V DIE SERRE-SPEKTRALSEQUENZ

In diesem Kapitel konstruieren wir die Serre-Sp. Seq einer Serre-Faserung $F \to E \xrightarrow{p} B$, nämlich

$$E^2_{s,t} = H_s(B, \mathcal{H}_t(F;A)) \Rightarrow H_{s+t}(E;A)$$

die stark gegen $H_*(E,A)$ (A = Abelsche Gruppe) konvergiert. Hier ist $\mathcal{H}_t(F,A)$ ein <u>lokales System</u> von Gruppen mit $b \mapsto H_t(F_b, A)$, $F_b = p^{-1}(b)$, und $E^2_{s,t}$ ist die Homologie von B mit <u>lokale Koeffizienten</u>.

Diese Sp. Sequenz wurde von Jean Leray (1945) entdeckt, und von J.P Serre in seiner Doktorarbeit komplett ausgearbeitet (1951). Wir folgen hier die Konstruktion von <u>Dress</u> (1967). Diese Referenzen und weitere: siehe Webseite.
Wir definieren erst Homologie mit lok. Koeff und $\mathcal{H}_*(F,A)$.

<u>5.1 Definition:</u> Sei X ein Raum, $\pi(X)$ der fundamentale Gruppoid von X und $\mathcal{T}: \pi(X) \to Ab$ ein lokales System von Gruppen auf X (Siehe 1.25). Wir definieren den singulären Ketten-Komplex von X mit lokalen Koeffizienten in $\mathcal{T}$, $(S_*(X,\mathcal{T}), d)$, wie folgt:
Sei $\sigma: \Delta^p \to X$ ein sing. p-simplex in X. Sei $e_i = (0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0)$ der i-te Vertex von Δ^p, $0 \le i \le p$, und sei $\sigma_i = \sigma(e_i) \in X$.
Sei $I \xrightarrow{e_{01}} \Delta^p$ der affine Weg von e_0 nach e_1, und sei $\sigma_{01}: I \to X$ als $\sigma \circ e_{01}$ definiert.
Wir setzen $$S_p(X,\mathcal{T}) = \bigoplus_{\sigma:\Delta^p \to X} \mathcal{T}_{\sigma_0}\{\sigma\}$$
(also: formale lineare Kombination wo die Koef von σ in $\mathcal{T}_{\sigma_0}$ sind).

Sei $\delta_j : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ die j-te Seite-Abbildung von Δ^p (I, 5.7).
$(0 \le j \le p)$

Bemerke, dass

$$(\sigma \circ \delta_j)_0 = (\sigma \circ \delta_j)(e_0) = \begin{cases} \sigma_1 = \sigma(e_1) & \text{falls } j = 0 \\ \sigma_0 & \text{falls } 1 \le j \le p. \end{cases}$$

Wir definieren also $d_j : \mathcal{T}_{\sigma_0}\{\sigma\} \longrightarrow \mathcal{T}_{(\sigma\delta_j)_0}\{\sigma\delta_j\}$

durch

$$d_j(a \cdot \sigma) = \begin{cases} \mathcal{T}(\sigma_{01})(a) \cdot \sigma\delta_0 & \text{falls } j = 0 \\ a \cdot \sigma\delta_j & \text{falls } 1 \le j \le p. \end{cases}$$

und $d = \sum_{j=0}^{p} (-1)^j d_j \ : \ S_p(X, \mathcal{T}) \to S_{p-1}(X, \mathcal{T})$.

Es ist eine Routine-Aufgabe zu prüfen, dass $d^2 = 0$, so dass $(S_*(X, \mathcal{T}), d)$ in der Tat ein Kettenkomplex ist.

Wir definieren die *singuläre Homologie von X mit lokalen Koeffizienten in $\mathcal{T}$* als die Homologie von $S_*(X, \mathcal{T})$:

$$H_*(X, \mathcal{T}) := H_*(S_*(X, \mathcal{T}), d).$$

5.2 Bemerkung: Homologie mit lokalen Koeffizienten ist funktoriell in beiden Variabeln: ist $g : \mathcal{T} \to \mathcal{S}$ ein Hom. von lokalen Systeme auf X (also eine natürliche Transfo von Funktoren), dann induziert g einen offensichtlich Hom. von Ketten-Komplexen

$$S_*(X, \mathcal{T}) \xrightarrow{g} S_*(X, \mathcal{S}).$$

Ist $f : X \to Y$ stetig und ist $\mathcal{T}$ ein lokales System auf Y, so definiere $f^*\mathcal{T}$ als $\Pi(X) \xrightarrow{f} \Pi(Y) \xrightarrow{\mathcal{T}} \mathcal{A}b$. Wir haben dann einen offensichtl. Hom von Kettenkomplexen

$$f_* : S_*(X, f^*\mathcal{T}) \to S_*(Y, \mathcal{T}).$$

Wir zeigen nun, dass Homologie mit lokalen Koeff. eine Verallgemeinerung von Homologie mit üblichen (also konstante, oder triviale) Koeff.

5.3 Definition: Ein lokales System von Gruppen $\mathcal{A}$ auf X heißt *konstant*, falls $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}_y = A \ \forall x, y \in X$, und falls $\mathcal{A}[w] = id_A$ für alle $[w] \in \mathrm{Mor}(\Pi(X))$.

Ein lokales System von Gruppen $\mathcal{B}$ auf X heißt <u>einfach</u>, falls es isomorph zu einem Konstanten System ist.

<u>5.4 Satz</u> Sei X ein Wegzusammenhäng. Raum und sei $\mathcal{B}$ ein einfaches lokales System von Ab. Gruppen auf X. Wähle $x \in X$ und ein Isomorphismus

$$\varphi : \mathcal{B} \xrightarrow{\cong} B_x$$

(wobei B_x der Konstate System mit $(B_x)_y = B_x \;\forall y \in X$ ist). Dann induziert φ ein Isomorphismus

$$\varphi : H_*(X, \mathcal{B}) \xrightarrow{\cong} H_*(X, B_x)$$

<u>Beweis</u>: Klar! #

<u>5.5 Bemerkung</u>: Man kann auch $S_*(X, A; \mathcal{B}) = \operatorname{coker}(S_*(A, \mathcal{B}|A) \to S_*(X, \mathcal{B}))$ für Paare definieren, und die ganze Theorie zu einer Homologie Theorie entwickeln (Lange exakte Folge, homotopie-Invarianz, Ausschneidung ...). Eine gute Referenz dafür ist Whitehead, Kapitel 6. Dies werden wir hier nicht benötigen.

Für konkrete Berechnungen ist folgender Satz von Eilenberg nützlich: Sei X ein Weg-zus.hän. Raum, der eine univers. Überlagerung besitzt:

$$p : \tilde{X} \to X.$$

Sei $\mathcal{T}$ ein lokales System auf X, $x_0 \in X$ gewählt. Dann wirkt $\pi = \pi_1(X, x_0)$ links auf $\mathcal{T}_{x_0}$, und wir machen daraus ein linke $\mathbb{Z}[\pi]$-Modul Struktur auf $\mathcal{T}_{x_0}$. Anderseits wirkt π rechts auf $\tilde{X}$ und es folgt, dass $\mathbb{Z}[\pi]$ rechts auf $S_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ wirkt. Man kann zeigen (Whitehead, (3.4) Seite 278) dass p ein Isomorphismus

$$S_*(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathcal{T}_{x_0} \longrightarrow S_*(X, \mathcal{T})$$

von Kettenkomplexe induziert (siehe auch Aufgabe 11.4). Also:

5.6 Theorem: P induziert ein Isomorphismus

$$H_*\left(S_*(\tilde{X};\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[\pi]} \mathcal{T}_{x_0} \right) \xrightarrow{\cong} H_*(X, \mathcal{T}).$$

Nun definieren wir das lokale System $\mathcal{H}_q(F, A)$ auf B, das von einer Serre-Faserung $F \to E \xrightarrow{p} B$ entsteht.

Sei $u : I \to B$ ein Weg von b_0 nach b_1 in B.
Wir betrachten die Pull-back Quadraten

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(b_0) = F_{b_0} \arrow[r, "f_0^u"] \arrow[d, "r"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E_u \arrow[r] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E \arrow[d, "p"] \\
\{0\} \arrow[r, hook, "i_0"] & {[0,1]} \arrow[r, "u"] & B
\end{tikzcd}$$

Dann sind q und r auch Serre-Faserungen, und i_0 ist eine Homotopie-Äquivalenz. Es folgt (LEF in Homotopie) dass f_0^u eine schwache Homotopie-Äq. ist. Analog: definiere $f_1^u : F_{b_1} \to E_u$.

5.7 Definition + Lemma: Sei $p : E \to B$ eine Serre-Faserung, $q \geq 0$ und A eine Abelsche Gruppe. Wir definieren ein lokales System $\mathcal{T} = \mathcal{H}_q(F; A)$ auf B durch:

Für $b \in B$ setze $\mathcal{T}_b := H_q(F_b; A)$, $F_b = p^{-1}(b)$.

Für $u : [0,1] \to B$ mit $u(0) = b_0$, $u(1) = b_1$, setze:

$$\mathcal{T}_u : H_q(F_{b_0}; A) \xrightarrow[\cong]{f^u_{0*}} H_q(E_u; A) \xrightarrow{(f^u_{1*})^{-1}} H_q(F_{b_1}; A)$$

(Hier benutzen wir 3.26).

Dann ist $\mathcal{H}_q(F; A)$ ein lokales System auf B.

Beweis: ziemlich klar. Zum Beispiel, seien $u, v : I \to B$ zwei Wege von b_0 nach b_1 mit $u \sim v$ (homotop rel. Endpunkten).
Zu zeigen: $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v$. Sei $H : [0,1] \times [0,1] \to B$, $u \overset{H}{\sim} v$.
Definiere E_H analog zu E_u; dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & E_u \arrow[d] & \\
F_{b_0} \arrow[ur, bend left, "f_0^u"] \arrow[r, "f_0^H"] \arrow[dr, bend right, "f_0^v"'] & E_H & F_{b_1} \arrow[ul, bend right, "f_1^u"'] \arrow[l, "f_1^H"'] \arrow[dl, bend left, "f_1^v"] \\
 & E_v \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

von schwachen Äquivalenzen, woraus $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_v$ folgt.

#

Nun ist alles vorhanden, um den Leray - Serre - Dress - Theorem zu beweisen. Die (Dress-) Serre spectral sequence einer Serre Faserung $p: E \to B$ wird einem Doppelkomplex assoziiert (1. Quadrant für Homologie).

Seien $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und betrachte

$$\mathrm{Sing}_{p,q}(p) = \{ (\sigma, \tau) \mid \sigma: \Delta^p \times \Delta^q \to E,\ \tau: \Delta^p \to B \text{ mit } p \circ \sigma = \tau \circ pr_1 \}$$

(5.8)
$$\begin{tikzcd} \Delta^p \times \Delta^q \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "pr_1"] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^p \arrow[r, "\tau"] & B \end{tikzcd}$$

Sei A eine abelsche Gruppe; definiere

$$S_{p,q}(p; A) = \bigoplus_{(\sigma,\tau) \in \mathrm{Sing}_{p,q}(p)} A \cdot (\sigma, \tau).$$

Die Ränder in diesem Doppelkomplex werden von den üblichen singulären Rändern gegeben:

$$\begin{tikzcd} \Delta^{p-1} \times \Delta^q \arrow[r, "\delta_i \times id"] \arrow[d] & \Delta^p \times \Delta^q \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\ \Delta^{p-1} \arrow[r, "\delta_i"] & \Delta^p \arrow[r, "\tau"] & B \end{tikzcd}$$

$\Delta^{p-1} \xrightarrow{\delta_i} \Delta^p$ i-te Seite, $0 \leq i \leq p$.

$$\Rightarrow \quad d_i^h(a \cdot (\sigma, \tau)) = a \cdot (\sigma \circ (\delta_i \times id), \tau \circ \delta_i)$$

und

$$d^h: S_{p,q}(p; A) \to S_{p-1,q}(p; A)$$

ist als $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i d_i^h$ definiert.

Analog $d_i^v(a \cdot (\sigma, \tau)) = a \cdot (\sigma \circ (id \times \delta_i), \tau)$ und

$$d^v: S_{p,q}(p; A) \to S_{p,q-1}(p, A)$$

ist als $\sum_{i=0}^{q} (-1)^{i+p} d_i^v$ definiert.

Setze $D_{p,q} := S_{p,q}(p; A)$

<u>5.9 Lemma</u>: (D, d^h, d^v) ist ein Doppelkomplex (des 1. Quadrant).

<u>Beweis</u>: Klar.