Wir haben in II 2.38 bewiesen, dass $V^{\mathbb{F}}_{n,k}$ ein endlicher CW-Komplex ist. Als homogener Raum wird es wie folgt beschrieben:
$G(n) = O(n), U(n)$ für $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Dann wirkt $G(n)$ links und stetig auf $V_{n,k}$ durch $A(v_1,\dots,v_k) = (Av_1,\dots,Av_k)$.
Als Basispunkt nehmen wir $x_0 = (e_{n-k+1},\dots,e_n)$, mit $(e_1,\dots,e_n)$ die kan. Basis. Der Stabilisator von x_0 ist $G(n-k) \hookrightarrow G(n)$, mit der Inklusion $A \mapsto \begin{pmatrix}A&0\\0&1\end{pmatrix}$ als abg. Untergruppe. Da $G(n)$ transitiv auf $V_{n,k}$ wirkt erhalten wir einen Homöomorphismus

$$h_{n,k} : G(n)/G(n-k) \xrightarrow{\cong} V_{n,k}$$

(Kompakt → Hausdorff). Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G(n)/G(n-l) \arrow[r, "h_{n,l}", "\cong"'] \arrow[d, "q"'] & V_{n,l} \arrow[d, "p"] \\
G(n)/G(n-k) \arrow[r, "h_{n,k}", "\cong"'] & V_{n,k}
\end{tikzcd}$$

für $1 \le k \le l \le n$, wobei q die Quot.Ab. und $p(v_1,\dots,v_l) = (v_{l-k+1},\dots,v_l)$. Hier sind p und q Faserbündel: es genügt dank 2.13 ein lokalen Schnitt von $V_{n,n} \xrightarrow{p} V_{n,k}$ in x_0 zu finden. Sei $U = \{(v_1,\dots,v_k) \in V_{n,k} \mid (e_1,\dots,e_{n-k},v_1,\dots,v_k)$ ist eine Basis von $\mathbb{F}^n\}$. Dann ist U eine offene Umgebung von x_0; Ein Schnitt $s : U \to V_{n,n}$ ist als

$s(v_1,\dots,v_k) = (f_1,\dots,f_{n-k},v_1,\dots,v_k)$ gegeben, wobei man $(f_1,\dots,v_k)$ von $(e_1,\dots,v_k)$ gewinnt, indem man Gram-Schmidt auf $(v_k, v_{k-1},\dots,e_1)$ verwendet mit Ergebnis $(v_k,\dots,v_1,f_{n-k},\dots,f_1)$. Damit ist bewiesen: für $1 \le k \le l \le n$ ist

$$V^{\mathbb{F}}_{n-k,l-k} \xhookrightarrow{i} V^{\mathbb{F}}_{n,l} \xrightarrow{p} V^{\mathbb{F}}_{n,k}$$

ein Faserbündel (i = Inklusion der Faser). Unter den Isomorphismen $h_{..}$ entspricht es dem Faserbündel

$$\underset{\displaystyle G(n-k)/G(n-k-(l-k))}{\underset{\shortparallel}{G(n-k)/G(n-l)}} \hookrightarrow G(n)/G(n-l) \xrightarrow{q} G(n)/G(n-k).$$

<u>2.15 Beispiel</u> (Grassmannsche-Mannigfaltigkeiten). Wir definieren $G_{n,k} = G^{\mathbb{F}}_{n,k} = \{ V \subset \mathbb{F}^n \mid V \text{ Untervektorraum der Dim } k \}$ für $1 \leq k \leq n$, als Menge. Wir haben eine Quotientenabbildung

$$\pi : V_{n,k} \to G_{n,k}, \quad (v_1, \dots, v_k) \mapsto \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

und versehen $G_{n,k}$ mit der Quotiententopologie. Man kann beweisen, dass $G_{n,k}$ die Struktur einer Mannigfaltigkeit der Dimension $d k (n-k)$, $d = 1, 2$ für $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ hat. Wir werden später eine CW-Zerlegung angeben.

Als Basispunkt nehmen wir $y_0 = \langle e_{n-k+1}, \dots, e_n \rangle \in G_{n,k}$.

Die Gruppe $G(n)$ wirkt stetig und transitiv auf $G_{n,k}$, und der Stabilisator von y_0 ist die abgeschlossene Untergruppe

$$G(n-k) \times G(k) \hookrightarrow G(n), \quad (A, B) \mapsto A \oplus B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Die induzierte Abbildung $\phi_{n,k} : G(n) / G(n-k) \times G(k) \longrightarrow G_{n,k}$ ist bijektiv und stetig; es ist leicht zu prüfen, dass $G_{n,k}$ Hausdorff ist, also ist $\phi_{n,k}$ ein Homöo. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} G(n)/G(n-k) \arrow[r, "h_{n,k}"] \arrow[d, "q"] & V_{n,k} \arrow[d, "\pi"] \\ G(n)/G(n-k) \times G(k) \arrow[r, "\phi_{n,k}"] & G_{n,k} \end{tikzcd}$$

Wir können einen lokalen Schnitt t von π in y_0 angeben: Sei $V = \{ W \in G_{n,k} \mid W \cap \langle e_1, \dots, e_{n-k} \rangle = 0 \}$; dann ist V eine offene Umgebung von y_0 in $G_{n,k}$. Für $W \in G_{n,k}$ bilden die orthogonale Projektion von $e_{n-k+1}, \dots, e_n$ eine Basis $\{ e^W_{n-k+1}, \dots, e^W_n \}$ von W. Wir verwenden Gram-Schmidt auf diese Basis und erhalten einen k-Rahmen

$$(f^W_{n-k+1}, \dots, f^W_n) =: t(W) \in V_{n,k}.$$

Die Stetigkeit von t ist leicht zu prüfen; es gilt $\pi \circ t(W) = W \ \forall W \in V$, und $t(W) \in U$, die offene Umgebung von $x_0 \in V_{n,k}$ aus 2.14. Also ist $st : U \to V_{n,n}$ ein lokaler Schnitt von $V_{n,n} \xrightarrow{p} V_{n,k} \xrightarrow{\pi} G_{n,k}$

in y_0. Das beweist dass q und π Faserbündel sind:

$$\begin{array}{ccccc} V_{k,k} & \hookrightarrow & V_{n,k} & \xrightarrow{\pi} & G_{n,k} \\ \cong & & \cong & & \cong \\ G(k) & \longrightarrow & G(n)/_{G(n-k)} & \xrightarrow{q} & G(n)/_{G(n-k)\times G(k)} \end{array}$$

Hier sind die Inklusionen der Faser durch $V_{k,k} \to V_{n,k}$, $(f_1,\dots,f_k) = (if_1,\dots,if_k)$, $i: \mathbb{F}^k \cong 0\times\mathbb{F}^k \hookrightarrow \mathbb{F}^n$, und $G(k) \to G(n)/G(n-k)$, $A \mapsto [\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A\end{pmatrix}]$ gegeben.

<u>2.16 Bemerkung</u>: die gleiche Konstruktionen funktionieren für den Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$, und wir erhalten Faserbündel $V^{\mathbb{H}}_{n-k,\ell-k} \hookrightarrow V^{\mathbb{H}}_{n,\ell} \to V^{\mathbb{H}}_{n,k}$ und $V^{\mathbb{H}}_{k,k} \hookrightarrow V^{\mathbb{H}}_{n,k} \xrightarrow{\pi} G^{\mathbb{H}}_{n,k}$. [z.B Husemoller, Fibre bundles, Kap 7].

<u>2.17 Definition:</u> Als spezial Fall von den obigen Faserungen erhält man die berühmte Hopf-Faserbündel:

$$\left.\begin{array}{l} S^0 \to S^n \to \mathbb{R}P^n \\ S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n \\ S^3 \to S^{4n+3} \to \mathbb{H}P^n \end{array}\right\} \text{ als } V^{\mathbb{F}}_{1,1} \to V^{\mathbb{F}}_{n+1,1} \to G^{\mathbb{F}}_{n+1,1} \text{ für } \mathbb{F} = \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{H} \end{array}\right.$$

Besonders bemerkenswert sind die Fälle $n=1$:

$$S^0 \to S^1 \to S^1, \quad S^1 \to S^3 \xrightarrow{h} S^2, \quad S^3 \to S^7 \xrightarrow{h} S^4.$$

Hier ist der Beweis $\mathbb{H}P^1 \cong S^4$ analog zu $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

Dazu kommt noch, mit Hilfe der Oktonionen $\mathbb{O}$:

$$S^7 \to S^{15} \xrightarrow{h} S^8 = \mathbb{O}P^1 \qquad (\mathbb{O}P^2?\ \ \mathbb{O}P^n,\ n\geq 3 \text{ existiert nicht})$$

<u>2.18 Theorem</u>: Für $n \geq 1$ gilt:
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \pi_n(S^n,*) \\ 1 & \longmapsto & [id_{S^n}] \end{array}$$

ist ein Isomorphismus von Gruppen.

<u>Beweis</u>: Für $n=1$ folgt es aus (I.3.18). Wir betrachten die LEF der Serre-Faserung $S^1 \to S^3 \xrightarrow{h} S^2$, insbesondere

$$\pi_2(S^3) \xrightarrow{h_*} \pi_2(S^2) \xrightarrow{\partial} \pi_1(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(S^3).$$

Wir wissen, dass $\pi_2(S^3) = 0 = \pi_1(S^3)$ (1.59), also ist $\partial: \pi_2(S^2) \to \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Aus 1.59 folgt also, dass in $\pi_1(S^1) \xrightarrow{\Sigma_*} \pi_2(S^2) \xrightarrow{\Sigma_*} \pi_3(S^3)$ <u>alle</u> (nicht nur ab der 2.) Homom. Isomorphismen sind ($\pi_1(S^1) \to \pi_2(S^2)$ ist eine Surjektion $\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$, also ein Iso). Außerdem ist klar, dass $\Sigma_*^{n-1}[id_{S^1}] = [id_{S^n}]$, was also ein Erzeuger von $\pi_n(S^n)$ ist. #

Aus der Faserung $S^1 \to S^3 \to S^2$ und $\pi_i(S^1) = 0$, $i \geq 2$ erhalten wir:

<u>2.19 Satz</u>: $h: S^3 \to S^2$ induziert einen Isomorphismus

$$\pi_n(S^3) \to \pi_n(S^2) \qquad \forall\, n \geq 3.$$

Insbesondere gilt: $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$, erzeugt durch $\pm[h]$.

<u>2.20 Bemerkungen:</u> (a) Aus 1.59 und 1.61 wissen wir:

$$\mathbb{Z} \cong \pi_3(S^2) \xrightarrow{\Sigma_*} \!\!\!\!\to \pi_4(S^3) \xrightarrow[\cong]{\Sigma_*} \pi_5(S^4) \xrightarrow[\cong]{} \cdots$$

(also $\pi_4(S^3)$ ist stabil). Insbesondere: $\pi_{n+1}(S^n) \cong \pi_4(S^3)$ ist eine zyklische Gruppe, $\forall\, n \geq 3$.

(b) $\pi_3(S^2) \neq 0$ ist ein zweites Beispiel, dass π_n und $\tilde{H}_n$ deutlich verschieden sind: $\pi_k(M)$ kann $\neq 0$ sein für $k > \dim(M)$, (M eine Mannigfaltigkeit)

<u>2.21 Lemma</u>: Wir haben Faserbündel

$$SO(n) \xrightarrow{i} O(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{Z}/2 \quad \text{und} \quad SU(n) \xrightarrow{i} U(n) \xrightarrow{\det} S^1.$$

Insbesondere gilt:

(a) $SO(n)$ ist zusammenhängend, und $i_*: \pi_k(SO(n), 1) \to \pi_k(O(n), 1)$ ist ein Isomorphismus für $k \geq 1$.

(b) $SU(n)$ ist einfach zusammenhängend, und $i_*: \pi_k(SU(n), 1) \to \pi_k(U(n), 1)$ ist ein Isomorphismus für $k \geq 2$.

<u>Beweis</u>: (a) ist klar (auch ohne Faserungen), da $SO(n) \hookrightarrow O(n)$ die Inklusion einer Zusammenhangskomponente ist.

(b) Wir haben einen globalen Schnitt $S^1 = U(1) \hookrightarrow U(n)$, also ist det ein Faserbündel. Insbesondere ist

$\det_* : \pi_1(U(n),1) \to \pi_1(S^1,1)$ surjektiv; $U(n)$ ist eine top. Gruppe, also ist $\pi_1(U(n),1)$ Abelsch, und

$$h_1 : \pi_1(U(n),1) \to H_1(U(n);\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \text{ ist ein Isomorphismus.}$$

($H_*(U(n);\mathbb{Z})$ wurde in II 2.45 berechnet). Also ist $\det_* : \pi_1(U(n),1) \to \pi_1(S^1,1)$ ein Isomorphismus. Es folgt aus der LEF: $\pi_1(SU(n),1) = 0$ und $\pi_k(SU(n),1) \xrightarrow{i_*} \pi_k(U(n),1)$ ist ein IS für $k \geq 2$. #

Wir werden sehen dass wir eine beliebige Ab. als eine Homotopie-Äquiv. verknüpft mit einer Faserung faktorisieren können.

<u>2.22 Lemma + Def:</u> Sei X ein Raum, $A, B \subset X$ Teilräume. Sei $P(X,A,B) = \{\omega \in X^I \mid \omega(0) \in A, \omega(1) \in B\} \subset X^I$ mit der Teilraum der K.O. Topologie. Sei $e : P(X;A,B) \to A \times B$ durch $e(\omega) = (\omega(0), \omega(1))$ gegeben. Dann ist e eine Faserung.

<u>Beweis:</u> Eigenschaften der KO Top $\Rightarrow$ e ist stetig (da I lokal komp.).

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i_0"'] & P(X,A,B) \arrow[d, "e"] \\ Y \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & A \times B \end{tikzcd}$$

Sei gegeben ein Hochhebungsproblem wie links. Sei $\bar{a} : Y \times I \to X$ adjungiert zu a, also $\bar{a}(y,s) = a(y)(s)$.

Sei $\tilde{J}^2 = (I \times 0) \cup (\partial I \times I)$, und $b : Y \times \tilde{J}^2 \to X$ durch $b(y,s,0) = \bar{a}(y,s)$, $b(y,i,t) = p_i \circ h(y,t)$, mit $A \xleftarrow{p_0} A \times B \xrightarrow{p_1} B$ die Projektionen. Da wir eine Retraktion $r : I^2 \to \tilde{J}^2$ haben, erhalten wir eine Erweiterung

$$\tilde{b} : Y \times I \times I \to X \text{ von } b, \quad \tilde{b}(y,s,t) = b(y, r(s,t)).$$

Sei $H : Y \times I \to X^I$ adjungiert zu $\tilde{b}$. Dann gilt $H(Y \times I) \subset P(X,A,B)$ und H ist die gesuchte Hochhebung. #

<u>2.23 Korollar:</u> Die Abbildungen

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{e_0} & P(X;A,B) & \xrightarrow{e_1} & P(X;A,B) \\ \omega(0) & \leftarrow\!\shortmid & \omega & \mapsto & \omega(1) \end{array}$$

sind Faserungen.

<u>Beweis:</u> Verknüpfe e mit $A \times B \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p_0} A \\ \xrightarrow{p_1} B \end{smallmatrix}$ und verwende Aufgabe 5.1.(a). #