I HOMOTOPIE GRUPPEN

In diesen Kapitel führen wir die höheren Homotopiegruppen $\pi_n(X, x_0) = [(S^n, *), (X, x_0)]$ ein, $n \geq 2$. Es sind hochdimensionale Veralgemeinerungen der Fundamentalgruppe und bilden eine Familie von Homotopie-Invariante, die zum Beispiel viel stärker als (Ko-) Homologie ist.
Als Beispiel hatten wir schon die Überlagerung $p: S^3 \to S^3/I'$ (Poincaré-sphere), mit $H_*(p)$ und $H^*(p)$ Isomorphismen, aber $\pi_1(p)$ kein Iso. Wir werden zum Beispiel beweisen:

Theorem: Seien X, Y CW-Komplexe. Dann ist $f: X \to Y$ eine Homotopieäquivalenz genau dann, wenn $f_*: \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x))$ ein Isomorphismus für alle $x \in X$ und alle $n \geq 0$ ist.

Dagegen sind Homotopiegruppen VIEL schwieriger zu berechnen, als Homologie: Ausschneidung gilt nicht allgemein.

1.1 Definition: Sei $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$, und für $n \geq 0$ sei

$$I^n = \begin{cases} \{0\} & n = 0 \\ I \times \dots \times I & (n \text{ Mal}) \end{cases} \qquad \partial I^n = \begin{cases} \emptyset & n = 0, \\ (t_1, \dots, t_n) \in I^n, & \text{mind. ein } t_i \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Sei $(X, *)$ ein punktierter Raum. Wir definieren

$$\pi_n(X, *) = [(I^n, \partial I^n), (X, *)]$$

als die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen $(I^n, \partial I^n) \to (X, *)$ (bemerke: ein Homotopie $H: I^n \times I \to X$ erfüllt hier: $H_t = H(-, t): (I^n, \partial I^n) \to (X, *)$ ist ein Ab. von Paaren).
Für $n \geq 1$ und $1 \leq i \leq n$, definiere ein Produkt $+_i$ auf $\pi_n(X, *)$, induziert durch $[f] +_i [g] = [f +_i g]$, mit

$$(f +_i g)(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i, t_{i+1}, \dots, t_n) & | \ 0 \leq t_i \leq 1/2, \\ g(t_1, \dots, t_{i-1}, 2t_i - 1, t_{i+1}, \dots, t_n) & | \ 1/2 \leq t_i \leq 1. \end{cases}$$

1.2 Lemma: Für $n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$ definiert $+_i$ eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X,*)$, mit $[c]$ als neutrales Element, $c: I^n \to X$, $\underline{t} \mapsto *$ $\forall\, \underline{t} \in I^n$, und mit $-_i[f] = [-_i f]$, wobei $-_i f(t_1,\dots,t_n) = f(t_1,\dots,1-t_i,\dots t_n)$.

Beweis: absolut analog zum Beweis, dass $+_1$ auf $\pi_1(X,*)$ eine Gruppenstruktur definiert: siehe $(\mathrm{I}.3.7)^*$; verwende die gleiche Argumente mit t_i für $+_i$, die andere Einträge t_j bleiben unverändert.

Bemerke auch: $f +_i g$ ist stetig dank des Klebelemmas. #

1.3 Lemma: Für $n \geq 2$, $1 \leq i,j \leq n$ gilt $+_i = +_j$ auf $\pi_n(X,*)$, und $(\pi_1(X,*), +_1)$ ist eine Abelsche Gruppe.

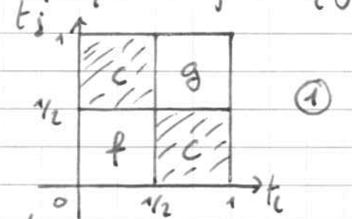
Beweis: $f +_i g \simeq (f +_j c) +_i (c +_j g) \overset{①}{=} (f +_i c) +_j (c +_i g)$

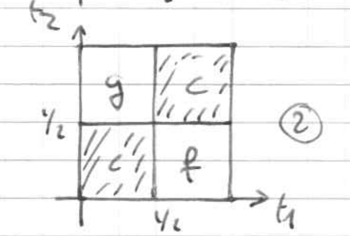
$\simeq f +_j g$; also $[f] +_i [g] = [f] +_j [g]$.

Außerdem:

$f +_1 g \simeq f +_2 g \simeq (c +_1 f) +_2 (g +_1 c) \overset{②}{=}$

$= (c +_2 g) +_1 (f +_2 c) \simeq g +_1 f$. #





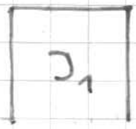
1.4 Definition: Sei $n \geq 1$; $\pi_n(X,*)$, mit $+ = +_i$ für $1 \leq i \leq n$, heißt die <u>n-te Homotopiegruppe</u> des punktierten Raum $(X,*)$; Hier ist $\pi_1(X,*)$ die (früher definierte) Fundamentalgruppe von $(X,*)$; $\pi_0(X,*)$ ist im allgemein nur eine Menge (die Menge der Wegzusammenhangskomponenten von X).

Unser erstes Ziel ist das Exaktheitsaxiom; dafür müssen wir die Definition für Paare erweitern.

(*) Referenzen: I = online Skript zur Vorlesung Topologie, WS 2010
II = o. S. zur Vorlesung Algebr. Topologie, SS 2011

1.5 Definition: Sei $n \geq 1$. Wir definieren $J^{n-1} \subset \partial I^n$ durch

$$J^{n-1} = \begin{cases} \{1\} & \text{falls } n = 1, \\ (\partial I^{n-1} \times I) \cup (I^{n-1} \times \{1\}) & n \geq 2. \end{cases}$$



Sei $(X, A, *)$ ein punktiertes Paar (also $* \in A \subset X$).

Wir definieren $\pi_n(X, A, *) := [(I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, *)]$ als die Menge der Homotopie Klassen von Abbildungen von Tripeln

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, *)$$

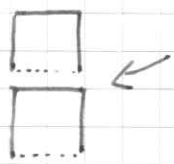
(Wie oben: wir verlangen von einer Homotopie $H : I^n \times I \to X$, dass $H_t : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$ eine Ab. von Tripeln ist, also $H_t(\partial I^n) \subset A$ und $H_t(J^{n-1}) \subset \{*\}$, $\forall t$).

Für $n \geq 2$ und $1 \leq i \leq n-1$ definieren wir $+_i$ auf $\pi_n(X, A, *)$ durch $[f] +_i [g] = [f +_i g]$, mit $f +_i g$ wie in 1.1 definiert.

1.6 Lemma: (a) Für $n \geq 2$ und $1 \leq i, j \leq n-1$ gilt: $+_i = +_j$ auf $\pi_n(X, A, *)$, und $\pi_n(X, A, *)$ ist mit diesem Produkt eine Gruppe.

(b) Falls $n \geq 3$ ist $\pi_n(X, A, *)$ Abelsch.

Beweis: genau wie 1.2 und 1.3 im absoluten Fall.
Bemerke, dass diesmal $+_n$ in $\pi_n(X, A, *)$ nicht definiert ist (wenn $A \neq \{*\}$):
Zum Beispiel für $n = 2$: $+_2$:



lässt sich hier nicht kleben

$\#$

1.7 Definition: Sei $n \geq 2$; $\pi_n(X, A, *)$, mit $+ := +_i$ für $1 \leq i \leq n-1$, heißt die *n-te relative Homotopiegruppe* des punktierten Paares $(X, A, *)$.
$\pi_1(X, A, *)$ ist im allgemeinen nur eine Menge.

1.8 Bemerkung: Falls $A = \{*\}$ gilt $\pi_n(X, A, *) = \pi_n(X, *)$, als Gruppen wenn $n \geq 2$.

Die Funktorialität dieser Konstruktionen ist klar:

Ist $f : (X, A, *) \to (Y, B, *)$ eine Abbildung von punktierten Paaren, so sei $f_* : \pi_n(X, A, *) \to \pi_n(Y, B, *)$ durch $f_*[g] = [f \circ g]$ definiert.

<u>1.9 Satz</u>: (a) $\pi_n : Top_* \to \begin{cases} \text{Sets} & , n=0 \\ \text{Groups} & n=1 \\ \text{Ab. Groups} & n \geq 2 \end{cases}$ ist Homotopie-Invarianter Funktor:

Falls $f \simeq g : (X,*) \to (Y,*)$, so gilt $f_* = g_* : \pi_n(X,*) \to \pi_n(Y,*)$.

(b) $\pi_n : Top^2_* \to \begin{cases} \text{Sets}, & n=1 \\ \text{Groups}, & n=2 \\ \text{Ab. Gps} & n \geq 3 \end{cases}$ ist ein Homotopie-Invarianter Funktor.

<u>Beweis</u>: Klar! #

Es existieren mögliche alternative Definitionen, die wir kurz besprechen.
Zur Erinnerung: Eigenschaften der <u>Kompakt-offenen Topologie</u> (KO):
Sind X, Y top. Räumen, so notieren wir $C(X,Y)$ oder Y^X die Menge der <u>stetigen</u> Abbildungen $X \to Y$ (ähnliche Notation für Paare, ...)
Die KO-Topologie auf $C(X,Y)$ hat als Subbasis die Menge
$\{ O(K,U) \mid K \subset X \text{ kompakt}, U \subset Y \text{ offen} \}$ mit
$O(K,U) = \{ f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset U \}$.

<u>1.10 Satz</u>: Seien X, Y, Z Räume, und seien die Abbildungsräumen mit der KO Topologie versehen.

(a) Ist Y Hausdorff, so ist $C(X,Y)$ auch Hausdorff.

(b) Die kan. Abbildung $C(X, Y \times Z) \to C(X,Y) \times C(X,Z)$ ist ein Homöomorphismus

(c) Ist $g : Y \to Z$ stetig, so sind $C(X,Y) \to C(X,Z)$, $f \mapsto g \circ f$ und $C(Z,X) \to C(Y,X)$, $f \mapsto f \circ g$ stetig.

(d) Ist $Y \hookrightarrow Z$ die Inklusion eines Teilraumes, so ist $C(X,Y) \to C(X,Z)$ ein Einbettung (i.e., injektiv und $C(X,Y)$ hat die Teilraumtopologie).

(e) Ist X lokal kompakt, so ist die Evaluierung

$$C(X,Y) \times X \xrightarrow{e} Y, \quad (f,x) \mapsto f(x) \quad \text{stetig.}$$

(f) Sind X und Y Hausdorff und Y lokalkompakt, so gilt das "Exponential Gesetz": die Abbildung

$$C(X \times Y, Z) \to C(X, C(Y,Z)), \quad f \mapsto \bar{f}, \quad \bar{f}(x)(y) = f(x,y)$$

ist ein Homöomorphismus [auch $Z^{X \times Y} \cong (Z^Y)^X$ notiert].

Beweise: Topologie Bücher, z. B. Fuks & Rokhlin, Beginner's course in Topology, S. 46 - 49. #

Wir werden den Satz für X, Y = Würfeln I^k verwenden, so dass (e) und (f) hier gelten.

1.11 Notation: Sind (X,A) und (Y,B) Paare, so notieren wir $C((X,A),(Y,B)) = \{ f \in C(X,Y) \mid f(A) \subset B \} \subset C(X,Y)$, versehen mit der Teilraum-Topologie der KO-Topologie auf $C(X,Y)$. Ebenso für Trippeln, etc...

1.12 Definition: Sei $(X,A,*)$ ein punktierter Paar; wir definieren den Raum der Wege (Path space)

$$P(X,A,*) = \{ \omega : I \to X \mid \omega(0) \in A, \ \omega(1) = * \}$$
$$= C((I,\{0\},1),(X,A,*)) \subset C(I,X).$$

Falls $A = *$ wird es $\Omega(X,*)$ (= Schleifenraum) notiert. Der konst. Weg c ist der Basispunkt von $P(X,A,*)$.

1.13 Lemma: Sei X Hausdorff und lokal kompakt. Die Abbildung $C(X,Y) \to [X,Y]$, $f \mapsto [f]$ faktorisiert durch eine Bijektion $\pi_0(C(X,Y)) \xrightarrow{\cong} [X,Y]$.

Beweis: Dank 1.10 (f) sind die Relationen "$f \simeq g$" und "f und g liegen in der selbe Wegzusammenhangskomponente" gleich. #