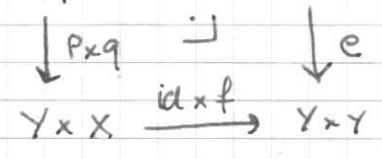
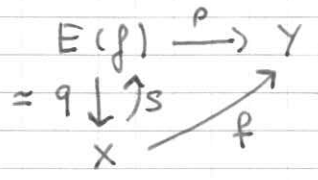


2.24 Lemma + Def : Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine stetige Abbildung.

Betrachte folgendes Pull-Back-Diagramm  $E(f) \rightarrow P(Y, Y, Y) = Y^I$   
womit  $E(f), p, q$  definiert werden.



Betrachte das weitere Diagramm:



Hier sind  $p$  und  $q$  Faserungen, und  $q$  ist eine Deformationsrektion, mit Inverse

$s: X \rightarrow E(f), x \mapsto (x, c_{f(x)})$  mit  $c_{f(x)} \in Y^I$  konstant in  $f(x)$ . Es gilt  $f = p \circ s$ .

Beweis:  $p \times q$  ist eine Faserung ist, weil  $e$  eine ist und  $\lrcorner$ , verwende hier Aufgabe 5.1.(d). Dann sind auch  $p$  und  $q$  Faserungen (Verküpfte mit Proj.).

Hier  $E(f) \cong \{ (x, \omega) \in X \times Y^I \mid f(x) = \omega(1) \}$  und  $E(f) \xrightarrow{p} Y, (x, \omega) \mapsto \omega(0), E(f) \xrightarrow{q} X, (x, \omega) \mapsto x$ .

Dann gilt  $f = p \circ s$  per Definition. Wir haben  $q \circ s = id_X$  und  $id_{E(f)} \stackrel{H}{=} s \circ q$ , mit  $H: E(f) \times I \rightarrow E(f)$ ,

$H((x, \omega), t) = (x, \omega_t)$ , mit  $\omega_t: I \rightarrow Y, s \mapsto \omega((1-t) \cdot s)$ . #

2.25 Beispiel : Sei  $(Y, *)$  ein punktierte Raum, und

Sei  $f$  die Inklusion des Basispunkt. Dann notieren wir

$EY := E(f) = \{ \omega \in Y^I \mid \omega(0) = * \}$ . Wir erhalten

also eine Faser-sequenz  $\Omega Y \rightarrow EY \xrightarrow{p} Y$ .

Da  $EY \cong *$  bekommen wir aus der LEF dieser Faser-

sequenz:  $\partial: \pi_n(Y, *) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(\Omega Y, *), \forall n \geq 1$ .

2.26 Definition : Sei  $f: (X, *) \rightarrow (Y, *)$  eine punktierte Abb.

Ist  $(*, c_*)$  als Basispunkt von  $E(f)$  gewöhlt, so sind auch

$p, q, s, H_t$  punktiert. Die Faser  $F(f)$  von  $E(f) \xrightarrow{p} Y$

heißt die Homotopiefaser der punktl. Abb  $f: (X \rightarrow *) \rightarrow (Y, *)$ .

Es gilt  $F(f) = \{ (x, \omega) \in X \times Y^I \mid \omega(0) = *, \omega(1) = f(x) \}$ .

Wir haben dann eine Abbildung  $F(f) \xrightarrow{j} X$  gegeben durch  $j(x, \omega) = x$ . Als Basispunkt von  $F(f)$  nehmen wir  $(*, c_*)$ .

2.27 Lemma: Die Folge  $F(f) \xrightarrow{j} X \xrightarrow{f} Y$  ist "exakt" im Sinne, dass für einen beliebigen punktierten Raum  $(Z, *)$  die Folge von Mengen  $[Z, F(f)] \xrightarrow{j_*} [Z, X] \xrightarrow{f_*} [Z, Y]$  exakt ist.

Beweis: (a)  $f_* \circ j_* (h) = 0$ : Sei  $h: Z \rightarrow F(f) \subset X \times Y^I$   
 $z \mapsto (h_1(z), h_2(z))$

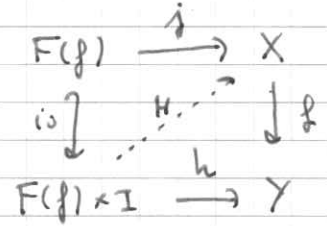
Dann ist  $\bar{h}_2: Z \times I \rightarrow Y$  eine punktierte Konstople zwischen der konstanten Abbildung  $Z \xrightarrow{c_*} Y, z \mapsto *$  und  $f \circ j \circ h = f \circ h_1$ .

(b)  $f_*^{-1}(0) \subset \text{Bild } j_*$ : Sei  $h: Z \rightarrow X$  und sei  $H: Z \times I \rightarrow Y$  ein punktierte Konstople zwischen  $c_*$  und  $f \circ h$ . Sei  $\bar{H}: Z \rightarrow Y^I$  die adj. Ab. Sei  $g: Z \rightarrow X \times Y^I, z \mapsto (h(z), \bar{H}(z))$ . Dann gilt  $g: Z \rightarrow F(f)$  und  $jg = h$ . #

2.28 Bemerkung: Was passiert, wenn  $f: X \rightarrow Y$  bereits eine Faserung ist? Ist  $f$  eine (punktierte) Faserung, so ist die offensichtliche Inklusion  $k: F = f^{-1}(c_*) \rightarrow F(f)$  ein (punktierte) Konstople.

Argumentation:  $F \hookrightarrow X \xrightarrow{f} Y$  Dann ist ein Konstople - Inverse  
 $\downarrow k \quad \downarrow s \quad \downarrow G \quad \downarrow$   
 $F(f) \hookrightarrow E(f) \xrightarrow{p} Y$   $l: F(f) \rightarrow F$  von  $k$  durch

$l = H_*$  gegeben, wobei  $H$  das Kochenbroschensproblem rechts löst, mit  $h(x, \omega, t) = \omega(1-t)$ .



Die Abbildung  $F \times I \rightarrow F, (x, t) \mapsto H(k(x), t)$  ist ein Konstople  $\text{id}_F \simeq lk$ . Die Abbildung  $F(f) \times I \rightarrow F(f), (x, \omega, t) \mapsto (H(x, \omega, t), G(x, \omega, t))$  mit  $G: F(f) \times I \rightarrow Y^I, (x, \omega, t) \mapsto [s \mapsto \omega(t(1-s))]$  ist ein Konstople  $1_{F(f)} \simeq kl$ .

2.29 Bemerkung: Wir können auch die Homotopie-Faser  
 Konstruktion iterieren: Betrachte ein punkt. Ab.  $f: X \rightarrow Y$  und  
 $F(j_1) \xrightarrow{j_2} F(f) \xrightarrow{j_1} X \xrightarrow{f} Y$  ( $j_1 = j$  aus 2.27).

Hier gilt nun  $F(j) = \{ (x, \omega, \nu) \in F(f) \times X^I \mid \nu(0) = *, \nu(1) = x \}$ .

Wir haben eine stetige Triktion  $\Omega Y \xrightarrow{\phi} F(j_1)$  gegeben von  
 $\phi(\omega) = ((*, \omega), C_*)$ . Es ist nicht zu schwierig zu beweisen:

$\phi$  ist eine punktweise Homotopie-Äquivalenz; wir definieren

nun  $\partial = j_2 \circ \phi: \Omega Y \rightarrow F(f)$ , und erhalten die exakte  
 Folge (im Sinne von 2.27):  $\Omega Y \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{j_1} X \xrightarrow{f} Y$ .

Wir gehen noch einen Schritt weiter: wir haben ein Diagramm  
 von punktweise Abbildungen  $\Omega X \xrightarrow{\partial} \Omega Y$

Nun ist  $\psi: \Omega X \rightarrow F(j_2)$   $\psi_i \downarrow$   $\downarrow \phi$

$\phi$  definiert, und  $F(j_2) \xrightarrow{j_1} F(j_1)$

$i: \Omega X \rightarrow \Omega X$  ist das Homotopie-Inverse  $u \mapsto u^{-1}$ .

Insbesondere ist  $\psi_i$  eine punktweise Homotopie-Äquivalenz (bereits  
 für  $\phi$  bewiesen), und das Diagramm ist punktweise Homotopie  
 kommutativ. Daraus folgt, dass

$$\Omega X \xrightarrow{\partial} \Omega Y \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{j_1} X \xrightarrow{f} Y \quad \text{exakt ist.}$$

Es ist offensichtlich, dass falls  $Z \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$  exakt ist, dann  
 auch  $\Omega Z \xrightarrow{\Omega g} \Omega X \xrightarrow{\Omega f} \Omega Y$ . Damit wäre bewiesen (ergänze  
 als Aufgabe 6.3:

2.30 Satz: Sei  $f: X \rightarrow Y$  eine punktweise Abbildung; dann

ist die Folge  $\dots \rightarrow \Omega Y \rightarrow \Omega F(f) \rightarrow \Omega X \rightarrow \Omega Y \xrightarrow{\partial} F(f) \xrightarrow{j_1} X \xrightarrow{f} Y$

exakt in  $\text{HoTop}_*$ : sie wird unter  $[Z, -]_*$  auf eine  
 exakte Folge (in punkt. Mengen, Gruppen und Ab. Gruppen für höhere  
 Termen) abgebildet, für alle  $Z \in \text{Top}_*$ .

Verwendet man  $[S^0, -]_*$  auf diese Folge, so erhält man  
 die LEF in Homotopie der Faserung  $F(f) \rightarrow E(f) \rightarrow Y$ .