Die Serre-Spektral-sequenz ist die Spektral-Sequenz, die die vertikale Filtrierung von (D, d^h, d^v) entspricht.
Die horizontale Filtrierung liefert:

<u>5.10 Lemma</u>: Die Inklusion der 0-te Zeile in D induziert einen Isomorphismus

$$H_p(E, A) \xrightarrow{\cong} H_p(\mathrm{Tot}.\, D).$$

<u>Beweis</u>: Wir berechnen erst $H_p(D_{*,q}, d^h)$. Sei also q fixiert, und wir lassen p variieren. Betrachte den Pull-Back Diagramm

$$\begin{tikzcd} X_q \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & E^{\Delta^q} \arrow[d, "p^{\Delta^q}"] \\ B \arrow[r, hook, "c"] & B^{\Delta^q} \end{tikzcd}$$

Hier ist c die Inklusion als konstante Abbildungen.

Gegeben $(\sigma, \tau) \in \mathrm{Sing}_{p,q}(\mathcal{E})$, so kommutiert:

$$\begin{tikzcd} \Delta^p \arrow[r, "\tilde{\sigma}"] \arrow[d, "\tau"] & E^{\Delta^q} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B^{\Delta^q} \end{tikzcd}$$

(das ist genau (5.8)), also entspricht (σ, τ) genau eine Abbildung $\Delta^p \to X_q$.
Das beweist, dass wir also einen kan. Isomorphismus

$$(D_{*,q}, d^h) \cong (\underset{\uparrow}{S_*}(X_q; A), d) \quad \text{haben.}$$

$\uparrow$ singulären Kx von X_q.

Andererseits ist $c: B \to B^{\Delta^q}$ eine Homotopie Äquivalenz, so dass wir eine gewöhnliche schwache Homotopie-Äquivalenz

$$X_q \xrightarrow{\simeq} E^{\Delta^q} \xleftarrow{\simeq} E$$

haben, die also einen Iso $H_p(E; A) \cong H_p(X_q; A) = H_p(D_{*,q}, d^h)$ bestimmt. Alle Seiten $\delta_i : \Delta^{q-1} \to \Delta^q$ sind Homotop und induzieren homotope Abbildungen $X_q \xrightarrow{d_i} X_{q-1}$, also gleiche Homomorphismen $H_p(X_q; A) \to H_p(X_{q-1}; A)$.
Insbesondere ist $\Sigma(-1)^i d_{i\,*} : H_p(X_q; A) \to H_p(X_{q-1}; A)$ null wenn q ungerade ist, und ein Iso wenn q gerade ist.
Das gleiche gilt also für $d^v_q : H_p(E; A) \to H_p(E; A)$

Daraus folgt also:
$$H_q(H_p(D, d^h), d^v) = \begin{cases} H_p(E, A) & q=0 \\ 0 & q>0. \end{cases}$$
Die Spektralsequenz ${}^hE^2_{s,t} \Rightarrow H_{s+t}(\mathrm{Tot}\, D)$ kollabiert im E^2-Term. Starke Konvergenz impliziert das Lemma. #

Nun möchten wir die vertikale Filtrierung betrachten, und berechnen:

<u>5.11 Lemma:</u> Es existiert ein kanonischer (eig. auch natürlicher) Isomorphismus
$$H_p(H_q(D, d^v), d^h) \cong H_p(B, \mathcal{H}_q(F; A)),$$
wobei $\mathcal{H}_q(F, A)$ das lokale System auf B aus 5.7 ist.

<u>Beweis:</u> Sei p fixiert, und betrachte $(D_{p,*}, d^v)$.

Sei $\tau : \Delta^p \to B$ gegeben.

Ein Element $(\sigma, \tau) \in \mathrm{Sing}_{p,q}(P)$ entspricht also
$$\begin{array}{ccc} \Delta^p \times \Delta^q & \xrightarrow{\sigma} & E \\ \downarrow & & \downarrow P \\ \Delta^p & \xrightarrow{\tau} & B \end{array} \quad , \text{ oder } \quad \begin{array}{ccc} \Delta^q & \xrightarrow{\tilde{\sigma}} & E^{\Delta^p} \\ \downarrow & & \downarrow P^{\Delta^p} \\ \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & B^{\Delta^p} \end{array} \quad , \text{ kommutativ.}$$
In anderen Worten entspricht (σ, τ) einer Abbildung von Δ^q in F_τ, wobei F_τ der Pull back in
$$\begin{array}{ccc} F_\tau & \longrightarrow & E^{\Delta^p} \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow P^{\Delta^p} \\ \{0\} & \xrightarrow{\tilde{\tau}} & B^{\Delta^p} \end{array}$$
Also haben wir eine kanonische Bijektion $\mathrm{Sing}_{p,q}(P) \to \coprod_{\tau \in \mathrm{Sing}_p(B)} \mathrm{Sing}_q(F_\tau)$ und einen Isomorphismus
$$D_{p,q} = S_{p,q}(P; A) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\tau \in \mathrm{Sing}_p(B)} S_q(F_\tau; A)$$
also $(D_{p,*}, d^v) \cong \left(\bigoplus_{\tau \in \mathrm{Sing}_p(B)} S_*(F_\tau; A) \right)$ und
$$H_q(D_{p,*}, d^v) \cong \bigoplus_{\tau \in \mathrm{Sing}_p(B)} H_q(F_\tau; A) \qquad (\star)$$

Nun bleibt d^h zu identifizieren: Sei $\delta_i : \Delta^{p-1} \to \Delta^p$ eine Seite, $0 \le i \le p$. Dann haben wir ein kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} F_\tau \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{\delta}_i"] & E^{\Delta^p} \arrow[r, "p^{\Delta^p}"] \arrow[d, "r"] & B^{\Delta^p} \arrow[d, "r"] \\ F_{\tau\circ\delta_i} \arrow[r] & E^{\Delta^{p-1}} \arrow[r, "p^{\Delta^{p-1}}"] & B^{\Delta^{p-1}} \end{tikzcd}$$

mit F_τ die Faser von p^{Δ^p} über τ, $F_{\tau\circ\delta_i}$ die Faser über $\tau\circ\delta_i$, $r(f) = f\circ\delta_i$, und $\tilde{\delta}_i$ die Einschränkung von r. Die r's sind Homotopie-Äquivalenzen und $\tilde{\delta}_i$ eine schwache Homotopie-Äquivalenz. Also unter den Iso (✡) ist d^h als

$$\begin{tikzcd} H_q(D_{p,*}, d^v) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "d^h"] & \bigoplus_{\tau\in \mathrm{Sing}_p B} H_q(F_\tau ; A) \arrow[d, "\sum_{i=0}^{p} (-1)^i \tilde{\delta}_{i*}"] \\ H_q(D_{p-1,*}, d^v) \arrow[r, phantom, "\cong"] & \bigoplus_{\tau'\in \mathrm{Sing}_{p-1} B} H_q(F_{\tau'} ; A) \end{tikzcd}$$

gegeben.

Wir definieren einen Isomorphismus von Kettenkomplexen zwischen den Kettenkomplex rechts und $S_*(B, \mathcal{H}_q(F;A))$. Dazu genügt es, Isomorphismen ($\tau_0 = \tau(e_0)$ wie in 5.1)

$$H_q(F_\tau : A) \xrightarrow{\phi_\tau} H_q(F_{\tau_0} : A)$$

zu definieren, die verträglich mit den Rändern sind.
Wir sehen $\phi_\tau = f_{\tau *}$ mit $f_\tau : F_\tau \to F_{\tau_0}$ in

$$\begin{tikzcd} F_\tau \arrow[r] \arrow[d, "f_\tau"] & E^{\Delta^p} \arrow[r, "p^{\Delta^p}"] \arrow[d, "ev_0"] & B^{\Delta^p} \arrow[d, "ev_0"] \\ F_{\tau_0} \arrow[r] & E \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

Hier bezeichnet ev_0 die Evaluation in $e_0 \in \Delta^p$, und die Zeilen sind Serre Faserungen mit F_τ die Faser über $\tau \in B^{\Delta^p}$, F_{τ_0} die Faser über $\tau_0 = \tau(e_0)$. Die ev_0 sind Homotopie-Äquivalenzen, und f_τ ist also eine schw. Homotopie-Äquivalenz. Also ist ϕ_τ in der Tat ein Iso.

Nun die Verträglichkeit mit den Rändern:

Wir haben Diagramme

$$\begin{tikzcd}
F_\tau \arrow[r, "\Phi_\tau"] \arrow[d, "\tilde\delta_0"'] & F_{\tau_0} \arrow[dr, "f_0^{\tau_{01}}"] & \\
& & E_{\tau_{01}} \\
F_{\tau\delta_0} \arrow[r, "\Phi_{\tau\delta_0}"] & F_{\tau_1} \arrow[ur, "f_1^{\tau_{01}}"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{und} \quad
\begin{tikzcd}
F_\tau \arrow[r, "\Phi_\tau"] \arrow[d, "\tilde\delta_i"'] & F_{\tau_0} \arrow[d, "id"] \\
F_{\tau\delta_i} \arrow[r, "\Phi_{\tau\delta_i}"] & F_{\tau_0}
\end{tikzcd}
\quad (1 \le i \le p)$$

Der linke Diagramm kommutiert offensichtlich bis auf Homotopie
($F_\tau = \{ \sigma : \Delta^p \to E \mid p\sigma = \tau \}$,
$E_{\tau_{0,1}} = \{ (x, e) \in \Delta^1 \times E \mid p(e) = \tau_{0,1}(x) \}$
und $H : F_\tau \times \Delta^1 \to E_{\tau,0}$, $H(\sigma, x) = \{ e_{0,1}(x), \sigma(e_{0,1}(x)) \}$
ist solche eine Homotopie), und der rechte Diagramm kommutiert strikt (weil

$$\begin{tikzcd}
& \Delta^0 \arrow[dl, "e_0"'] \arrow[dr, "e_0"] & \\
\Delta^{p-1} \arrow[rr, "\delta_i"] & & \Delta^p
\end{tikzcd}$$

kommutiert für $1 \le i \le p$).

Es folgt also, dass

$$\begin{tikzcd}
H_q(F_\tau ; A) \arrow[r, "\Phi_\tau"] \arrow[d, "\tilde\delta_{i*}"'] & H_q(F_{\tau_0} ; A) \arrow[d, "d_i"] \\
H_q(F_{\tau\delta_i} ; A) \arrow[r, "\Phi_{\tau\delta_i}"] & H_q(F_{(\tau\delta_i)_0} ; A)
\end{tikzcd}$$

(mit d_i wie in 5.1+5.7) für $0 \le i \le p$ kommutiert.
Wir haben also ein (natürlichen) Isomorphismus von Kettenkomplexen
$$\Phi : (H_q(D, d^v), d^h) \longrightarrow (S_*(B, \mathcal{H}_q(F;A)), d)$$
definiert, und es induziert für alle $p \geq 0$ einen Iso
$$H_p(H_q(D, d^v), d^h) \cong H_p(B, \mathcal{H}_q(F;A)) . \quad \#$$

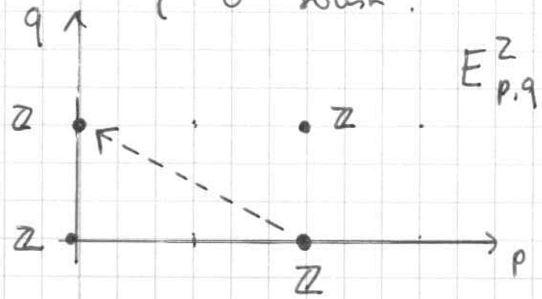
Zusammenfassung:

5.12 Theorem: Sei $E \xrightarrow{p} B$ eine Serre Faserung, und sei $\mathcal{H}_*(F;A)$ das lokale Koeffizientensystem auf B aus 5.7. Dann haben wir eine (oben definierte) Spektral Sequenz (1. Quadrant, homologischen Typs, stark-konvergierend)
$$E^2_{p,q} = H_p(B, \mathcal{H}_q(F;A)) \Longrightarrow H_{p+q}(E;A) .$$
Wir nennen sie die Serre-Dress Spektral Seq. von $p : E \to B$.

5.13 Beispiel: hier unser erstes Babybeispiel. Wir betrachten die Faserung $S^1 \to S^3 \xrightarrow{h} S^2$ (Hopf) und möchten damit $H_*(S^3;\mathbb{Z})$ berechnen! Die Sp. Seq hat

$$E^2_{p,q} = H_p(S^2; H_q(S^1)) = \begin{cases} H_p(S^2;\mathbb{Z}) & (q=0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{Z} & (p,q) = (0,0),(0,1),(2,0),(2,1) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$



Das einzige möglicherweise nicht null d^2 ist

$$d^2 : \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{E^2_{2,0}}} \to \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cong}{E^2_{0,1}}}$$

Die Möglichkeiten die wir haben sind:

(a) $d^2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ist ein Iso. Dann gilt $E^3_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p,q) = (0,0),(2,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

Dann folgt $E^\infty_{**} = E^3_{**}$ und wir erhalten Isomorphismen $H_n(S^3) \overset{(*)}{=} \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (ok!)

(b) $d^2 = 0$. Dann folgt $E^\infty_{**} = E^2_{**}$ und wir hätten $H_n(S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Falsch!)

(c) $d^2 : \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot m \neq 0} \mathbb{Z}$; dann hätten wir

$$E^\infty_{p,q} = E^3_{p,q} \overset{(*)}{=} \begin{cases} \mathbb{Z} & (p,q) = (0,0),\ (2,1) \\ \mathbb{Z}/m & (p,q) = (0,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und wir hätten $H_n(S^3) \overset{(*)}{=} \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0,3 \\ \mathbb{Z}/m & n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ (Falsch für $m \neq \pm 1$!)

$(*)$: $H_n(E)$ hat eine Filtrierung $0 \subset (FH_0)_n \subset (FH_1)_n \subset \cdots \subset (FH_n)_n = H_n(E)$ mit $\left(FH_p / FH_{p-1}\right)_n = E^\infty_{p,n-p}$

in (a), $H_3(S^3)$:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (FH_0)_3 & \to & (FH_1)_3 & \to & (FH_2)_3 & \to & H_3(S^3) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & (FH_0)_3/0 & & (FH_1/FH_0)_3 & & (FH_2/FH_1)_3 & & H_3(S^3)/(FH_2)_3 \\ & & \cong & & \cong & & \cong & & \cong \\ & & E^\infty_{0,3} & & E^\infty_{1,2} & & E^\infty_{2,1} & & E^\infty_{3,0} \\ & & \| & & \| & & \| & & \| \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\Leftarrow \quad (FH_p)_3 = \begin{cases} 0 & p = 0,1,2 \\ \mathbb{Z} & p = 3. \end{cases}$$