IV SPEKTRALSEQUENZEN

<u>4.1 Beispiel</u>: ein Beispiel kennen wir schon: die LEF in Homologie, die einer kurzen ex. Folge von Kettenkomplexen

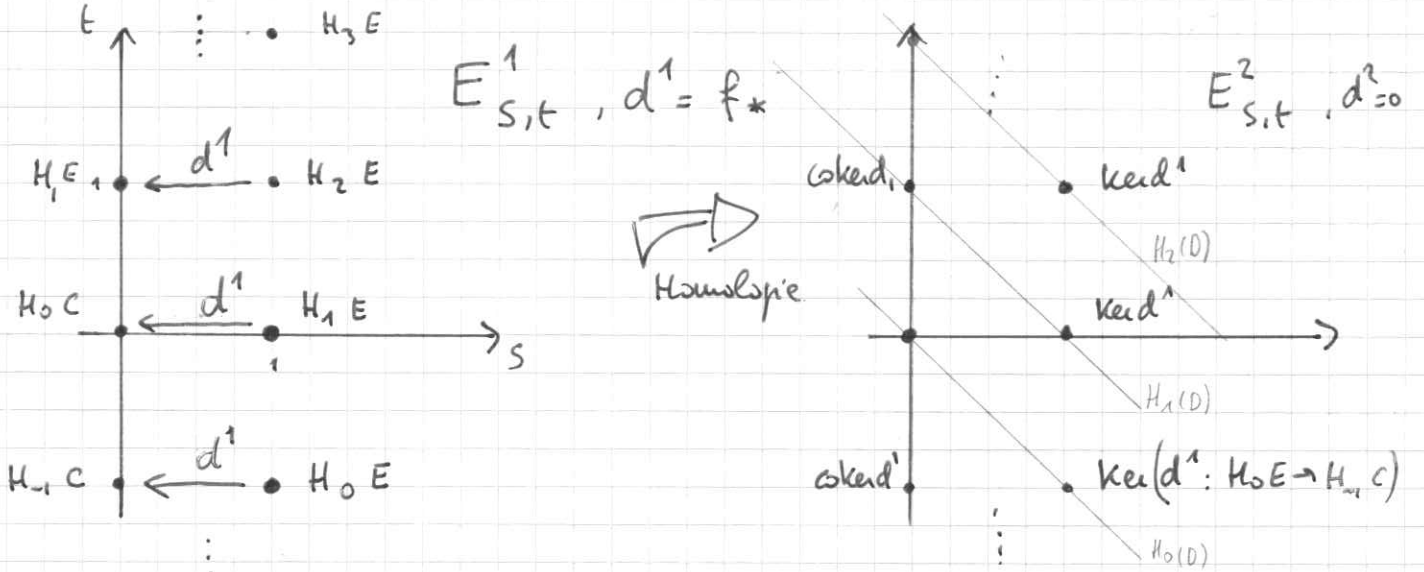
$$0 \to C_\cdot \to D_\cdot \to E_\cdot \to 0 \qquad (*)$$

zugeordnet wird. Wir stellen es erneut als Babyspektralsequenz vor. Dazu nehmen wir an, dass die Kettenkomp aus Vektorräumen über einem Körper k bestehen. Dann spaltet $0 \to C_n \xrightarrow{i} D_n \xrightarrow{g} E_n \to 0$, und wir wählen eine Spaltung $\forall n$. Dann können wir $D_\cdot$ als

$$\begin{tikzcd} D_n \arrow[d, "d^D"'] & \cong & C_n \arrow[d, "d^C"'] & \oplus & E_n \arrow[d, "d^E"] \arrow[dll, "(-1)^n f"'] \\ D_{n-1} & \cong & C_{n-1} & \oplus & E_{n-1} \end{tikzcd}$$

darstellen.

Nun nehmen wir an, dass $H_*(C_\cdot)$ und $H_*(E)$ bekannt sind, und möchten damit $H_*(D)$ berechnen.



Nun haben wir eine exakte Folge $0 \to E^2_{0,n} \to H_n(D) \to E^2_{1,n-1} \to 0$ und die spaltet (Vektorräume!)

Das ist natürlich nur die LEF von $(*)$, mit

$d^1 = f_* = \pm \partial_*$.

Das ist die Spektralsequenz, die vom "unrolled exact couple"

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H_* C_\cdot \arrow[r, "i"] \arrow[d, "id"] & H_* D_\cdot \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\ & & H_* C & H_* E \arrow[l, dotted, "\partial"] & \end{tikzcd}$$

entsteht.

4.2 Beispiel: Wir betrachten weiterhin einen Kettenkomplex $D.$ über K, diesmal mit einer Filtrierung durch Unterkomplexe

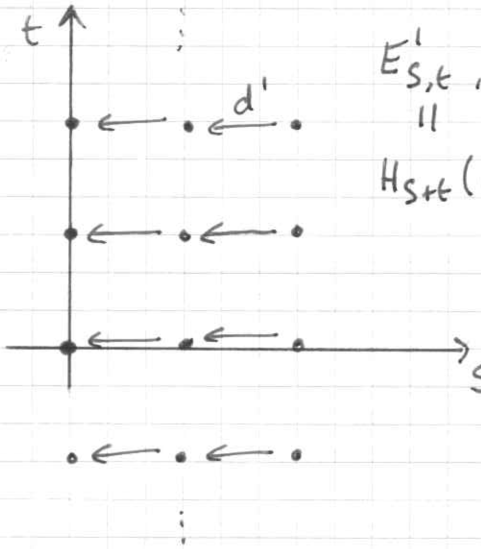
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "i_0"] & F_0 \arrow[r, hook, "i_1"] \arrow[d] & F_1 \arrow[r, hook, "i_2"] \arrow[d] & F_2 = D \arrow[d] \\ & E^0_0 & E^0_1 & E^0_2 \end{tikzcd}$$

und Quotienten $E^0_j = \operatorname{coker}(F_{j-1} \xrightarrow{i_j} F_j)$.

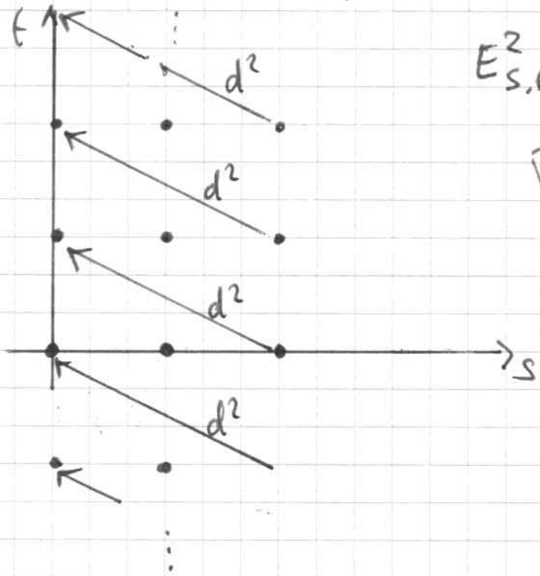
Wählen wir Spaltungen, so erhalten wir wie in 4.1:

$$\begin{tikzcd} D_n \arrow[d, "d"'] & = & E^0_{0,n} \arrow[d, "d^0"'] & \oplus & E^0_{1,n-1} \arrow[d, "d^0"] \arrow[dll, "d^1"'] & \oplus & E^0_{2,n-2} \arrow[d, "d^0"] \arrow[dll, dashed, "d^1"'] \arrow[dllll, dashed, "d^2"'] \\ D_{n-1} & = & E^0_{0,n-1} & \oplus & E^0_{1,n-2} & \oplus & E^0_{2,n-3} \end{tikzcd}
\qquad d = \begin{pmatrix} d^0 & d^1 & d^2 \\ 0 & d^0 & d^1 \\ 0 & 0 & d^0 \end{pmatrix}$$

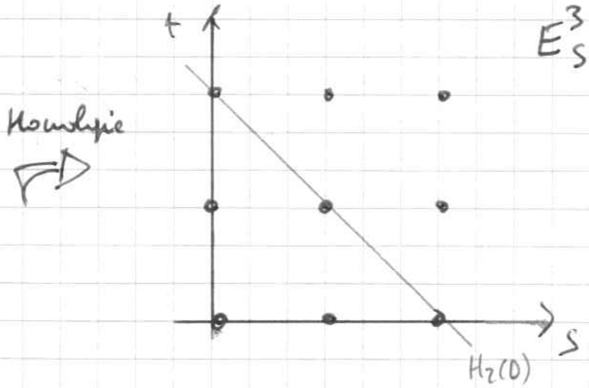
(Komische Notation: $E^0_{i,m} = (E^0_i)_{m+i}$ (Gruppe vom Grad $m+i$))



$E^1_{s,t}, d^1$
$\quad \|$
$H_{s+t}(E^0_s, d^0)$



$E^2_{s,t}, d^2$



$E^3_{s,t}, d^3 = 0$

$(d^n = 0 \ \forall n \geq 3)$

$\Rightarrow E^3_{s,t} = E^\infty_{s,t}$.

Nun gilt $H_n(D.) \cong E^\infty_{0,n} \oplus E^\infty_{1,n-1} \oplus E^\infty_{2,n-2}$ ✡

Falls wir nicht über einem Körper arbeiten, so entsteht die Spektralsequenz analog. Am Ende haben wir aber statt ✡ nun

$$\operatorname{Bild}(H_{s+t}(F_s) \to H_{s+t}(D)) \Big/ \operatorname{Bild}(H_{s+t}(F_{s-1}) \to H_{s+t}(D)) \cong E^\infty_{s,t}.$$

Nehmen wir nun $0 \to F_0 \hookrightarrow F_1 \hookrightarrow \dots \hookrightarrow F_m = D$

So erhalten wir eine Spektralsequenz, mit $E^m_{s,t} = E^\infty_{s,t}$.

<u>4.3 Definition</u>: Eine <u>Spektralsequenz</u> (SpS) ist eine Folge $\{(E^r, d^r)\}_{r \geq 1}$ von Paaren wobei

- $E^r = \{E^r_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ ist eine Familie von $\mathbb{Z}$-Graduierten Ab. Gr. E^r_s
- $d^r = \{d^r : E^r_s \to E^r_{s-r}\}_{s \in \mathbb{Z}}$ ist eine Familie von Homomorphismen von graduierten Gruppen (von Grad ± 1), so dass

(a) $d^r \circ d^r : E^r_s \to E^r_{s-2r}$ ist 0

(b) $$E^{r+1}_s = H_s(E^r_\bullet, d^r) = \frac{\ker(E^r_s \xrightarrow{d^r} E^r_{s-r})}{\operatorname{Im}(E^r_{s+r} \xrightarrow{d^r} E^r_s)}$$

Wir nennen E^r den <u>E^r-Term</u> oder r. Seite der Spektralsequenz, und d^r das <u>d^r-Differential</u>.

Falls ein $n \geq 1$ existiert, mit $d^r = 0 \ \forall\, r \geq n$, so sagen wir, dass (E^r, d^r) am E^n-Term <u>kollabiert</u> (dann gilt $E^m = E^n \ \forall\, m \geq n$).

<u>4.4 Bemerkung</u> (a) (E^r, d^r) definiert also E^{r+1} (wir haben oben $E^{r+1}_s =$ und nicht $\cong$), aber bestimmt nicht d^{r+1}!

(b) Die Sp.S aus 4.1, 4.2 kollabieren am E^2-, bzw. E^3-Term.

(c) Jedes E^r_s ist eine graduierte Gruppe, aber wir haben den <u>internen Grad</u> nicht notiert. Für die Serre-Sp.S notiert man z.B. $E^r_{s,t} = (E^r_s)_{s+t}$ (unwichtig).

Wichtig: s ist der <u>Filtrierungsindex</u>, und in E^r interagieren via d^r Gruppen mit Filtrierungsindexdifferenz r.

(d) Wie in Beispiel 4.2 wird jedes E^r auf eine Seite dargestellt, mit d^r-Pfeile. Homologie = Seite umdrehen.

Motto: Sp.S ein Buch mit ∞-vielen Seiten; die Antwort steht auf der letzte! Nun definieren wir diese letzte Seite (E^∞).

4.5 Definition Sei $(E^r, d^r)_r$ ein SpS. Wir definiere durch Induk. auf r eine Kette von Inklusionen

$$0 = B^1_s \subset B^2_s \subset \cdots \subset B^r_s \subset \cdots \subset Z^r_s \subset \cdots \; Z^2_s \subset Z^1_s = E^1_s$$

mit der Eigenschaft $E^r_s = Z^r/B^r_s$ (als Unterkoliente von E^1_s) für alle $1 \leq r < \infty$. Für $r = 1$ sind $B^1_s = 0$ und $Z^1_s = E^1_s$.
Sei also angenommen, wir haben $r \geq 1$ und

$$B^1_s \subset \cdots \subset B^r_s \subset Z^r_s \subset \cdots \subset Z^1_s$$

bereits definiert, mit einer kurze Exakt Folge $0 \to B^r_s \to Z^r_s \xrightarrow{\pi} E^r_s \to 0$.
Sei $Z = \mathrm{Ker}(d^r : E^r_s \to E^r_{s-r})$, $B = \mathrm{Im}(d^r : E^r_{s+r} \to E^r_s)$, und setze $Z^{r+1}_s = \pi^{-1}(Z)$, $B^{r+1}_s = \pi^{-1}(B)$
Dann gilt $B^r_s \subset B^{r+1}_s \subset Z^{r+1}_s \subset Z^r_s$; außerdem induziert π Gleichheiten $Z = Z^{r+1}_s/B^r_s$ und $B = B^{r+1}_s/B^r_s$, also

$$E^{r+1}_s = Z/B = Z^{r+1}_s/B^{r+1}_s .$$

Setze $B^\infty_s = \bigcup_{r\geq 1} B^r_s$, $Z^\infty_s = \bigcap_{r \geq 1} Z^r_s$, so dass

$$0 = B^1_s \subset B^2_s \subset \cdots \subset B^r_s \subset \cdots \; B^\infty_s \subset Z^\infty_s \cdots \subset Z^r_s \subset \cdots \subset Z^2_s \subset Z^1_s .$$

Wir setzen $E^\infty_s := Z^\infty_s / B^\infty_s$ und nenne $(E^\infty_s)_s$ den E^∞-Term und Limitterm der Sp.S.

4.6 Bemerkung: Wenn (E^r, d^r) im E^n-Term kollabiert, so gilt per Definition $B^m_s = B^n_s$ und $Z^m_s = Z^n_s$ $\forall\, m \geq n$, und es folgt $E^\infty_s = E^n_s$.
Ebenso: wenn für $E^n_{s,t}$ gilt: $\forall\, m \geq n$,

$$E^m_{s+m,?} \underset{0}{\overset{d^m}{\underset{\shortparallel}{\longrightarrow}}} E^m_{s,t} \underset{0}{\overset{d^m}{\underset{\shortparallel}{\longrightarrow}}} E^m_{s-m,?}$$

so folgt $E^\infty_{s,t} = E^n_{s,t}$.

Nun sehen wir die allgemeinste Weise, wie eine Sp.S entsteht.

<u>4.7 Definition</u>: Ein entrolltes exaktes Paar (Unrolled exact couple UEC) ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "i"] & A_{s-1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & A_s \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & A_{s+1} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & \cdots \\
\cdots & E_{s-1} \arrow[ul, "k"] & E_s \arrow[ul, "k"] & E_{s+1} \arrow[ul, "k"] & \cdots \arrow[ul, "k"]
\end{tikzcd}$$

wobei $s \in \mathbb{Z}$, A_s und E_s sind graduierte Gruppen (interner Grad nicht notiert), i, j, k sind Homomorphismen von graduierten Gruppen, wobei $\text{Grad}(i, j, k) = (0, 0, \pm 1)$ oder $(0, \pm 1, 0)$, und jedes Dreieck ist <u>exakt</u>.

<u>4.8 Beispiel</u>: Sei $\cdots \subset F_{s-1} \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \cdots$ ein durch $s \in \mathbb{Z}$ indiziertes Diagramm von Inklusionen von Ketten Komplexen. Dann haben wir für alle s eine kurze exakte Folge $0 \to F_{s-1} \xrightarrow{i} F_s \xrightarrow{j} F_s/F_{s-1} \to 0$ mit assoziierter Homologie

$$\begin{tikzcd}
A_{s-1} = H_* F_{s-1} \arrow[r, "i"] & H_* F_s = A_s \arrow[d, "j"] \\
& H_*(F_s/F_{s-1}) = E_s \arrow[ul, "k"]
\end{tikzcd}$$

$(K = \partial$ mit Grad $-1)$

Setzt man diese Dreiecke nacheinander, erhält man einen UEC (Vergleiche mit Beispiel 4.2, wo $F_s = 0$ für $s < 0$ und $F_s = D$ für $s \geq 2$).

<u>4.9 Definition</u> Der UEC

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_* F_{s-1} \arrow[r] \arrow[d] & H_* F_s \arrow[r] \arrow[d] & H_* F_{s+1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots & H_* F_{s-1}/F_{s-2} \arrow[ul] & H_* F_s/F_{s-1} \arrow[ul] & H_* F_{s+1}/F_s \arrow[ul] & \cdots \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

aus 4.8 ist der UEC, der zur Filtrierung $\cdots \subset F_{s-1} \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \cdots$ assoziiert ist.

Nun zeigen wir: aus jedem UEC entsteht eine SpS.

<u>4.10 Definition</u> Sei ein UEC wie in 4.7 gegeben. Für $s \in \mathbb{Z}$ und $r \geq 1$ setze $B^r_s \subset Z^r_s \subset E_s$ definiert durch

$B^r_s = j(\text{Ker}(i^{r-1}: A_s \to A_{s+r-1}))$ und $Z^r_s = k^{-1}(\text{Im}(i^{r-1}: A_{s-r} \to A_{s-1}))$.

Dann haben wir Inklusionen

$$0 = B_s^1 \subset B_s^2 \subset \dots \subset B_s^r \subset \dots \subset Z_s^r \subset \dots \subset Z_s^2 \subset Z_s^1 = E_s$$

Definiere $E_s^r := Z_s^r / B_s^r$ und

$$d^r : E_s^r \to E_{s-r}^r , \quad [z] \mapsto [jy]$$

wobei $y \in A_{s-r}$ eine Klasse ist, mit $i^{r-1}(y) = k(z)$.

$$\begin{tikzcd}
A_{s-r} \arrow[r, "i^{r-1}"] \arrow[d, "j"] & A_{s-1} \arrow[r] & A_s \arrow[d] \\
E_{s-r} & & E_s \arrow[ul, "k"]
\end{tikzcd}$$

[d^r ist wohldefiniert: $[z] = [z'] \Rightarrow z - z' \in B_s^r \subset \operatorname{Im} j$ also $k(z) = k(z')$ dank Exaktheit; Falls $y' \in A_{s-r}$ mit $i^{r-1}(y') = k(z)$, dann gilt $y - y' \in \ker i^{r-1}$, also $jy - jy' \in B_{s-r}^r$ und $[jy] = [jy']$]

Offensichtlich ist d_r ein Homomorphismus. Somit haben wir eine Folge $(E^r, d^r)_{r \geq 1}$ konstruiert.

<u>4.11 Satz</u>: Die Folge $(E^r, d^r)_{r \geq 1}$ aus 4.10 ist eine Sp. S mit $E_s^1 = E_s$.

<u>Beweis</u>: $d^r \circ d^r = 0$, da es hauptsächlich „$j(i^{r-1})^{-1} k j (i^{r-1})^{-1} k$“ ist, und $kj = 0$ dank Exaktheit. Wir zeigen

(a) $\ker(d^r : E_s^r \to E_{s-r}^r) = Z_s^{r+1} / B_s^r$

Beweis: betrachte $\phi : Z_s^{r+1} \hookrightarrow Z_s^2 \to E_s^r = Z_s^r / B_s^r$.

Zu zeigen: Bild $\phi = \ker(d^r : E_s^r \to E_{s-r}^r)$, da offensichtlich $B_s^r = \ker \phi$.

„$\supset$“: Sei $z \in Z_s^r$ mit $[z] \in \ker d^r$. Sei $y \in A_{s-r}$ mit $i^{r-1}(y) = kz$; da $d^r[z] = [jy] = 0 \Rightarrow jy \in B_{s-r}^r$. Wir haben also $jy = ja$ mit $a \in \ker(i^{r-1})$ und $j(y-a) = 0$, $i^{r-1}(y-a) = kz$. Aber $y - a \in \text{Bild}(i)$, also $kz \in \text{Bild}(i^r)$ und $z \in Z_s^{r+1}$.

„$\subset$“: ist klar wegen Exaktheit!

$$\begin{tikzcd}
A_{s-r-1} \arrow[r, "i"] & A_{s-r} \arrow[r, "i^{r-1}"] \arrow[d, "j"] & A_{s-1} \arrow[r] & A_s \arrow[d, "j"] \\
& E_{s-r} & & E_s \arrow[ul, "k"]
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ (a) ist somit bewiesen.

(b) $\text{Bild}(d^r : E_{s+r}^r \to E_s^r) = B_s^{r+1} / B_s^r$: Analog!