<u>2.31 Bemerkung</u>: Analog zur Faserfolge von $f: (X,*) \to (Y,*)$ können wir die "Cofaserfolge" von f bilden. Sei $C(f)$ der Kegel von f, definiert als $CX \vee Y /\sim$, wobei $\sim$ durch $(x,0) \sim f(y)$ erzeugt ist. Die Folge $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i_1} C(f)$, mit i_1 die offensichtliche Inklusion, ist Co-Exakt in $HoTop_*$:
$[C(f), Z]_* \xrightarrow{i^*} [Y, Z] \xrightarrow{f^*} [X, Z]$ ist exakt in punkt. Mengen.
Dann kann man, durch zur obigen Diskussion, ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} C(f) \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "\partial"'] & C(i_1) \arrow[r, "i_3"] \arrow[d, "="] & C(i_2) \arrow[d, "="] \\ & \Sigma X \arrow[r, "\Sigma f"] & \Sigma Y \end{tikzcd}$$

konstruieren, der p. Homotopie kommut. ist.

Dann erhält die lange Kofaserfolge (oder Puppe-Folge)

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{i} C(f) \xrightarrow{\partial} \Sigma X \xrightarrow{\Sigma f} \Sigma Y \xrightarrow{\Sigma i} \Sigma C(f) \xrightarrow{\Sigma \partial} \Sigma^2 X \to \cdots$$

die in $HoTop_*$ Coexakt ist.

<u>2.32 Bemerkung</u>: nach der Diskussion 1.30-1.38 können wir noch erwähnen: Ist X punktiert, was ist die Verbindung zwischen $\pi_n X = [S^n, X]_*$ und $[S^n, X]$? Wir haben eine Abbildung $\phi: [S^n, X]_* \to [S^n, X]$, $[f]_* \to [f]$.
Ist X wegzusammenhängend, so ist ϕ surjektiv:
Ist $f: S^n \to X$ gegeben. wähle ein Weg w von $*$ nach $f(*)$.
Dann gilt $f \simeq f_w$ (frei) $\Rightarrow [f] = \phi[f_w]$.
Dann ist $[S^n, X]_* / \pi_1(X) \xrightarrow{\phi} [S^n, X]$ eine Bijektion.

<u>2.33 Satz</u>: Sei $E \xrightarrow{p} B$ eine Serre-Faserung, und sei X ein CW-Komplex. Dann hat p die Homotopie-Hochhebungs-Eigenschaft bezüglich X.

<u>Beweis</u>: Sei gegeben ein HH Problem

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "H"] & B \end{tikzcd}$$

Für $n \geq 0$, sei $X^{(n)}$ der n-Skelett von X, $i_n: X^{(n)} \hookrightarrow X$ die Inklusion, und betrachte die

Einschränkung des Diagramms auf $X^{(n)}$:

$$\begin{tikzcd} X^{(n)} \arrow[r, "a_n"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X^{(n)} \times I \arrow[r, "H_n"] \arrow[ur, dotted, "G_n"] & B \end{tikzcd}$$

Da X und $X \times I$ die schwache Topologie bezüglich $X^{(n)}$ und $X^{(n)} \times I$ haben, genügt es solche eine Lösung G_n zu finden, für alle $n \geq 0$, mit $G_n \big|_{X^{(n-1)} \times I} = G_{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

$\underline{n=0}$: $X^{(0)}$ ist diskret. Für jedes $x \in X^{(0)}$ ist

$$\begin{tikzcd} \{x\} \arrow[r, "a_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \{x\} \times I \arrow[r, "H_0"'] \arrow[ur, "G_x"] & B \end{tikzcd}$$

lösbar; wähle G_x; Dann ist

$$G_0 : X^{(0)} \times I = \coprod_{x \in X^{(0)}} \{x\} \times I \xrightarrow{\amalg G_x} E$$ die gesuchte Lösung.

Sei nun $\underline{n \geq 1}$ und G_{n-1} gegeben. Sei e eine n-Zelle von X, und sei $\chi_e : (I^n, \partial I^n) \to (X^{(n-1)} \cup e, X^{(n-1)})$ eine Char. Abbildung für e. Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \tilde{J}^n = (I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I) \arrow[r, "b"] \arrow[d, hook] & E \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r, "H(\chi_e \times id_I)"] \arrow[ur, dashed, "H_e"] & B \end{tikzcd}$$

mit $b(x,0) = a(\chi_e(x))$ und $b(y,t) = G_{n-1}(\chi_e \times I)(y,t)$,

für $x \in I^n$ und $y \in \partial I^n$. Da das Paar $(I^n \times I, \tilde{J}^n)$ homöomorph zu $(I^n \times I, I^n \times 0)$ ist, haben wir hier eine Hochhebung $H_e : I^n \times I \to E$. Wähle solche eine Hochhebung für jede n-Zelle e in X. Definiere G_e:

$$\begin{tikzcd} \bar{e} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ \bar{e} \times I \arrow[r, "H"'] \arrow[ur, "G_e"] & B \end{tikzcd}$$

durch $G_e(\chi_e(x), t) = H_e(x,t)$.

Es ist klar dass G_e wohldefiniert und stetig ist, und $G_e \big|_{(\partial \bar{e}) \times I} = G_{n-1} \big|_{(\partial \bar{e}) \times I}$.

Also erhalten wir eine wohldefinierte Abbildung wie gewünscht

$$G_n = (\cup G_e) \cup G_{n-1} : X^{(n)} \times I = \Big(\bigcup_{e\ n\text{-Zelle}} \bar{e} \cup X^{(n-1)}\Big) \times I \to E$$

Die Einschränkung von G_n auf $\bar{e} \times I$ für jede m-Zelle e mit $m \leq n$ ist stetig. $X^{(n)} \times I$ hat die schwache Topologie bezüglich $\{\bar{e} \times I \mid e\ m\text{-Zelle}, m \leq n\}$, also ist G_n stetig #

<u>2.34 Referenz</u>: Gute Quelle für Faserungen: tD-K-P Kap 3.

III Homotopietheorie von CW-Komplexen

Folgende Def. hatten wir am Ende von II, Kap 1 kurz erwähnt.

<u>3.1 Definition</u>: Sei (X, A) ein Paar von Hausdorffräumen. Ein <u>CW-Zerlegung von X relativ A</u> ist ein Paar (K, Φ), wobei K ein Familie von (offenen) Zellen in X ist, und $\Phi = \{ \chi_e : D^{\dim(e)} \to X \mid e \in K \}$, so dass

(a) $X = A \amalg \coprod_{e \in K} e$ (als Mengen). Wir setzen $X^{(-1)} = A$ und $X^{(n)} = A \cup \bigcup\{ e \in K \mid \dim(e) \leq n \}$, mit der Teilraumtopologie.

(b) $\chi_e : (D^n, S^{n-1}) \to (X^{(n-1)} \cup e, X^{(n-1)})$ und $\chi_e|_{\mathring{D}^n} : \mathring{D}^n \to e$ ist ein Homöo.

(c) $\bar{e}$ liegt in einer Vereinigung von A mit endlich vielen Zellen.

(d) $B \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $B \cap Z$ abgeschlossen in Z ist, für alle $Z \in \{A\} \cup \{ \bar{e} \mid e \in K \}$.

<u>3.2 Bemerkungen</u>: (a) Ein CW-Zerlegung von X ist das gleiche, wie eine CW-Zerlegung von X relativ $\emptyset \subset X$. Die Ergebnisse aus II Kapitel 1 gelten auch für relative CW-Komplexe. Insbesondere:

(b) $X^{(n)}$ ist abgeschlossen in X, $\forall\ n \geq -1$ ($\Rightarrow A \subset X$ abg.)

(c) Sind $A \subset Y_i \subset X$ Unterkomplexe relativ A, so sind $\bigcap Y_i$ und $\bigcup Y_i$ auch Unterkomplexe relativ A.

(d) Man kann relative CW-Komplex auch induktiv konstruieren: $A = X^{(-1)} \subset X^{(0)} \subset X^{(1)} \subset \ldots \subset X$, so dass A Hausdorff ist, $X^{(n)}$ enthält von $X^{(n-1)}$ durch anheften von n-Zellen, und $X = \bigcup_{n \geq -1} X^{(n)}$ hat die schwache Topologie bezüglich $\{ X^{(n)} \}_{n \geq -1}$, so ist (X, A) ein relativer CW.

(e) $K \subset X$ kompakt trifft nur endlich vielen Zellen von X

(f) Ist $A \subset Y \subset X$ ein relativer Unterkomplex, so ist $Y \hookrightarrow X$ eine Cofaserung.

3.3 Lemma: Sei $n \geq 0$ und (X, A) ein Paar von Räumen. Die folg. Eigenschaften sind äquivalent:

(a) (X, A) ist n-zusammenhängend

(b) Sei (Y, B) ein relativer CW-Komplex mit $\dim(Y) \leq n$,
(hier: $\dim(Y) = \max\{-1, m \mid \exists\ e$ Zelle von Y, $\dim(e) = m\}$)
und $f : (Y, B) \to (X, A)$ stetig, so $\exists\ g : (Y, B) \to (X, A)$ mit $f \simeq g$ rel B und $g(Y) \subset A$.

Beweis (a) $\Rightarrow$ (b) Wir betrachten zuerst den Sonderfall $n \geq 1$ $(Y, B) = (D^q, S^{q-1})$ mit $1 \leq q \leq n$. Wir haben $\pi_q(X, A, a) = 0$ $\forall\ a \in A$. Also ist f als Abbildung von Paare homotop zur konstanten Abbildung mit Bild a. Lemma 1.44 $\Rightarrow$ (b). Nun allgemeiner: Falls $\dim(Y) = -1$ gilt $Y = B$; den Fall $\dim Y = 0$ wird leicht separat behandelt. Induktion auf Skelett: wir können annehmen: $B = Y^{(\ell)}$ und $f(B) \subset A$, für ein $0 \leq \ell < q \leq n$, und Y entsteht von B durch anheften von q-Zellen: wir haben ein Push-out

$$\begin{tikzcd}
\sqcup S^{q-1} \arrow[r, "\sqcup \varphi"] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & B \arrow[d] \\
\sqcup D^q \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

Aber das Produkt mit I ist auch ein Push-out:

$$\begin{tikzcd}
(\sqcup S^{q-1}) \times I \arrow[r] \arrow[d, hook] & B \times I \arrow[d] \arrow[r, bend left, "\bar f"] & A \arrow[d] \\
(\sqcup D^q) \times I \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "h"'] & Y \times I \arrow[r, dashed, "H"] & X
\end{tikzcd}$$

Hier ist $\bar f(b, t) = f(b)$ $\forall\ t \in [0, 1]$,
Und h ist aus dem Sonderfall gegeben.
Da $h_1(\sqcup D^q \times I) \subset A$ gilt auch $H_1(Y) \subset A$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Sei $x \in X$, und $f : (D^0, \emptyset) \to (X, A)$. Dann gibt uns (b) ein Weg von x nach A, also ist (X, A) 0-zusammenhängend. Dank der LEF in Homotopie des Paares (X, A) genügt es zu zeigen: $\pi_q(A, *) \xrightarrow{j_*} \pi_q(X, *)$ ist surjektiv für $q \leq n$ und injektiv für $q \leq n-1$.

Surjektiv: folgt aus (b) für $(Y, B) = (I^q, \partial I^q)$.

Injektiv: folgt aus (b) für $(Y, B) = (I^q \times I, \partial(I^q \times I))$. #

3.4 Satz: Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex. Dann ist $(X, X^{(n)})$ n-zusammenhängend, $\forall\, n \geq 0$.

Beweis: Es ist klar, dass jede Wegzusammenhangskomponente von X den Raum $X^{(0)} = A \cup \bigcup\{0\text{-Zellen}\}$ trifft, also ist $(X, X^{(n)})$ 0-zusammenhängend, $\forall\, n \geq 0$. Ebenso ist $(X^{(k)}, X^{(n)})$ 0-zusammenhängend, $\forall\, k \geq 0$. Der Beweis geht in Schritte

(A) $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ ist n-zusammenhängend: Sei K_{n+1} die Menge der $(n+1)$-Zellen in X, $\quad U = \bigcup_{e \in K_{n+1}} e \subset X^{(n+1)}$ und

$$V = X^{(n)} \cup \bigcup_{e \in K_{n+1}} \tilde{e} \quad \text{mit} \quad \tilde{e} = \chi_e(\mathring{D}^n \setminus 0).$$

Dann sind U, V offen in $X^{(n+1)}$, $X^{(n+1)} = U \cup V$, und
$$(U, U \cap V) = \coprod_{e \in K_{n+1}} (e, \tilde{e}) \cong \coprod_{e \in K_{n+1}} (\mathring{D}^{n+1}, \mathring{D}^{n+1} \setminus 0) \simeq \coprod_{e \in K_{n+1}} (D^{n+1}, S^n);$$
Insbesondere ist $(U, U \cap V)$ dank 1.59 (4) (und die LEF des Paares (D^{n+1}, S^n)) n-zusammenhängend.

Also ist dank 1.43 die Inklusion $(U, U \cap V) \hookrightarrow (X^{(n+1)}, V)$ n-zusammenhängend; Also ist $(X^{(n+1)}, V)$ n-zusammenhängend. Aber $V \simeq X^{(n)}$, also folgt auch $(X^{(n+1)}, X^{(n)})$ ist n-zusammenhängend.

(B) $(X^{(k)}, X^{(n)})$ ist n-zusammenhängend für alle $k > n$:
Induktion auf k: $k = n+1$, das ist (A). Sei $k > n+1$ und bewiesen, dass $(X^{(k-1)}, X^{(n)})$ n-zus. ist.
Das Paar $(X^{(k)}, X^{(k-1)})$ ist n-zusammenhängend. Aus der LEF des Tripels $(X^{(k)}, X^{(k-1)}, X^{(n)})$ folgt, dass auch $(X^{(k)}, X^{(n)})$ n-zusammenhängend ist.

(C) $(X, X^{(n)})$ ist n-zusammenhängend: Folgt aus einer relativen Version von Aufgabe 5.4. Oder: Jede Abbildung $(D^q, S^{q-1}) \to (X, X^{(n)})$ faktorisiert über $(D^q, S^{q-1}) \to (X^{(k)}, X^{(n)})$ für k groß genug.

#

3.5 Theorem (Zelluläre-Approximation). Sei $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen CW-Komplexe. Dann ist f zu einer zellulären Abbildung $g: X \to Y$ homotop (also $g(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$ $\forall n$). Ist $A \subset X$ ein Unterkomplex und $f|_A$ zellulär, so kann man noch $f \simeq g$ rel A verlangen.

Beweis: Wir konstruieren per Induktion auf n Homotopien $H^n: X \times I \to Y$ mit

(a) $H^0_0 = f$ und $H^n_0 = H^{n-1}_1$ für $n \geq 1$.

(b) $H^n_1(X^{(k)}) \subset Y^{(k)}$ für $k \leq n$

(c) $H^n_t = H^n_0$ auf $X^{(n-1)} \cup B$, $\forall t \in [0,1]$.

Für den Induktionsschritt können wir annehmen: $f(X^{(k)}) \subset Y^{(k)}$ für $k < n$, $n \geq 0$. Sei e eine n-Zelle von $X^{(n)} \setminus B$, mit Karakt. Abbildung $\chi_e: (D^n, S^{n-1}) \to (X^{(n)}, X^{(n-1)})$.

Da $(Y, Y^{(n)})$ n-zusammenhängend ist ist $f \circ \chi_e$ Homotop relativ S^{n-1} zu einer Abbildung mit Bild in $Y^{(n)}$.

Damit können wir einen Homotopie $\overline{H}^n: (X^{(n)} \cup B) \times I \to Y$ rel $X^{(n-1)} \cup B$ definieren, mit $\overline{H}^n_0 = f$ und $\overline{H}^n_1(X^{(n)}) \subset Y^{(n)}$.

Da $X^{(n)} \cup B \hookrightarrow X$ eine Kofaserung ist, können wir $\overline{H}^n$ zur gesuchten Homotopie H^n erweitern. Somit ist die Konstruktion von $\{H_n\}_{n \geq 0}$ beendet.

Wir setzen nun die H_n nacheinander: Sei $H: X \times I \to Y$ durch

$$H(x,t) = \begin{cases} H^i(x, 2^{i+1}(t-1+2^{-i})), & 1-2^{-i} \leq t \leq 1-2^{-i-1} \\ H^i(x,1) & x \in X^{(i)},\ t = 1. \end{cases}$$

Es ist offensichtlich, dass $H|_{X^{(i)} \times I}$ stetig ist, $\forall i$. Da $X \times I$ die schwache Top. bezüglich $X^{(i)} \times I$ hat, ist H stetig. #

3.6 Korollar: Seien $F_0, F_1: X \to Y$ zelluläre Abbildungen mit $F_0 \simeq F_1$ rel B, $B \subset X$ Unterkomplex. Dann existiert eine Homotopie $F: X \times I \to Y$ rel B mit $F(X^{(n)} \times I) \subset Y^{(n+1)}$ zwischen F_0 und F_1.