1.14 Satz: Sei $(X, A, *)$ ein punktiertes Paar. Der Homöo

$$\begin{array}{ccc} C(I^{n-1}\times I, X) & \xrightarrow{\cong} & C(I^{n-1}, C(I,X)) \quad [1.10 f] \\ \cup & & \cup \\ C((I^n, \partial I^n, J^{n-1}), (X, A, *)) & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & C((I^{n-1}, \partial I^{n-1}), (P(X,A,*), c)) \end{array}$$

schränkt sich zu einem Homöomorphismus $\tilde{\varphi}$ auf den gegebene Teilräume ein. Insbesondere induziert $\tilde{\varphi}$ eine natürliche Bijektion

$$\varphi : \pi_n(X, A, *) \xrightarrow{\cong} \pi_{n-1}(P(X, A, *), c)$$

der Wegzusammenhangskomponenten; Falls $n \geq 2$ ist dies ein Homomorphismus von Gruppen.

Beweis: Es ist leicht zu prüfen, dass die Abbildung
$\tilde{\varphi}: f \mapsto \tilde{\varphi}(f)$, $\tilde{\varphi}(f)(t_1, \dots, t_{n-1})(t) = f(t_1, \dots, t_{n-1}, t)$
ein Homöomorphismus ist: $P(X, A, *)$ ist ein Teilraum von $C(I, X)$, und aus 1.10 (d) folgt, dass $C((I^{n-1}, \partial I^{n-1}), (P(X, A, *), c))$ die Teilraumtopologie von $C(I^{n-1}, C(I,X))$ hat. Da $\tilde{\varphi}$ offensichtlich bijektiv ist, ist es also ein Homöo.
(b) φ ist ein Homomorphismus von Gruppen: Klar, folgt direkt aus die Definitionen von $+_1$ und $\tilde{\varphi}$. #

1.15 Definition: Ist $(X, *)$ ein punkt. Raum, $n \geq 0$, so definiere $(\Omega^0(X, *), c) = (X, *)$ und $(\Omega^n(X, *), c) = (\Omega(\Omega^{n-1}(X, *), c), c)$, wobei c die konstante Schleife ist.
[Bemerkung: mit Hilfe von 1.10 kann man zeigen: $\Omega^n(X, *) \cong C(S^n, X)_*$ mit der ko Topologie].

1.16 Korollar: Sei $(X, A, *)$ ein punktiertes Paar; Sei $n \geq 1$
Wir haben natürliche Isomorphismen von Gruppen

$$\pi_n(X, *) \cong \pi_{n-1}(\Omega(X, *), c) \cong \dots \cong \pi_0(\Omega^n(X, *), c)$$

$$\pi_n(X, A, *) \cong \pi_{n-1}(P(X, A, *), c) \cong \dots \cong \pi_0(\Omega^{n-1}P(X, A, *), c)$$

($\uparrow$ nur Mengen falls $n = 1$).

[Bemerke: $\pi_0(\Omega^n(Y,*),c)$ hat eine Gruppen Struktur, die von der H-Gruppe-Struktur von $(\Omega^n(Y,*),c)$ gewonnen ist]. #

Nun zum Exaktheitsaxiom für π_*. Wir brauchen einen Rand-Operator.

<u>1.17 Lemma + Def</u>: Sei $(X,A,*)$ ein punkt. Paar, $n \geq 0$.
Sei $d: I^{n-1} \hookrightarrow I^n$ die Inklusion mit $d(t_1,\dots,t_{n-1}) = (t_1,\dots,t_{n-1},0)$
Sei $\partial_n : \pi_n(X,A,*) \to \pi_{n-1}(A,*)$ durch
$\partial_n([f]) = [f\circ d]$ gegeben. Dann ist ∂_{n+1} wohldefiniert, liefert eine natürliche Transformation von Funktoren

$$\partial_n : \pi_n \Longrightarrow \pi_{n-1}\circ r \quad , \quad r: Top^2_* \to Top_*, \; (X,A,*) \to (A,*)$$

und ist ein Gruppen Homomorphismus falls $n \geq 2$.

<u>Beweis</u>: Sei $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X,A,*)$ gegeben.
Identifizieren wir I^{n-1} mit $d(I^{n-1}) \subset I^n$, so sehen wir:
$(\partial I^n) \cap I^{n-1} = I^{n-1}$, $J^{n-1} \cap I^{n-1} = \partial I^{n-1}$; also hat man eine Abbildung von Paar $f\circ d: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A,*)$.
Aus $f \simeq g$ folgt $f\circ d \simeq g\circ d$, also ist $\partial_n([f])$ wohldefiniert.
Die Natürlichkeit ist klar, die Additivität von ∂_n $(n \geq 2)$ auch. #

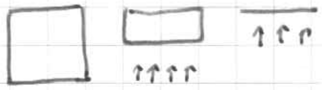
<u>1.18 Theorem (Exakte Homotopiesequenz)</u>: Sei $(X,A,*)$ ein p. Paar und seien $i:(A,*) \hookrightarrow (X,*)$ und $j:(X,*,*) \to (X,A,*)$ die Inklusionen. Dann ist die lange Folge

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(A,*) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X,*) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X,A,*) \xrightarrow{\partial_n} \dots$$
$$\dots \to \pi_1(X,A,*) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(A,*) \xrightarrow{i_*} \pi_0(X,*) \quad \text{exakt}$$

(Für punktierte Mengen: $(M,x) \xrightarrow{\alpha} (N,y) \xrightarrow{\beta} (P,z)$ ist exakt in (N,y) falls $\text{Bild}(\alpha) = \underbrace{\beta^{-1}(z)}_{=: \ker(\beta)}$).

Beweis: (1) Exaktheit in $\pi_n(X,*)$, $n \geq 1$.

(a) $j_* i_* = 0$; Sei $[f] \in \pi_n(A,*)$. Betrachte $ijf = \tilde{f} := I^n \xrightarrow{f} A \hookrightarrow X$. Dann gilt $\tilde{f} \overset{H}{\simeq} c$ mit $H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (X, A, *)$, wobei $H = \tilde{f} G$ für $G : I^n \times I \to I^n$, $((t_1, \dots, t_n), t) \mapsto (t_1, \dots, t_{n-1}, t + (1-t)t_n)$

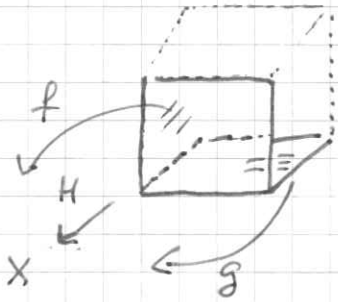
G : 

(b) Ker $j_* \subset$ Bild i_*; Sei $[f] \in$ Ker j_*. Wir haben also eine Homotopie $f \simeq c$ mit $H : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (X, A, *)$.
Sei $g : (I^n, \partial I^n) \to (A, *)$ gegeben durch $g(t_1, \dots, t_n) = H(t_1, \dots, t_{n-1}, 0, t_n)$

Sei $G : I^n \times I \to I^{n+1}$, $(t,s) \mapsto G(t,s)$

mit

$$G(t_1, \dots, t_n, s) = \begin{cases} (t_1, \dots, t_n, 2st_n) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ (t_1, \dots, t_{n-1}, (2-2s)t_n, t_n) & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$



G : 

Dann gilt $f \overset{H \circ G}{\simeq} ig$ mit $H \circ G : (I^n, \partial I^n) \times I \to (A, *)$

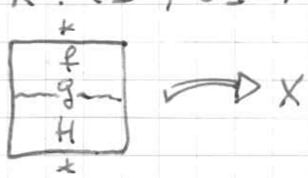
also $[f] = i_*[g]$ in $\pi_n(X,*)$.

(2) Exaktheit in $\pi_n(X, A)$, $n \geq 1$.

(a) $\partial_n \circ j_* = 0$: sei $[f] \in \pi_n(X,*)$; also $f|_{I^{n-1} \times 0} = c$, und daraus folgt $\partial_n \circ j_* [f] = [f \circ d] = [c] = 0$.

(b) Ker $\partial_n \subset$ Bild j_*. Sei $f : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$ mit $\partial_n [f] = 0$; Sei $g = f|_{I^{n-1} \times 0} : I^{n-1} \to A$, also $\partial_n [f] = [g] = 0 \Rightarrow$ Wir haben eine Homotopie $c_* \overset{H}{\simeq} g$ mit $H : (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \times I \to (A, *)$.

Sei $k : (I^n, \partial I^n) \to (X, *)$, $k(t_1, \dots, t_n) = \begin{cases} H(t_1, \dots, 2t_n) & | \ 0 \leq t_n \leq \frac{1}{2} \\ f(t_1, \dots, 2t_n - 1) & | \ \frac{1}{2} \leq t_n \leq 1 \end{cases}$

k : 

Dann gilt $f \overset{G}{\simeq} jk$ mit $G : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (X, A, *)$

$G(t_1, \dots, t_n, t) = k(t_1, \dots, t_{n-1}, \frac{1}{2}(1 - t + t_n))$

(3) Exaktheit in $\pi_n(A,*)$, $n \geq 1$

(a) $i_* \circ \partial_{n+1} = 0$. Sei $f : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, *)$.
Dann gilt $i_* \circ \partial_{n+1} [f] = [g]$ mit $g : (I^n, \partial I^n) \to (X, *)$,
$g(t_1, \dots, t_n) = f(t_1, \dots, t_n, 0)$. Dann gilt $g \overset{f}{\simeq} c$!
Also $i_* \circ \partial_{n+1} [f] = 0$.

(b) Ker $i_* \subset$ Im ∂_{n+1} : genau wie (a) : Sei
$f : (I^n, \partial I^n) \to (A, *)$ mit $i_* [f] = 0$. Sei
$H : (I^n, \partial I^n) \times I \to (X, *)$ mit $if \overset{H}{\simeq} c$.
Sei $h : (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, J^n) \to (X, A, *)$, mit
$h(t_1, \dots, t_{n+1}) = H(t_1, \dots, t_{n+1})$. Dann gilt $f = h|_{I^n \times 0}$,
also $\partial_{n+1} [h] = [f]$.

#

Als triviale Folgerung:

<u>1.19 Korollar</u>: Ist eine Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine Homotopie-Äquivalenz, so folgt $\pi_n(X, A, *) = 0$ $\forall n \geq 1$.

Nun einige einfache Sätze, die uns auch erste Berechnungen geben.

<u>1.20 Satz</u>: Sei $p : (E, e_0) \to (X, x_0)$ eine Überlagerung.
Dann ist $p_* : \pi_n(E, e_0) \to \pi_n(X, x_0)$ ein Isomorphismus für alle $n \geq 2$.

<u>Beweis</u>: Wir hatten mit Hilfe von Van-Kampen bewiesen, dass S^n für $n \geq 2$ einfachzusammenhängend ist (I 3.42).

(a) p_* surjektiv : sei $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, dargestellt durch $f : (S^n, *) \to (X, x_0)$. Dann gilt

$$\begin{tikzcd} & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ (S^n, *) \arrow[ur, dashed, "\tilde f"] \arrow[r, "f"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

$f_*(\pi_1(S^n, *)) = 0 \subset p_*(\pi_1(E, e_0))$,
also $\exists \tilde f$ mit $f = p \circ \tilde f$.
Also $p_* [\tilde f] = [f]$

(b) p_* injektiv : Hochhebung von Homotopien : Sei $[f_1], [f_2]$
$\in \pi_n(E, e_0)$ mit $p_* [f_1] = p_* [f_2]$, $f_i : (S^n, *) \to (X, x_0)$.

Also $pf_1 \overset{H}{\simeq} pf_2$. Dann existiert $\tilde{H} : S^n \times I \to E$ mit $f_1 \overset{\tilde{H}}{\simeq} \tilde{H}(0,1) = f_2$

Eindeutig. I.8.6

$$\begin{tikzcd} S^n \times \{0\} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & (E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ S^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dotted, "\tilde{H}"] & (X, x_0) \end{tikzcd}$$

#

1.21 Korollar: $\pi_n(S^1, *) = 0$ für $n \geq 2$.

Beweis: $p : \mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto e^{2\pi i t}$ Überlagerung, $\mathbb{R} \simeq *$ #

1.22 Satz: Sei $\{(X_\alpha, *)\}_{\alpha \in I}$ eine Familie von wegzusammenhängenden Räume. Sei $p_\alpha : \prod_\alpha X_\alpha \to X_\alpha$ die Projektion. Dann induziert die Familie $\{p_{\alpha *} : \pi_n(\prod_\alpha X_\alpha, *) \to \pi_n(X_\alpha, *)\}_\alpha$ induziert ein Isomorphismus

$$p : \pi_n(\prod_\alpha X_\alpha, *) \to \prod_\alpha \pi_n(X_\alpha, *)$$

für alle $n \geq 0$.

Beweis: Wir haben Bijektionen $\prod_\alpha C(S^n, X_\alpha)_* \xrightarrow{\cong} C(S^n, \prod_\alpha X_\alpha)_*$ und $\prod_\alpha C((S^n \times I, * \times I), (X_\alpha, *)) \to C((S^n \times I, * \times I), (\prod_\alpha X_\alpha, *))$, dank die Universelle Eigenschaft des Produktes. #

1.23 Beispiel Sei $\mathbb{T}^n = (S^1)^n$ der n-Torus. Dann gilt

$$\pi_k(\mathbb{T}^n, *) = \begin{cases} \mathbb{Z}^n & k = 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieser Beispiel zeigt: für eine n-dimensionale, kompakte, orientierbare Mannigfaltigkeit M kann wohl gelten: $\pi_n(M, *) = 0$.

Eine wichtige Frage, die wir noch zu klären haben, ist die Rolle des Basispunktes $x_0 \in X$ in $\pi_n(X, x_0)$. Es ist hier nützlich, Lokale Systeme einzuführen.

1.24 Definition: Sei X ein Raum. Der fundamental Gruppoid [Gruppoid = Kategorie, wo alle Morphismen Isomorphismen sind] von X ist die Kategorie $\pi(X)$ mit

- Objekten: $\{x \mid x \in X\}$
- Ein Morphismus von x nach y ist eine Homotopieklasse