Nun schildern wir den Zusammenhang zwischen Kohomologie und Eilenberg MacLane Räume.

<u>3.45 Definition</u>: Sei CW_* die Kategorie der punkt. CW-Komplexe und stetige Abbildungen (oder zelluläre). Eine <u>reduzierte Kohomologie Theorie</u> auf CW_* ist ein Kofunktor $\tilde{E}^*: CW_* \to \mathrm{Gr}\,\mathrm{Ab}$ (die Kat der $\mathbb{Z}$-graduierten Abelschen Gruppen), zusammen mit einem natürlichen Isomorphismus $\sigma: \tilde{E}^* \to \tilde{E}^* \circ \Sigma$, so dass

(1) $\tilde{E}^*$ ist <u>Homotopieinvariant</u>

(2) $\tilde{E}^*$ ist <u>exakt</u>: für $i: A \hookrightarrow X$ eine Inklusion und $q: X \to X/A$ die Quotienten Abbildung ist

$$\tilde{E}^*(X/A) \xrightarrow{q^\vee} \tilde{E}^*(X) \to \tilde{E}^*(A) \quad \text{exakt}$$

(3) $\tilde{E}^*$ ist <u>additiv</u> (Milnor's Wedge Axiom): die natürliche Ab.

$$\tilde{E}^*\Big(\bigvee_\alpha X_\alpha\Big) \longrightarrow \prod_\alpha \tilde{E}^*(X_\alpha)$$

ist ein Isomorphismus $\forall \{X_\alpha\}_\alpha \subset CW$.

<u>3.46 Bemerkungen</u>: (a) Dank Aufgabe 8.4 kann man $\tilde{E}^*$ auf der auf der Kategorie der punktierten Räumen Top_* bis auf nat. Iso. definieren, und $\tilde{E}^*$ erfüllt dann zusätzlich:

(4) $\tilde{E}^*$ ist schwach Homotopie-Invariant.

(b) Die lange exakte Folge erhält man für eine CW-Inklusion $A \hookrightarrow X$ dank

$$\begin{tikzcd} & X \cup CA \arrow[d, "\simeq"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r] & X/A \arrow[r, dashed] & \Sigma X \end{tikzcd}$$

zusammen mit σ.

(c) Man kann zeigen, dass $\tilde{E}^*: Top_* \to \mathrm{Gr}\,\mathrm{Ab}$ der (1), ..., (4) erfüllt bis auf natürlicher Isomorphismus durch seine „Einschränkung" auf CW_*^f bestimmt ist (volle Unterkategorie der endlichen CW-Komplexe).

Nun sehen wir, wie wir eine reduzierte Kohomologie-Theorie von einem Ω-Spektrum konstruieren können.

3.47 Definition: Ein Ω-spectrum ist eine Folge von punktierten Räumen $\{K_n\}_{n\geq 0}$ zusammen mit schwachen Homotopieäquivalenzen $e_n : K_n \to \Omega K_{n+1}$, für alle $n \geq 0$.
(manchmall wird verlangen: e_n ist eine Homotopieäquivalenz, oder sogar ein Homöomorphismus (May)).

3.48 Satz: Ein Ω-spektrum $\{K_n\}$ definiert eine reduzierte Kohomologietheorie $\tilde{E}^* : CW_* \to GrAb$ durch

$$\tilde{E}^n(X) = [X, K_n]_*$$

$$\sigma : [X, K_n]_* \xrightarrow[\cong]{e_{n*}} [X, \Omega K_{n+1}]_* \xrightarrow{\cong} [\Sigma X, K_{n+1}]_*$$

Beweis: Die Gruppen Struktur auf $[X, K_n]$ ist durch die natürliche abelsche Gruppen Struktur auf $[X, \Omega K_{n+2}]$ via $(e_{n+1} \circ e_n)_*$ induziert. Aus dieser Definition folgt dann, dass σ ein nat. Isom. von Gruppen ist. Es ist klar, dass der Homotopie-Axiom gilt, genauso der Wedge-Axiom. Die Exaktheit folgt aus 2.31 (und $C(A \hookrightarrow X) \simeq X/A$). #

3.49 Definition: eine natürliche Transformation von red. Kohom. Theorien $\tilde{E}^* \xrightarrow{\tau^*} \tilde{F}^*$ ist eine Natürliche Transformation von Kofunktoren $\tilde{E}^* \overset{\tau^*}{\Rightarrow} \tilde{F}^*$, die mit σ verträglich ist:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}^n(X) & \xrightarrow{\tau^n_X} & \tilde{F}^n(X) \\ \downarrow \sigma & & \downarrow \sigma \\ \tilde{E}^{n+1}(\Sigma X) & \xrightarrow{\tau^{n+1}_{\Sigma X}} & \tilde{F}^{n+1}(\Sigma X) \end{array}$$

kommutiert $\forall n$, $\forall X \in CW_*$.

Sei nun A ein Abelsche Gruppe; $\{K(A,n)\}_{n\geq 0}$ bildet, zusammen mit $K(A,n) \xrightarrow[\simeq]{\varepsilon_n} \Omega K(A,n+1)$, einen Ω-Spektrum.
Wir möchten nun zeigen: es existiert ein natürlicher Isomorphismus $\tau^*: [-, K(A,*)]_* \to H^*(-;A)$ von Kohomologietheorien. Wir definieren erstmal τ^*:

3.50 Definition + Lemma: Sei $K_n = K(A,n)$, $n \geq 0$ und sei $u_n \in H^n(K_n, A)$ die Klasse die via

$$H^n(K_n, A) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}(H_n(K_n,\mathbb{Z}), A) \xrightarrow[\cong]{h^*} \mathrm{Hom}(\pi_n K_n, A) \xrightarrow{\alpha^*}$$

$\mathrm{Hom}(A,A)$ auf id_A abgebildet wird [$n=0$: 2 letzte Hom sind $\mathrm{Set}_*(\ )$]

Dann definiert $\tau^n_X : [X, K(A,n)]_+ \to H^n(X,A)$, $\tau^n_X[f] = f^*(u_n)$, $n \geq 0$ ($\tau^n_X = 0$ für $n<0$) eine natürliche Transformation von Kohomologie Theorien.

Beweisskizze: Es ist klar, dass τ^n eine natürliche Transformation von Funktoren ist. Es sind noch zu zeigen:

(a) τ ist verträglich mit σ: (Sei $K_n = K(A,n)$)

$$\begin{tikzcd}
 & {[X, \Omega K^{n+1}]} \arrow[drr, "ad"] & & \\
{[X, K_n]_+} \arrow[ur, "e_n \circ -"] \arrow[r, "\Sigma"] \arrow[d, "\tau^n"] & {[\Sigma X, \Sigma K_n]} \arrow[rr, "\tilde{e}_n \circ -"] & & {[\Sigma X, K_{n+1}]} \arrow[d, "\tau^{n+1}"] \\
\tilde{H}^n(X,A) \arrow[rrr, "\sigma"] & & & \tilde{H}^{n+1}(\Sigma X, A)
\end{tikzcd}$$

Hier ist $\tilde{e}_n : \Sigma K_n \to K_{n+1}$ adjungiert zu $e_n : K_n \xrightarrow{\simeq} \Omega K_{n+1}$.

Zu zeigen: das Diagram kommutiert. Es genügt, es für $X = K_n$ und $id_{K_n} \in [K_n, K_n]$ zu prüfen; also $\sigma_\pm(u_n) = \tilde{e}_n^*(u_{n+1})$. Hier prüft man das direkt mit den Definitionen (Vorzeichen!?).

(b) τ^n_X ist ein Homomorphismus von Gruppen: das folgt aus $\tau^n_X = \sigma^{-1} \circ \tau^{n+1}_{\Sigma X} \circ \sigma$, wobei σ, σ^{-1} und $\tau^{n+1}_{\Sigma X}$ Gruppen Homomorphismen sind. Das hier $\tau^{n+1}_{\Sigma X}$ ein Homomorphismus ist folgt aus der Tatsache, dass die Summe von $\tilde{H}^{n+1}(\Sigma X, A)$ auch von die Ko-H-Gruppe Struktur von ΣX induziert ist:

$$\begin{tikzcd}
H^{n+1}(\Sigma X, A) \oplus H^{n+1}(\Sigma X, A) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "+"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & H^{n+1}(\Sigma X \vee \Sigma X, A) \arrow[d, "\nabla^*"] \\
H^{n+1}(\Sigma X, A) \arrow[r, "="] & H^{n+1}(\Sigma X, A)
\end{tikzcd}$$

und das τ^{n+1} natürlich ist. #

3.51 Definition: Sei $\tilde{E}^*$ eine reduzierte Kohomologie Theorie auf CW_*. Die graduierte Gruppe $\tilde{E}^*(S^0)$ (mit $1 \in S^0$ als Basispunkt) heißt <u>die Koeffizientengruppe</u> von $\tilde{E}^*$.

3.52 Satz: Seien $\tilde{E}^*, \tilde{F}^* : CW_* \to GrAb$ zwei reduzierte Koh.-Theorien, und sei $\tau^* : \tilde{E}^* \to \tilde{F}^*$ eine natürliche Transformation von reduzierten Koh.-Theorien. Induziert $\tau^* : \tilde{E}^*(S^0) \to \tilde{F}^*(S^0)$ ein Isomorphismus von Koeffizientengruppen, so ist τ^* ein natürlicher Isomorphismus. Die Umkehrung gilt natürlich auch.

<u>Beweisskizze</u>: mit Hilfe des Einhängungsisomorphismus sehen wir, dass $\tau^*_{S^n} : \tilde{E}^*(S^n) \to \tilde{F}^*(S^n)$ ein Isomorphismus $\forall\, n \geq 0$ ist

$$\begin{tikzcd} \tilde{E}^*(S^n) \arrow[r] & \tilde{F}^*(S^n) \\ \tilde{E}^{*-n}(S^0) \arrow[u, "\cong", "\sigma^n"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & \tilde{F}^{*-n}(S^0) \arrow[u, "\cong", "\sigma^n"'] \end{tikzcd}$$

Aus dem Wedge Axiom folgt, dass $\tau^*_{\bigvee_\alpha S^n}$ ebenso ein Iso ist, für alle $\bigvee_\alpha S^n$.

Durch Induktion auf k folgt dann, dass $\tau^*_{X^{(k)}}$ auch ein Iso ist, für jeden CW-Komplex X: benutze $X^{(0)} \cong \bigvee_\alpha S^0$ und dann Induktion mit $\bigvee S^{k-1} \to X^{(k-1)} \to X^{(k)}$ und 5-Lemma.

Für unendliche dimensionale CW-Komplexe benutzt man die Existenz einer Kofaserfolge

$$\Sigma \bigvee_k X^{(k)} \to \Sigma \bigvee_\ell X^{(\ell)} \to \Sigma X,$$

(vergleiche mit der Teleskop-Konstruktion in Switzer 7.53). #

3.53 Theorem: $\tau^* : [-, K(A,*)]_* \to H^*(-,A) : CW_* \to GrAb$ aus 3.50 ist eine natürlichen Isomorphismus von Kohomologie-Theorien.

<u>Beweis</u>: $\tau^*_{S^0}$ ist offensichtlich ein Isomorphismus. Bemerke, dass hier für beide Theorien gilt: $X^{(n+1)} \to X$ induziert einen Iso $\tilde{E}^n(X) \to \tilde{E}^n(X^{(n+1)})$. Es folgt, dass wir

hier die letzte Kofaserfolge in 3.51 gar nicht brauchen. #

<u>3.54 Bemerkungen</u>: (a) Sei $\tilde{E}^*$ eine Kohomologie-Theorie mit $\tilde{E}^n(S^0) = 0$ für $n \neq 0$. Dann heißt $\tilde{E}^*$ eine ordinäre Kohomologie Theorie. Es ist nicht schwierig zu zeigen: sind $\tilde{E}^*$ und $\tilde{F}^*$ und ist $\tilde{E}^0(S^0) \xrightarrow{\tau^0_{S^0}} \tilde{F}^0(S^0)$ ein Homomorphismus, so kann man $\tau^0_{S^0}$ zu einer natürlichen Transformation $\tau^*: \tilde{E}^* \to \tilde{F}^*$ erweitern; falls $\tau^0_{S^0}$ ein Isomorphismus ist, so sind $\tilde{E}^*$ und $\tilde{F}^*$ natürlich Isomorph. (*)

(b) $\tilde{E}^*: CW_* \to Gr\,Ab$ bestimmt auch eine "unreduzierte Kohomologie Theorie" $E^*: CW^2 \to Gr\,Ab$, definiert durch

$E^*(X, A) := \tilde{E}^*(C(A \hookrightarrow X))$ (hier $C(\emptyset \hookrightarrow X) = X \amalg \{*\}$).

Die Axiome hierfür sind Analog: σ wird durch einen Homom. $E^*(A, \emptyset) \to E^{*+1}(X, A)$ ersetzt; Exaktheit wird durch der lange Folge und Ausschneidung ersetzt, Additivität ist für die disjunkte Vereinigung formuliert.

<u>Referenzen</u>: • Switzer, Kapitel 7. • Lück, § 3.5, Kap. 4.

(*) Wir wissen: für <u>ordinäre</u> Theorien gelten:

(a) $\tilde{E}^n(X) = 0$ falls $n > \dim X$

(b) $X^{(n+1)} \hookrightarrow X$ Induziert ein Iso $\tilde{E}^n(X) \xrightarrow{\cong} \tilde{E}^n(X^{(n+1)})$.

Es genügt τ_X für endlich Dimensionale CW's X zu definieren. Per Induktion auf dem Skelet: $X^{(0)}$ ok dank $\tau^0_{S^0}$ und V-Ax.

Ist $\tau_{X^{(k-1)}}$ definiert, so müssen wir das Erweiterungsproblem

$$\begin{array}{ccccccccc}
\tilde{E}^{n-1}(X^{(k-1)}) & \to & \tilde{E}^{n-1}(\vee S^{k-1}) & \to & \tilde{E}^n(X^{(k)}) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{E}^n(X^{(k-1)}) & \to & \tilde{E}^n(\vee S^{k-1}) \\
\downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \tau_{X^{(k)}} \downarrow ? & & \downarrow \tau & & \downarrow \\
\tilde{F}^{n-1}(X^{(k-1)}) & \to & \tilde{F}^{n-1}(\vee S^{k-1}) & \to & \tilde{F}^n(X^{(k)}) & \xrightarrow{i^*} & \tilde{F}^n(X^{(k-1)}) & \to & \tilde{F}^n(\vee S^{k-1})
\end{array}$$

$n \neq k, k-1$: i^* iso $\Rightarrow \exists!$ Lösung $\tau^n_{X^{(k)}}$

$n = k-1$:
$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & A & \to & B & \to & C \\
 & & \exists! \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & A' & \to & B' & \to & C'
\end{array}$$

$n = k$:
$$\begin{array}{ccccccc}
A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \exists! & & \\
A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0
\end{array}$$

#