3.39 Beispiel: im I.6.20 hatten wir die Poincaré-Sphäre $p: S^3 \to S^3/I'$, mit I' die binäre Icosaedergruppe (der Ordnung 120) bearbeitet. Hier ist p ein Homologie Isomorphismus (I' ist perfekt: $I'^{ab} = 0$), aber induziert $0 \to I'$ auf π_1. Insbesondere ist p keine Homotopieäquivalenz.

Im nicht zusammenhängende Fall haben wir folg. Verallgemeinerung (und Zusammenfassung):

3.40 Theorem (Whitehead's 2nd Th): Seien X und Y weg-zusammenhängende CW-Komplexe, und sei $f: X \to Y$ eine Abbildg. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(a) f ist eine Homotopie-Äquivalenz

(b) f induziert einen Isomorphismus $f: \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ $\forall n \geq 1$

(c) Seien $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$, $\tilde{Y} \xrightarrow{q} Y$ die universellen Überlagerungen. Dann induziert f einen Isomorphismus $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ und $H_n(\tilde{X}) \to H_n(\tilde{Y})$, für alle $n \geq 2$.

Beweis: (a) <=> (b) haben wir in 3.9 bewiesen.

(b) <=> (c) In beiden Fälle wissen wir, dass $f: \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ ein Iso ist. Wähle $x_0 \in X$, $y_0 = f(x_0)$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \tilde{X}$, $\tilde{y}_0 \in q^{-1}(y_0) \subset \tilde{Y}$, und sei $\tilde{f}$ die Liftung von f:

$$\begin{tikzcd} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "p"] & (\tilde{Y}, \tilde{y}_0) \arrow[d, "q"] \\ (X, x_0) \arrow[r, "f"] & (Y, y_0) \end{tikzcd}$$

Wir können wie üblich annehmen, dass f (und dann auch $\tilde{f}$) eine Inklusion ist; p und q induzieren iso's auf π_n für $n \geq 2$; also gilt:

(b) <=> (b'): $\pi_1(f)$ ist ein Iso und $\pi_n(\tilde{Y}, \tilde{X}, \tilde{x}_0) = 0$ $\forall n \geq 2$

(c) <=> (c'): $\pi_1(f)$ ist ein Iso und $H_n(\tilde{Y}, \tilde{X}; \mathbb{Z}) = 0$ $\forall n \geq 2$.

Aber (b') und (c') sind dank 3.36 Äquivalent, weil $(\tilde{Y}, \tilde{X})$ ein einfach zusammenhängendes Paar ist. #

<u>3.41 Beispiel</u>: Man kann sich wundern, ob man im Theorem auch (c) durch die Aussage "f induziert ein Isomorphismus auf π_1 und in Homologie" ersetzen kann. Aber das gilt nicht. Ein Gegenbeispiel ist nicht so einfach zu finden!

Sei $X = S^1 \vee S^2$, $\omega = [id] \in \pi_1(S^1)$ und $\alpha = [id] \in \pi_2(S^2)$, und notieren wir ebenso ω und α die Bilder von ω und α unter $S^1 \xrightarrow{i_1} S^1 \vee S^2 \leftarrow S^2$. Sei $\beta = 2\alpha - \alpha \cdot \omega$, und sei $h : S^2 \to X$ ein Abbildung, die β darstellt.

$$\begin{tikzcd} S^2 \arrow[r, "h"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, hook, "i_2"] \\ D^3 \arrow[r] & Y \end{tikzcd}$$

Wir kleben eine 3-Zelle entlang h und erhalten Y als CW-Komplex. Der gesuchte Gegenbeispiel ist nun als $f : S^1 \overset{i_1}{\hookrightarrow} X \overset{i_2}{\hookrightarrow} Y$ gegeben:

(a) f induziert einen Isomorphismus in Homologie: Das prüfen wir in zellulärer Homologie; X hat eine $0, 1, 2$-Zelle und Y hat $0, 1, 2, 3$-Zellen, und $Y^{(2)} = X$; wir haben

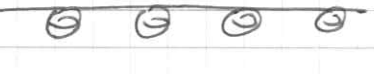
$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & C_1(S^1) \arrow[r] \arrow[d, "\cong", "f_*"'] & C_0(S^1) \arrow[d, "\cong", "f_*"'] \\ 0 \arrow[r] & C_3(Y) \arrow[r, "d_3"] & C_2(Y) \arrow[r] & C_1(Y) \arrow[r] & C_0(Y) \end{tikzcd}$$

und es genügt zu zeigen, dass d_3 ein Isomorphismus ist. Aber d_3 ist Multiplikation mit dem Grad von $S^2 \xrightarrow{h} X \xrightarrow{q} X/S^1 = S^2$ auf $C_3(Y) \cong \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \cong C_2(Y)$.

Aber
$$\begin{tikzcd} \pi_2(S^2) \arrow[r, "h_*"] \arrow[d, "\cong", "h"'] & \pi_2(X) \arrow[d, "h"] & \\ i_2 \in H_2(S^2) \arrow[r, "h_*"] & H_2(X) \arrow[r, "\cong", "q_*"'] & H_2(S^2) \end{tikzcd}$$
kommutiert; Insbesondere gilt

$h_*(i_2) = h h_* h^{-1}(i_2) = h h_*([id]) = h(2\alpha - \alpha \cdot \omega) =$
$2h(\alpha) - h(\alpha) = h(\alpha)$, und $q_* h(\alpha) = i_2$. Also hat qh Grad 1 und d_3 ist ein Iso.

(b) (Y, X) ist 2-zusammenhängend, also $f_* : \pi_1(S^1) \xrightarrow[i_1]{\cong} \pi_1(X) \xrightarrow{\cong} \pi_1(Y)$, und f induziert ein Iso auf π_1.

(c) f ist keine Homotopie-Äquivalenz. Die universelle Überlagerung $\tilde{X}$ von X ist $\mathbb{R}$ mit einer Kopie von S^2, die an jedem $n \in \mathbb{Z}$ angeheftet ist (Lampionkette) ...  ...

Insbesondere ist $\pi_2(X) \cong \pi_2(\tilde{X}) \xrightarrow[\cong]{h} H_2(\tilde{X}) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}$

die freie Abelsche Gruppe mit basis $\alpha_n := \alpha \cdot \omega^n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Nun müssen wir die folgende exakte Folge analysieren:

$$\pi_3(Y,X) \xrightarrow{\partial} \pi_2(X) \xrightarrow{i_{2*}} \pi_2(Y) \to 0$$

Der folgende Lemma impliziert, dass das Bild von ∂ durch $\{\beta \cdot \omega^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ erzeugt ist. Aber $\beta \cdot \omega^n = (2\alpha - \alpha \cdot \omega)\,\omega^n = 2\alpha_n - \alpha_{n+1}$. Also

$$\pi_2(Y) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}\{\alpha_n\} \big/ {2\alpha_n - \alpha_{n+1}} \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \subset \mathbb{Q}.$$

<u>3.42 Satz</u>: Sei $n \geq 2$ und X ein CW-komplex.

Sei $h: S^n \to X$ eine Abbildung, und sei Y durch Anheften einer $n+1$-Zelle entlang h erhalten.

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "i"] \\ D^{n+1} \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & Y \end{tikzcd}$$

Dann ist (Y,X) n-zusammenhängend, und der Kern von $i_*: \pi_n(X) \twoheadrightarrow \pi_n(Y)$ ist durch $\{[h] \cdot \gamma \mid \gamma \in \pi_1(X)\}$ erzeugt.

Wir beweisen zuerst ein Analogon wenn X einfachzusammenhängend ist:

<u>3.43 Lemma</u>: Sei X einfachzusammenhängend, und sei Y durch X durch anheften von $(n+1)$-Zellen gewonnen, entlang $\{f_\alpha : S^n \to X\}_{\alpha \in A}$. Dann ist

$$\begin{tikzcd} \coprod_A S^n \arrow[r, "\amalg f_\alpha"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \coprod D^{n+1} \arrow[r, "\amalg g_\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

$\pi_n(X) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y)$ surjektiv mit Kernel von $\{[f_\alpha]\}$ erzeugt (hier $\pi_n(X) \cong [S^n, X]$).

<u>Beweis</u>: Als relativer CW mit Zellen in Dimension $\geq n+1$ ist (Y,X) n-zusammenhängend. Wir haben ein kom. Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_{n+1}(Y,X) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "h", "\cong"'] & \pi_n(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d] & \pi_n(Y) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ H_{n+1}(Y,X) \arrow[r, "\partial'"] & H_n(X) \arrow[r, "f_*"] & H_n(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Da $\pi_1(X) = 0$ ist h ein Iso (dank 3.36).

Es folgt also, dass $\pi_{n+1}(Y,X)$ durch $\{[g_\alpha] \mid \alpha \in A\}$ erzeugt ist (wie $H_{n+1}(Y,X)$), und $\ker f_* = \text{Bild}\,\partial$ ist also von $\{\partial[g_\alpha] = [f_\alpha] \mid \alpha \in A\}$ erzeugt. #

Beweis von 3.42: Als relativer CW mit einer $(n+1)$-Zelle e ist (Y, X) n-zusammenhängend. Sei $\tilde{X} \xrightarrow{p} X$ die universelle Überlagerung. Dann kann man die universelle Überlagerung von Y als relativer CW $(\tilde{Y}, \tilde{X})$ konstruieren, mit einer $(n+1)$ Zelle e_γ für jedes $\gamma \in \pi_1(X) = \pi_1(Y)$. (vergleiche mit II.1.32). Etwas genauer: Wähle ein Basispunkt $x_0 \in X$ und $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Identifiziere $\pi_1(X, x_0)$ mit der Decktransformationsgruppe von $\tilde{X}$. Dann ist e_γ entlang $\tilde{h}_\gamma$: $(S^n, *) \xrightarrow{\tilde{h}} (\tilde{X}, \tilde{x}_0) \xrightarrow{\gamma} (\tilde{X}, \gamma(x_0))$ angeheftet:

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{Y}, \tilde{x}_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, *) \arrow[ur, bend left, "\tilde{h}"] \arrow[r, "h"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

Da $\tilde{h}$ und $\tilde{h}_\gamma = \tilde{h} \circ \gamma$ frei homotop entlang die Liftung $\tilde{\gamma}: (I, 0) \to (\tilde{X}, x_0)$ von γ sind, sind $h = p \circ \tilde{h}$ und $p h_\gamma$ frei homotop entlang γ, also $p_*[\tilde{h}_\gamma] = [h] \cdot \gamma$. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n(\tilde{X}) \arrow[r, "\tilde{i}_*"] \arrow[d, "\cong"', "p_*"] & \pi_n(\tilde{Y}) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "q_*"] & 0 \\ \pi_n(X) \arrow[r, "i_*"] & \pi_n(Y) & \end{tikzcd}$$

kommutiert, und p_*, q_* sind Iso's. Dank 3.43 ist $\mathrm{Ker}(\tilde{i}_*)$ von $\{[\tilde{h}_\gamma] \mid \gamma \in \pi_1(X, x_0)\}$ erzeugt, also ist $\mathrm{Ker}(i_*)$ von $\{[h] \cdot \gamma \mid \gamma \in \pi_1(X, x_0)\}$ erzeugt. #

3.44 Bemerkung: der coole Beispiel Y aus 3.41, zusammen mit $f: S^1 \to Y$, zeigt uns mehrere Sachen:

(a) Y hat nur vier Zellen, aber $\pi_2(Y)$ ist nicht endlich erzeugt! Eine analoge Konstruktion (mit $\beta = n\alpha - \alpha\omega$) zeigt, dass man einen endliche CW-Komplex konstruieren kann, mit $\pi_2(Y) = \mathbb{Z}[\frac{1}{p_1}, \dots, \frac{1}{p_r}]$ für endlich viel Primzahlen p_i. Es scheint nicht bekannt zu sein, ob ein endlicher CW Y mit $\pi_2(Y) = \mathbb{Q}$ existiert! (P.S: $\pi_2(X)$ ist auch nicht endlich erzeugt).

(b) Y und S^1 haben die gleiche Kohomologie, und sämtliche Strukturen (Cup Produkt, Kohomologie op) stimmen überein!