2.24 Lemma + Def : Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung.
Betrachte folgendes Pull-Back-Diagramm womit $E(f)$, p, q definiert werden.

$$\begin{tikzcd} E(f) \arrow[r] \arrow[d, "p\times q"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & P(Y,Y,Y) = Y^I \arrow[d, "e"] \\ Y \times X \arrow[r, "\mathrm{id}\times f"] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

Betrachte das weitere Diagramm:

$$\begin{tikzcd} E(f) \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "\simeq q"'] & Y \\ X \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Hier sind p und q Faserungen, und q ist eine Deformationsretraktion, mit Inverse $s: X \to E(f)$, $x \mapsto (x, c_{f(x)})$ mit $c_{f(x)} \in Y^I$ konstant in $f(x)$. Es gilt $f = p \circ s$.

__Beweis__: $p \times q$ ist eine Faserung ist, weil e eine ist und $\lrcorner$, verwende hier Aufgabe 5.1.(d). Dann sind auch p und q Faserungen (Verknüpfe mit Proj.).
Hier $E(f) \cong \{(x,\omega) \in X \times Y^I \mid f(x) = \omega(1)\}$ und
$E(f) \xrightarrow{p} Y$, $(x,\omega) \mapsto \omega(0)$, $E(f) \xrightarrow{q} X$, $(x,\omega) \mapsto x$.
Dann gilt $f = p \circ s$ per Definition. Wir haben $q \circ s = \mathrm{id}_X$ und $\mathrm{id}_{E(f)} \overset{H}{\simeq} s \circ q$, mit $H: E(f) \times I \to E(f)$,
$H((x,\omega),t) = (x, \omega_t)$, mit $\omega_t: I \to Y$, $s \mapsto \omega((1-t)s)$.
#

2.25 Beispiel: Sei $(Y,*)$ ein punktierter Raum, und sei f die Inklusion des Basispunkt. Dann notieren wir
$EY := E(f) = \{\omega \in Y^I \mid \omega(0) = *\}$. Wir erhalten also eine Faser-sequenz $\Omega Y \to EY \xrightarrow{p} Y$.
Da $EY \simeq *$ bekommen wir aus der LEF dieser Faser-Sequenz: $\partial: \pi_n(Y,*) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\Omega Y, *)$, $\forall n \geq 1$.

2.26 Definition : Sei $f: (X,*) \to (Y,*)$ eine punktierte Abb.
Ist $(*, c_*)$ als Basispunkt von $E(f)$ gewählt, so sind auch p, q, s, H_t punktiert. Die Faser $F(f)$ von $E(f) \xrightarrow{p} Y$ heißt die __Homotopiefaser__ der punkt. Abb $f: (X,*) \to (Y,*)$.
Es gilt $F(f) = \{(x,\omega) \in X \times Y^I \mid \omega(0) = *, \ \omega(1) = f(x)\}$.

Wir haben dann eine Abbildung $F(f) \xrightarrow{j} X$ gegeben durch $j(x,\omega) = x$. Als Basispunkt von $F(f)$ nehmen wir $(*, c_*)$.

2.27 Lemma: Die Folge $F(f) \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$ ist "exakt" im Sinne, dass für einen beliebigen punktierten Raum $(Z,*)$ die Folge von Mengen $[Z, F(f)]_* \xrightarrow{j_*} [Z, X]_* \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$ exakt ist.

Beweis: (a) $f_* \circ j_*(h) = 0$: Sei $h: Z \to F(f) \subset X \times Y^I$,
$z \longmapsto (h_1(x), h_2(x))$

Dann ist $\overline{h}_2 : Z \times I \to Y$ eine punktierte Homotopie zwischen die konstante Abbildung $Z \xrightarrow{c_*} Y$, $z \mapsto *$ und $fjh = fh_1$.

(b) $f_*^{-1}(0) \subset \text{Bild } j_*$: Sei $h: Z \to X$ und sei $H: Z \times I \to Y$ ein punktierte Homotopie zwischen c_* und fh. Sei $\overline{H}: Z \to Y^I$ die adj. Ab. Sei $g: Z \to X \times Y^I$, $z \mapsto (h(z), \overline{H}(z))$. Dann gilt $g: Z \to F(f)$ und $jg = h$. #

2.28 Bemerkung: Was passiert, wenn $f: X \to Y$ bereits eine Faserung ist? Ist f eine (punktierte) Faserung, so ist die offensichtliche Inklusion $k: F = f^{-1}(*) \to F(f)$ ein (punktierte) Homotopie-Äquivalenz:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, hook] \arrow[d, "k"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "s"] \arrow[dr, phantom, "G"] & Y \arrow[d, equal] \\ F(f) \arrow[r, hook] & E(f) \arrow[r, "p"] & Y \end{tikzcd}$$

Dann ist ein Homotopie-Inverse $l: F(f) \to F$ von k durch $l = H_1$ gegeben, wobei H das Hochhebungsproblem recht löst, mit $h(x, \omega, t) = \omega(1-t)$.

$$\begin{tikzcd} F(f) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "i_0"] & X \arrow[d, "f"] \\ F(f) \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, dashed, "H"] & Y \end{tikzcd}$$

Die Abbildung $F \times I \to F$, $(x, t) \mapsto H(k(x), t)$ ist ein Homotopie $id_F \simeq lk$. Die Abbildung $F(f) \times I \to F(f)$, $(x, \omega, t) \mapsto (H(x, \omega, t), G(x, \omega, t))$ mit $G: F(f) \times I \to Y^I$, $(x, \omega, t) \mapsto [s \mapsto \omega(t(1-s))]$ ist ein Homotopie $1_{F(f)} \simeq kl$.

<u>2.29 Bemerkung</u>: Wir können auch die Homotopie-Faser konstruktion iterieren: Betrachte ein punkt. Ab. $f: X \to Y$ und

$$F(j_1) \xrightarrow{j_2} F(f) \xrightarrow{j_1} X \xrightarrow{f} Y \qquad (j_1 = j \text{ aus } 2.27).$$

Hier gilt nun $F(j) = \{((x,\omega),v) \in F(f) \times X^I \mid v(0) = *,\ v(1) = x\}$.
Wir haben ein stetige Injektion $\Omega Y \xrightarrow{\phi} F(j_1)$ gegeben von $\phi(\omega) = ((*,\omega), c_*)$. Es ist nicht zu schwierig zu beweisen: ϕ ist eine Punktierte Homotopie-Äquivalenz; wir definieren nun $\partial = j_2 \circ \phi : \Omega Y \to F(f)$, und erhalten die exakte Folge (im Sinne von 2.27): $\Omega Y \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{j_1} X \xrightarrow{f} Y$.
Wir gehen noch einen Schritt weiter: wir haben ein Digramm von punktierte Abbildungen

$$\begin{tikzcd} \Omega X \arrow[r, "\Omega f"] \arrow[d, "\psi i"'] & \Omega Y \arrow[d, "\phi"] \\ F(j_2) \arrow[r, "j_3"] & F(j_1) \end{tikzcd}$$

Hier ist $\psi: \Omega X \to F(j_2)$ ϕ definiert, und
$i: \Omega X \to \Omega X$ ist das Homotopie-Inverse $u \mapsto u^{-1}$.
Insbesondere ist ψi ein punktierte-Homotopie Äquivalenz (bereits für ϕ bewiesen), und das Diagramm ist punktiert-Homotopie kommutativ. Daraus folgt, dass

$$\Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y \quad \text{exakt ist.}$$

Es ist offensichtlich, dass falls $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ exakt ist, dann auch $\Omega Z \xrightarrow{\Omega g} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y$. Damit wäre bewiesen (ergänze als Aufgabe 6.3):

<u>2.30 Satz</u>: Sei $f: X \to Y$ eine punktierte Abbildung, dann ist die Folge $\cdots \to \Omega Y \to \Omega F(f) \to \Omega X \to \Omega Y \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$ exakt in HoTop_*: sie wird unter $[Z, -]_*$ auf einen exakte Folge (in punkt. Mengen, Gruppen und Ab. Gruppen für höhere Termen) abgebildet, für alle $Z \in \mathrm{Top}_*$.
Verwendet man $[S^0, -]_*$ auf dieser Folge, so erhält man die LEF in Homotopie der Faserung $F(f) \to E(f) \to Y$.