a) \longrightarrow S_\bullet(X)$$

mit $S_k^{(A,m)}(X, a) = \{\sigma : \Delta^k \to X \mid \sigma(\Delta^{k,m}) \subset A, \ \sigma(\Delta^{k,0}) = \{a\}\}$, und ϕ ist für $m = n-1$ eine Ketten Homotopie Äquivalenz.

Das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & S_k^{(A,n-1)}(A,a) & \hookrightarrow & S_k^{(A,n-1)}(X,a) & \to & S_k^{(n-1)}(X,A,a) & \to 0 \\
 & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \downarrow \phi & \\
0 \to & S_k(A) & \to & S_k(X) & \to & S_k(X,A) & \to 0
\end{array}$$

(Gruppe oben rechts als Quotient definiert) kommutiert, und es folgt, aus der LEF + 5-Lemma, dass $\phi : S_k^{(n-1)}(X, A, a) \to S_k(X, A)$ ein Iso $H_n^{(n-1)}(X, A, a) \to H_n(X, A)$ induziert.

Fixiere einen Homöo $\tau: (D^n, S^{n-1}, *) \to (\Delta^n, \partial\Delta^n, e_0)$, so dass $\tau_*: H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ die Klasse j_n auf $[id_{\Delta^n}]$ abbildet. Dank τ können wir $\pi_n(X, A, a) = [(\Delta^n, \partial\Delta^n, e_0), (X, A, a)]$ sehen. Somit faktorisiert $h_n^{(X,A)}$ als

$$\begin{array}{ccccc} \pi_n^\#(X, A, a) & \xrightarrow{\tilde{h}_n} & H_n^{(n-1)}(X, A, a) & \xrightarrow[\phi]{\cong} & H_n(X, A, a) \\ [\alpha] & \longrightarrow & \alpha_*(\tilde{j}_n) & & \end{array}$$

wobei $\tilde{j}_n = \phi^{-1}([id_{\Delta^n}])$, für $\phi: H_n^{(n-1)}(\Delta^n, \partial\Delta^n, e_0) \xrightarrow{\cong} H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n)$.

Wir konstruieren nun ein Inverse Ψ von $\tilde{h}_n$; definiere $\overline{\Psi}: S_n^{(n-1)}(X, A, a) \to \pi_n^\#(X, A, a)$ durch $\overline{\Psi}(\sigma) = [\sigma]$ für Basis-Elemente, und erweitern linear. Da $S_{n-1}^{(n-1)}(X, A, a) = 0$ (weil $S_{n-1}^{(A,n-1)}(A, a) = S_{n-1}^{(A,n-1)}(X, a)$) sind alle Elemente von $S_n^{(n-1)}(X, A, a)$ Zykeln. Um einen wohldefinierten Homomorphismus

$$\Psi: H_n^{(n-1)}(X, A, a) \to \pi_n(X, A, a)$$

zu bekommen, genügt es noch zu zeigen:

(*) $\Psi \circ d = 0$, wobei $d: S_{n+1}^{(n-1)}(X, A, a) \to S_n^{(n-1)}(X, A, a)$.

Dann ist leicht zu zeigen, dass Ψ und $\tilde{h}_n$ inverse zu einander sind. (benutze P aus dem Beweis von 3.24).

<u>Beweis von (*)</u>: definiere $b_n \in \pi_n(\partial\Delta^{n+1}, \Delta^{n+1, n-1}, e_0)$ durch

$$b_n = [d_0] \cdot w_{e_1 e_0} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i d_i \qquad \text{für } i \geq 3,$$

und $b_2 = ([d_0] \cdot w_{e_1 e_0})[d_2][d_1]^{-1}[d_3]^{-1}$.

Hier ist w_{e_1, e_0} der Affine Weg von e_1 nach e_0 in Δ^{n+1}.

Sei $K = \Delta^{n+1}$ und sei $\sigma: (K, K^{(n-1)}, K^{(0)}) \to (X, A, a)$ ein Basis Element von $S_{n+1}^{(n-1)}(X, A, a)$. Dann gilt per Definition

$$\Psi \circ d(\sigma) = \Psi\Big(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \sigma \circ d_i\Big) = \sigma_n^\# i_*([b_n])$$

für $\pi_n^\#(\partial\Delta^{n+1}, \Delta^{n+1, n-1}, e_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n^\#(K, K^{(n-1)}, e_0) \xrightarrow{\sigma_n^\#} \pi_n^\#(X, A, a)$.

Deshalb genügt es zu zeigen: $i_*([b_n]) = 0$.

Aber $K^{(n-1)}$ ist $(n-2)$-zusammenhängend (zum Beispiel: Induktionsvoraussetzung + $\tilde{H}_i(K^{(n-1)}) = 0$ für $i \leq n-2$).

Insbesondere folgt per Induktionsvoraussetzung, dass
$h_n : \pi_{n-1}(K^{(n-1)})^{ab} \to H_{n-1}(K^{(n-1)})$ ein Isomorphismus ist.
Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & & \pi_n(K, K^{(n-1)}, e_0) \arrow[dr, "\partial'"] & \\ b_n \in & \pi_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}, e_0) \arrow[ur, "i_*"] \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h"] & & \pi_{n-1}^{ab}(K^{(n-1)}, e_0) \arrow[d, "① h", "\cong"'] \\ & H_n(K^{(n)}, K^{(n-1)}) \arrow[r, "\partial"] \arrow[dr, "i'_*"] & & H_{n-1}(K^{(n-1)}) \\ & & H_n(K, K^{(n-1)}) \arrow[ur, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

Aber b_n war genau als "Homotopie" version des Rand-Operators auf $[id_{\Delta^{n+1}}]$ definiert, also $i'_* h(b_n) = [d(id_{\Delta^{n+1}})] = 0$ in $H_n(K, K^{(n-1)})$.
Also $h\,\partial(b_n) = \partial h(b_n) = 0$, und da ① ein Iso ist, folgt $\partial(b_n) = 0$; Also $\partial' i_*(b_n) = \partial(b_n) = 0$, und ∂' ist ein Iso da $K \simeq *$. Also folgt $i_*(b_n) = 0$ und $(*)$ gilt #

Von den relativen Hurewicz Sätze erhalten wir die Whitehead Sätze:

<u>3.37 Satz</u>: Seien X, Y <u>einfach zusammenhängend</u>, und sei $f : X \to Y$ gegeben. Sei $n \geq 2$. Falls $f_* : H_i(X; \mathbb{Z}) \to H_i(Y, \mathbb{Z})$ für $i < n$ bijektiv und für $i = n$ surjektiv ist, so ist f ein n-Äquivalenz.

<u>Beweis</u>: Wir können annehmen, f ist ein Inklusion; dann folgt $H_i(Y, X; \mathbb{Z}) = 0$ für $i \leq n$, und dann $\pi_i(Y, X) = 0$ für $i \leq n$, dank 3.33. #

<u>3.38 Theorem (Whitehead)</u>: Sei $f : X \to Y$ eine Ab. zwischen einfach zusammenhängenden CW-Komplexe. Induziert f ein Isomorphismus $f_* : H_*(X; \mathbb{Z}) \to H_*(Y; \mathbb{Z})$, so ist f ein Homotopie-Äquivalenz.

<u>Beweis</u>: Aus 3.37 folgt, dass f eine schwache Homotopie-Äquivalenz ist, also eine Homotopie-Äquivalenz dank 3.9. #

Im nicht einfach zusammenhängende Fall gilt das Theorem nicht!