Beweis: Wähle $F_0 \overset{F}{\simeq} F_1$ rel B. Da F_0 und F_1 zellulär sind ist auch die Einschränkung von F auf $X \times \partial I \cup B \times I$ zellulär. Verwende nun 3.5 für F und das Paar $(X \times I, X \times \partial I \cup B \times I)$. #

3.7 Satz: Sei $f: A \to X$ eine n-Äquivalenz, und Y ein CW-Komplex. Dann ist die Abbildung

$$f_*: [Y, A] \to [Y, X]$$

(a) Surjektiv falls $\dim(Y) \leq n$

(b) Injektiv falls $\dim(Y) < n$

Sind f und Y punktiert so gilt die gleiche Aussage für $f_*: [Y, A]_* \to [Y, X]_*$.

Beweis: Mit Hilfe des Zylinders können wir annehmen, dass f eine Inklusion ist. Dann ist (X, A) ein n-zusammenhängendes Paar. Sei $(Y, B) = (Y, \emptyset)$, und sei $g: Y \to X$ gegeben. Sei $\dim(Y) \leq n$; dann gibt uns 3.3 eine Homotopie $g \simeq h$ mit $h(Y) \subset A$. Also ist f_* surjektiv. Für die Injektivität betrachten das Paar $(Y \times I, Y \times \partial I)$. Damit ist der unpunktierte Fall bewiesen. Im punktierten Fall: Für die Surjektivität fängt man mit $(Y, B) = (Y, *)$. Für die Injektivität mit $(Y \times I, Y \times \partial I \cup * \times I)$. #

3.8 Definition: Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt eine schwache Homotopie-Äquivalenz, wenn f eine n-Äquivalenz für alle $n \geq 0$ ist.

3.9 Theorem: Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ zwischen CW-Komplexen ist genau dann eine Homotopie-Äquivalenz, wenn sie eine schwache Homotopie-Äquivalenz ist.

Beweis: Wir bemerken zuerst, dass Lemma 3.3. auch gilt in den Fall wo (X,A) ∞-zusammenhängend ist und Y ein CW ist: betrachte Ketten von Unterkomplexen (geordnet mit $\subset$), + Zorn's Lemma. Also gilt 3.7 auch im Fall, wo $n=\infty$.
Betrachte dann die Bijektionen

$$f_*: [X,X] \to [X,Y] \quad \text{und} \quad \bar{f}_*: [Y,X] \to [Y,Y].$$

Wähle $g: Y \to X$ mit $\bar{f}_*[g] = [id_Y]$. Dann gilt $[fg] = [f]\circ[g] = \bar{f}_*[g] = [id_Y]$. Ebenso $f_*[gf] = [fgf] = [f] = f_*[id_X]$ und f_* injektiv $\Rightarrow$ $[gf] = [id_X]$.
Also ist g ein Homotopie-Inverse zu f. #.
(3.9 wird oft das (1.) Theorem von J.H.C Whitehead genannt).

3.10 Bemerkungen: (a) Als Korollar erhalten wir: ein CW-Komplex X ist genau dann zusammenziehbar, wenn $\pi_n(X) = 0$ für alle $n \geq 0$.
(b) Wir werden Beispiele von CW-Komplexe X, Y mit $\pi_0(X) = \pi_0(Y) = 0$ und $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$ $\forall n$, aber $X \simeq Y$. Die Tat, dass $\pi_n(X) \xrightarrow{\cong} \pi_n(Y)$ $\forall n \geq 0$ durch eine Abbildung $f: X \to Y$ induziert ist, ist 3.10 notwendig.

Wir können den Einhängungssatz etwas verallgemeinern:

3.11 Satz: Sei X ein CW-Komplex, Y ein n-zusammenhängender CW-K., beide punktiert. Dann ist

$$\Sigma_*: [X,Y]_* \to [\Sigma X, \Sigma Y]_*$$

bijektiv falls $\dim(X) \leq 2n$, und surjektiv falls $\dim(X) \leq 2n+1$.

Beweis: Wir haben ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} {[X,Y]_*} \arrow[rr, "\Sigma_*"] \arrow[dr, "\sigma_*"'] & & {[\Sigma X, \Sigma Y]_*} \\ & {[X, \Omega\Sigma Y]_*} \arrow[ur, "\cong"', "a"] & \end{tikzcd}$$

mit $\sigma: Y \to \Omega\Sigma Y$ adjungiert zu $id_{\Sigma Y}$, und a der Adjunktionsisomorphismus.
Nehmen wir $X = S^m$, so haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_m(Y) \arrow[r, "\Sigma_*"] \arrow[dr, "\sigma_*"'] & \pi_{m+1}(\Sigma Y) \arrow[d, "\cong"] \\ & \pi_m(\Omega\Sigma Y) \end{tikzcd}$$

Dank Freudenthal ist Σ_* hier ein Iso für $0 \leq m \leq 2n$, und surjektiv für $m = 2n+1$. Daraus folgt, dass $\sigma: Y \to \Omega\Sigma Y$ eine $2n+1$ Äquivalenz ist. Also folgt 3.11 aus 3.7 (punktierter Fall). #

<u>3.12 Korollar</u>: Seien X und Y punkt. CW-Komplexe. Dann ist

$$\Sigma_* : [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]_* \to [\Sigma^{k+1} X, \Sigma^{k+1} Y]$$

bijektiv für $k \geq \dim(X) + 2$

<u>Beweis</u>: ΣY ist wegzusammenhängend und $\Sigma^2 Y$ ist (dank van-Kampen) 1-zusammenhängend. Dank Freudenthal 1.57 ist $\Sigma^k Y$ also $k-1$-zusammenhängend.

Außerdem gilt $\dim(\Sigma^k X) = \dim(X) + k$. Aus 3.11 folgt dass Σ_* in 3.12 bijektiv ist, wenn $\dim(X) + k \leq 2(k-1)$, also $\dim(X) \leq k-2$. #

<u>3.13 Theorem (CW-Approximation)</u> Sei $f: A \to Y$ eine k-zusammenhängende Abbildung, $k \geq -1$ ($k=-1$: keine Aussage). Sei $k < n \leq \infty$. Dann existiert ein relativer CW-Komplex (X, A) mit Zellenmenge K so dass $k < \dim(e) \leq n$ $\forall e \in K$, und eine Erweiterung $F: X \to Y$ von f, die n-zusammenhängend ist. Falls A ein relativer CW-Komplex ist, so kann X so gewählt werden, dass (X, A) ein relatives <u>CW-Paar</u> ist.

<u>Beweis</u>: Es genügt, das Theorem im Fall $n = k+1$ zu beweisen; nach Induktion auf $n-k$ erhält man dann den allgemeinen Fall:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[drr, "f"'] & X^{(k+1)} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f_1"] & X^{(k+2)} \arrow[r, hook] \arrow[d, "f_2"] & \cdots & X^{(n)} \arrow[dll, "F"] \\ & & Y & & \end{tikzcd}$$

Um f_2 zu gewinnen, verwende das Theorem auf $f_1: X^{(k+1)} \to Y$, etc.... Da $X^{(k+1)}$ ein CW relativ A, kann man $X^{(k+2)}$ so wählen, dass $X^{(k+2)}$ ein CW relativ A ist.

Bemerke auch: ist $X^{(k+1)}$ durch Ankleben von $(k+1)$-Zellen auf A erhalten, und ist $F : X^{(k+1)} \to Y$ eine Erweiterung von f, so ist F auch (mindestens) k-zusammenhängend:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \\ X^{(k+1)} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

f und i sind beide k-zusammenhängend (f durch Voraussetzung, i dank 3.4).

Fall $k = -1$, $n = 0$: Falls $f_* : \pi_0 A \to \pi_0 Y$ surjektiv, nehme $X^{(0)} = A$, $F = f$. Ansonsten, wähle $C \subset Y$ mit C eine Familie von Repräsentanten von $\pi_0 Y \setminus f_*(\pi_0 A)$. Sei $X^{(0)} = A \amalg \coprod_{y \in C} D^0_y$ und $F : X^{(0)} \to Y$, $F(a) = f(a)$ für $a \in A$ und $F(D^0_y) = \{y\}$.

Fall $k = 0$, $n = 1$: Dann ist $f_* : \pi_0 A \to \pi_0 Y$ surjektiv. Für jedes $W \in \pi_0 Y$ Wegzusammenhangskomponente, sei A_W die Menge der Wegzusammenhangskomponenten V von A mit $f(V) \subset W$. $A_W \neq \emptyset$, und wähle ein $V_0 \in A_W$. Für jedes $V \in A_W$, wähle $x_V \in V$. Dann definiere

$$\begin{tikzcd} \coprod_{W \in \pi_0 Y} \coprod_{V \in A_W \setminus V_0} S^0 \arrow[r, "g_V"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & A \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\ \coprod_W \coprod_{V \neq V_0} D^1 \arrow[r] \arrow[dr, bend right, "h"'] & X' \arrow[d, "F'"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

mit $g_V(-1) = x_{V_0}$, $g_V(1) = x_V$ und $h : D^1_V \to Y$ ist ein Weg von $f(x_{V_0})$ nach $f(x_V)$.

Nun ist $F'_* : \pi_0(X') \to \pi_0(Y)$ eine Bijektion, aber $F'_* : \pi_1(X', x) \to \pi_1(Y, F'_*(x))$ ist nicht notwendigerweise surjektiv. Es genügt, ein x für jede Weg. zus. Komp. W von X' zu wählen, und eine Familie $\{(S^1, *) \xrightarrow{\lambda_i} (Y, f(x))\}_i$ zu wählen, so dass $f_*(\pi_1(X', x))$ und diese Familie $\pi_1(Y, f(x))$ erzeugen. Nehme dann $X = \bigcup_W (W, x) \vee \bigvee_j S^1$ und F durch F' und die λ_i definiert.

Fall $n \geq 1$, $k = n-1$: $f : A \to Y$ ist $(n-1)$-zusammenhängend.

Wir können f als $A \hookrightarrow Zyl(f) \twoheadrightarrow Y$ faktorisieren und annehmen, dass f eine Inklusion ist:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Zyl(f) \arrow[r] & Y \\ X^{(n)} \arrow[ur, "F"'] & & \end{tikzcd}$$

Aus Voraussetzung ist

Betrachte $\pi_n(A) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \to \pi_n(Y,A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} \pi_{n-1}(Y) \to 0$.

Sei $a \in A$ und $\langle \chi_e : (D^n, S^{n-1}, *) \to (Y, A, a) \mid e \in K_n \rangle$ ein Familie von Abbildung, so dass $\langle [\chi_e] \rangle_{e \in K}$ den $\pi_1(A,a)$-Modul $\pi_n(Y,A)$ erzeugt. Sei $\varphi_e : (S^{n-1}, *) \to (A, a)$ mit $\varphi_e = \chi_e|_{S^{n-1}}$, und definiere:

$$\begin{tikzcd} \coprod_e S^{n-1} \arrow[r, "\amalg \varphi_e"] \arrow[d, hook] & A \arrow[d, hook, "i"] \arrow[dr, bend left, "f"] & \\ \coprod_e D^n \arrow[r, "\amalg \chi'_e"] \arrow[rr, bend right, "\amalg_e \chi_e"'] & X \arrow[r, dashed, "F"] & Y \end{tikzcd}$$

Push-out Diagramm definiert X, F, i und $\amalg \chi'_e$. Da $F(\chi'_e, \varphi_e) = (\chi_e, \varphi_e)$ folgt:

Folgt: $\pi_n(X,A) \xrightarrow{F_*} \pi_n(Y,A)$ ist surjektiv. Wir wissen auch: $F : X \to Y$ ist auch $(n-1)$-zusammenhängend; wir zeigen noch, dass sie n-zus. ist:

$$\begin{tikzcd} \pi_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d, "F_*", "①"'] & \pi_n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "F_*", "②"'] & \pi_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \pi_{n-1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "F_*", "③"'] & 0 \arrow[d, "="] \\ \pi_n(A) \arrow[r] & \pi_n(Y) \arrow[r] & \pi_n(Y,A) \arrow[r] & \pi_{n-1}(A) \arrow[r] & \pi_{n-1}(Y) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

② surjektiv: 5-Lemma $\Rightarrow$ ③ ist injektiv; da es auch surjektiv ist, ist ③ bijektiv:

Ebenso, ② surjektiv $\Rightarrow$ ① surjektiv:

$\Rightarrow$ F ist n-zusammenhängend.

Falls A ein relative CW Komplex ist, so genügt es im Beweis zu sichern, dass die gewählte hebe Abbildungen die wir benutzen, zellulär sind. Das ist natürlich dank zellulärer Approximation möglich.