Wir erwähnen einen nützliches Kriterium auf $F: (\mathbb{Z}, \leq) \to Ab$ (R-Mod) der garantiert, dass $\lim^1 F = 0$

4.23 Definition: Ein Funktor $F: \mathbb{Z} \to Ab$ erfüllt die Mittag-Leffler Eigenschaft, wenn zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ ein $N \leq n$ existiert, sodass

$$\text{Bild}(F(m) \to F(n)) = \text{Bild}(F(N) \to F(n))$$

für alle $m \leq N$ gilt. Wir sagen, dass F die triviale ML Eigenschaft hat, wenn zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ ein $N \leq n$ existiert, mit $\text{Bild}(F(N) \to F(n)) = 0$.

4.24 Satz: Falls $F: \mathbb{Z} \to Ab$ die ML-Eigenschaft hat, so gilt $\lim^1 F = 0$.

Beweis: Betrachte $\tilde{\varphi}_F : \prod_{m \in \mathbb{Z}} F_m \to \prod_{n \in \mathbb{Z}} F_n$, $\tilde{\varphi}_F(\{x_m\}_m) = \{x_n - f(x_{n-1})\}_n$ wie in 4.18, sodass $\lim^1 F = \text{Coker}\, \tilde{\varphi}_F$. ($F$ als $\cdots \to F_{n-1} \xrightarrow{f} F_n \xrightarrow{f} F_{n+1} \to \cdots$ geg.).

(a) F erfülle die triviale ML-Eigenschaft, und sei $\{y_n\}_n \in \prod_{n \in \mathbb{Z}} F_n$.

Setze $\{x_m\}_m \in \prod_{m \in \mathbb{Z}} F_m$ mit $x_m = \sum_{k \geq 0} f^k(y_{m-k})$.

Dann gilt $\tilde{\varphi}_F(\{x_m\}_m) = \{y_n\}_n$ und $\tilde{\varphi}_F$ ist surjektiv, also $\lim^1 F = 0$.

(b) F erfülle die ML-Eigenschaft; definiere $G: (\mathbb{Z}, \leq) \to Ab$ durch $G_n = \text{Bild}(F(N) \to F(n)) \subset F_n$, mit $g = F|_{G_n} : G_n \to G_{n+1}$.

Sei $H = \text{Coker}(G \subset F)$, so dass $0 \to G \to F \to H \to 0$ exakt in $Ab^{\mathbb{Z}}$ ist. Nun erfüllt H die triviale ML, also gilt: $\lim^1 H = 0$. Andererseits $g: G_n \to G_{n+1}$ ist für alle n surjektiv, und es ist leicht zu prüfen, dass dann $\tilde{\varphi}_G$ auch surjektiv ist, also $\lim^1 G = 0$ (Sonderfall der ML-Eigenschaft).

Aus 4.19 folgt also $\lim^1 F = 0$. #

4.25 Definition: Sei C ein Kettenkomplex. Eine Filtrierung $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ von C durch Unterkomplexe

$$\cdots \hookrightarrow F_{s-1} \hookrightarrow F_s \hookrightarrow F_{s+1} \hookrightarrow \cdots \quad \subset C$$

heißt <u>beschränkt</u>, falls zu jedem $n\in\mathbb{Z}$ Zahlen $s(n) < t(n) \in \mathbb{Z}$ existieren, mit $(F_{s(n)})_n = 0$ und $(F_{t(n)})_n = C_n$

4.26 Theorem: Sei $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ eine beschränkte Filtrierung eines Kettenkomplexes C durch Unterkomplexe.
Dann konvergiert die Spektral-Sequenz

$$E^1_{s,t} = H_{s+t}(F_s/F_{s-1}) \Rightarrow H_{s+t}(C)$$

[die dem UEC aus 4.9 zugeordnet ist] stark gegen $H_{s+t}(C)$ (bezüglich der Filtrierung $FH_s = \text{Bild}\,(H_*(F_s)\to H_*(C))$ von $H_*(C)$).

<u>Beweis</u>: Es ist leicht zu prüfen, dass $\{FH_s\}$ als Filtrierung von $H_*(C)$ [Kettenkx mit $d=0$] auch beschränkt ist.
Das impliziert dass $\{FH_s\}$ eine erschöpfende, Hausdorff und Vollständige (erfüllt die triviale $\cap L$-Eigenschaft) Filtrierung von $H_*(C)$ ist. Es bleibt noch einen Isomorphismus

$$E^\infty_s \xrightarrow{\cong} FH_s/FH_{s-1} \quad \text{für alle } s\in\mathbb{Z}$$

zu definieren:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "i"] & H_* F_{s-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & H_* F_s \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots & & H_*(F_s/F_{s-1}) \arrow[ul, "k"] & \cdots \arrow[ul, "k"]
\end{tikzcd}$$

Sei $v_s : H_* F_s \to H_* C$ von der Inklusion $F_s \hookrightarrow C$ induziert.
Wir haben Isomorphismen, die von v_s und j induziert sind:

$$\begin{tikzcd}
H_*F_s/_{\text{Bild}\, i + \text{Ker}\, v_s} \arrow[d, "{[v_s]}"', "\cong"] \arrow[r, equal] & H_*F_s/_{\text{Ker}\, j + \text{Ker}\, v_s} \arrow[d, "{[j]}", "\cong"'] & \left(\begin{array}{c}\text{Untergrupp. von} \\ H_*(F_s/F_{s-1})\end{array}\right) \arrow[dl, "\subseteq"] \\
FH_s/FH_{s-1} & \text{Bild}\, j/_{j(\text{Ker}\, v_s)} &
\end{tikzcd}$$

Ferner gilt

(a) $\text{Bild}\, j = \text{Ker}\, K = Z_s^\infty$: in der Tat, per Definition

$Z_s^r = K^{-1}(\text{Bild}(i^{r-1} : H_* F_{s-r} \to H_* F_{s-1}))$

(Zu prüfen: 4.10 ist mit 4.5 verträglich!).

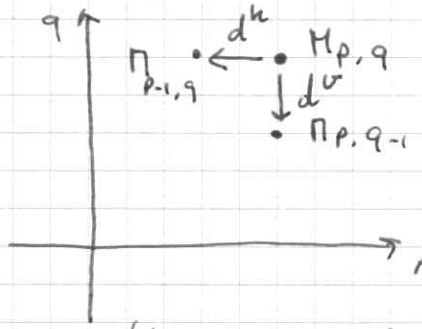
Dann folgt $Z_s^\infty = K^{-1}(\bigcap_r \text{Bild}(i^{r-1})) = K^{-1}(0) = \text{Ker}\, k$

(die Filtrierung ist beschränkt!).

(b) $j(\text{Ker}\, v_s) = B_s^\infty$: $B_s^r = j(\text{Ker}(i^{r-1} : H_* F_s \to H F_{s+r-1}))$

und $B_s^\infty = \bigcup_r B_s^r = j(\text{Ker}\, v_s)$. #.

<u>4.27 Definition</u>: ein Doppelkomplex von R-Moduln ist ein Trippel (M, d^h, d^v) wobei $M = \{M_{p,q}\}_{(p,q)\in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ ein bigraduierter R-Modul ist, und wobei $d^h : M \to M$ und $d^v : M \to M$ Homomorphismen vom Bigrad $(-1,0)$ und $(0,-1)$ sind (oft wird M auf dem Gitter $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \subset$ Ebene visualisiert), so dass die Gleichungen



(h = horizontal, v = vertikal)

$$(*) \begin{cases} d^h \circ d^h = 0 \\ d^v \circ d^v = 0 \\ d^h d^v + d^v d^h = 0 \end{cases}$$

gelten.

<u>4.28 Definition</u>: Sei (M, d^h, d^v) ein Doppelkomplex. Wir definieren einen Kettenkomplex $(\text{Tot}_\bullet M, d)$ durch

$$\text{Tot}_n M = \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q} \quad \text{und} \quad d = d^h + d^v : \text{Tot}_n M \to \text{Tot}_{n-1} M,$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ (aus $(*)$ folgt $d^2 = 0$).

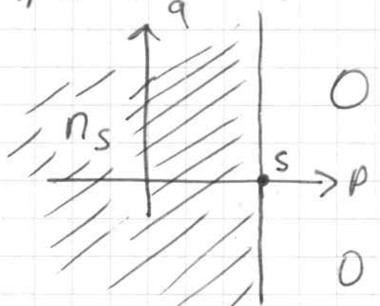
<u>4.29 Bemerkung</u>: Sei (M, d^h, d^v) ein Doppelkomplex, und sei $p \in \mathbb{Z}$ gewählt. Dann ist (dank $(*)$)

$$(M_{p,*}, d^v) : \quad \cdots \xrightarrow{d^v} M_{p,q+1} \xrightarrow{d^v} M_{p,q} \xrightarrow{d^v} M_{p,q-1} \xrightarrow{d^v} \cdots$$

ein Kettenkomplex (p-te Spalte von M).

Hier bezeichnet $M_{p,q}$ die homogene Gruppe vom Grad q in $M_{p,*}$ (nicht verträglich mit $\text{Tot}_\bullet M$, wo $M_{p,q}$ Grad $p+q$ hat!).

Sei $H_q(M_{p,*}, d^v)$ die q-te Homologie-Gruppe von $(M_{p,*}, d^v)$.
Bemerke, dass $d^h : (M_{p,*}, d^v) \to (M_{p-1,*}, d^v)$ keine Abbild. von Kettenkomplexe ist (wir haben $d^h d^v = - d^v d^h$), aber wohl "bis auf Zeichen", so dass d^h einen wohldefinierten Homomorphismus
$$d^h : H_q(M_{p,*}, d^v) \to H_q(M_{p-1,*}, d^v) \quad (✡)$$
induziert. Es gilt $d^h \circ d^h = 0$ dank $(*)$, also ist
$$\cdots \to H_q(M_{p+1,*}, d^v) \xrightarrow{d^h} H_q(M_{p,*}, d^v) \xrightarrow{d^h} H_q(M_{p-1,*}, d^v) \to \cdots$$
ein Kettenkx (mit $H_q(M_{p,*}, d^v)$ in Grad p). Wir notieren
$$H_p(H_q(M, d^v), d^h)$$
seine p-te Homologiegruppe (Unterquotient von $M_{p,q}$).
Nun filtrieren wir $\mathrm{Tot}.M$ wie folgt: für $s \in \mathbb{Z}$, setze
$(M^v_s, d^h, d^v) \subset (M, d^h, d^v)$ (unterdoppelkx)
mit
$$(M^v_s)_{p,q} = \begin{cases} M_{p,q} & \text{für } p \leq s \\ 0 & \text{für } p > s \end{cases}$$



Setze $F^v_s = \mathrm{Tot}\, M^v_s$.
Dann erhalten wir eine Filtrierung
$$\cdots \subset F^v_{s-1} \subset F^v_s \subset F^v_{s+1} \subset \cdots \quad \subset \mathrm{Tot}.M$$
von $\mathrm{Tot}.M$ durch Unterkomplexe. Wir untersuchen nun die Sp. Sek $({}^vE^r, d^r)$, die durch diese Filtrierung entsteht.
Wir wissen, dass ${}^vE^1_{s,t} = H_{s+t}(F^v_s / F^v_{s-1}) \underset{(*)}{=} H_t(M_{s,*}, d^v)$
(wie in 4.26).
Hier der Unterschied im internen Grad $(*)$ entsteht da $(F^v_s / F^v_{s-1})_{s+t} = M_{s,t}$.

<u>Behauptung</u>: $d^1 : {}^vE^1_{s,t} \to {}^vE^1_{s-1,t}$ ist gleich d^h (✡):
per Definition ist d^1 als $d^1 = j\partial$ gegeben:

$$\begin{tikzcd}
 & H_{s+t-1}(F^v_{s-1}) \arrow[d, "j"] & & H_{s+t}(F^v_s) \arrow[d, "j"] & \\
{}^vE^1_{s-1,t} \arrow[r, equal] & H_{s+t-1}(F^v_{s-1}/F^v_{s-2}) & & H_{s+t}(F^v_s/F^v_{s-1}) \arrow[ll, dashed, "d^1"] \arrow[llu, "k=\partial"'] \arrow[r, equal] & {}^vE^1_{s,t}
\end{tikzcd}$$

Wir müssen den Rand $\partial : H_n(F_s^v/F_{s-1}^v) \to H_{n-1}(F_{s-1}^v)$ ansehen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & (F_{s-1}^v)_n & \to & (F_s^v)_n & \to & (F_s^v/F_{s-1}^v)_n & \to & 0 \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d^v & & \\
0 & \to & (F_{s-1}^v)_{n-1} & \to & (F_s^v)_{n-1} & \to & (F_s^v/F_{s-1}^v)_{n-1} & \to & 0
\end{array}$$

Sei $[z] \in H_n(F_s^v/F_{s-1}^v)$ mit $z \in \operatorname{Ker} d^v \subset (F_s^v/F_{s-1}^v)_n$.
$(F_s^v/F_{s-1}^v)_n = M_{s,n-s}$ ist ein Direkter Summand von $(F_s^v)_n = \bigoplus_{\substack{p+q=n \\ p\le s}} M_{p,q}$, und wir betrachten z als $\in (F_s^v)_n$.
Nun im mittleren d des Diagramms: $d(z) = d^h(z) + d^v(z)$
$= d^h(z) \in M_{s-1,n-s} = (F_{s-1}^v/F_{s-2}^v)_{n-1} \subset (F_{s-1}^v)_{n-1}$.
Das zeigt, dass $j\partial([z]) = [d^h z]$, und die Behauptung ist bewiesen.

Folgerung: ${}^vE^2_{s,t}$ ist die s-te Homologie von $(H_t(M_{*,t}, d^v), d^h)$, also

$${}^vE^2_{s,t} = H_s(H_t(M, d^v), d^h).$$

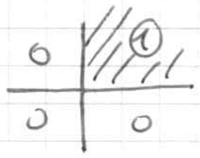
Nun können wir die ganze Bemerkung wiederholen, indem wir Zeilen $(M_{*,q}, d^h)$ von (M, d^h, d^v) als Kettenkx betrachten, etc... Die Filtrierung $F_s^h = \operatorname{Tot} M_s^h$ von $\operatorname{Tot} M$,
mit

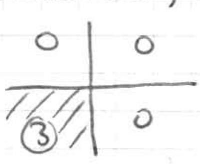
$$(M_s^h)_{p,q} = \begin{cases} M_{p,q} & \text{für } q \le s \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

induziert ein Sp.-Seq mit E^2-Term

$${}^hE^2_{s,t} = H_s(H_t(M, d^h), d^v).$$

4.30 Definition: Ein Doppelkomplex (M, d^h, d^v) heißt ein
- Doppelkx vom ersten Quadrant, falls $M_{p,q} = 0$ für p oder $q < 0$.
- Doppelkx vom dritten Quadrant, falls $M_{p,q} = 0$ für p oder $q > 0$.





4.31 Theorem: Sei (M, d^h, d^v) ein Doppelkomplex vom ersten oder dritten Quadrant. Dann existieren stark konvergierende Spektralsequenzen

$$ {}^vE^2_{s,t} = H_s(H_t(M, d^v), d^h) \Rightarrow H_{s+t}\,\mathrm{Tot}\, M $$

$$ {}^hE^2_{s,t} = H_s(H_t(M, d^h), d^v) \Rightarrow H_{s+t}\,\mathrm{Tot}\, M $$

Beweis: Wenn M vom ersten oder dritten Quadrant ist, so sind die Filtrierungen $\{F^v_s\}_s$ und $\{F^h_s\}_s$ von $\mathrm{Tot}\, M$ offensichtlich beschränkt. Also konvergieren die Assoziierte Spektralsequenzen stark gegen $H_*\mathrm{Tot}\, M$, nach 4.26. Die Beschreibung der E^2-Terms wurde in 4.29 bewiesen. #