

Beweis: Wähle $F_0 \xrightarrow{F} F_1$ rel B . Da F_0 und F_1 zellulär sind ist auch die Einschränkung von F auf $X \times \partial I \cup B \times I$ zellulär. Verwende nun 3.5 für F und das Paar $(X \times I, X \times \partial I \cup B \times I)$. #

3.7 Satz: Sei $f: A \rightarrow X$ eine n -Äquivalenz, und Y ein CW-Komplex. Dann ist die Abbildung

$$f_*: [Y, A] \rightarrow [Y, X]$$

(a) surjektiv falls $\dim(Y) \leq n$

(b) injektiv falls $\dim(Y) < n$

Sind f und Y punktiert so gilt die gleiche Aussage für $f_*: [Y, A]_* \rightarrow [Y, X]_*$.

Beweis: Mit Hilfe des Zylinders können wir annehmen, dass f eine Inklusion ist. Dann ist (X, A) ein n -zusammenhängendes Paar. Sei $(Y, B) = (Y, \emptyset)$, und sei $g: Y \rightarrow X$ gegeben. Sei $\dim(Y) \leq n$; dann gibt uns 3.3 eine Homotopie $g \simeq h$ mit $h(Y) \subset A$. Also ist f_* surjektiv.

Für die Injektivität betrachten das Paar $(Y \times I, Y \times \partial I)$.

Damit ist der unpunktierter Fall bewiesen. Im punktierten Fall:

Für die Surjektivität fängt man mit $(Y, B) = (Y, *)$.

Für die Injektivität mit $(Y \times I, Y \times \partial I \cup * \times I)$. #

3.8 Definition: Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ heißt eine schwache Homotopie-Äquivalenz, wenn f eine n -Äquivalenz für alle $n \geq 0$ ist.

3.9 Theorem: Eine Abbildung $X \xrightarrow{f} Y$ zwischen CW-Komplexen ist genau dann eine Homotopie-Äquivalenz, wenn sie eine schwache Homotopie-Äquivalenz ist.

Beweis: Wir bemerken zuerst, dass Lemma 3.3. auch gilt in 53
 dem Fall wo (X, A) ∞ -zusammenhängend ist und Y ein
 CW ist: betrachte Ketten von Unterkomplexen (gestrichelt mit C),
 + Zorn's Lemma. Also gilt 3.7 auch im Fall, wo $n = \infty$.
 Betrachte dann die Bijektionen

$$f_+ : [X, X] \rightarrow [X, Y] \text{ und } \bar{f}_+ : [Y, X] \rightarrow [Y, Y].$$

Wähle $g : Y \rightarrow X$ mit $\bar{f}_+ [g] = [id_Y]$. Dann gilt $[fg] =$
 $[f] \circ [g] = f_+ [g] = [id_Y]$. Ebenso $f_+ [g f] = [f g f] =$
 $[f] = f_+ [id_X]$ und f_+ injektiv $\Rightarrow [g f] = [id_X]$.

Also ist g ein Homotopie-Inverse zu f . #.

(3.9 wird oft das (1.) Theorem von J.H.C Whitehead genannt).

3.10 Bemerkungen: (a) Als Korollar erhalten wir: ein CW-
 Komplex X ist genau dann zusammenziehbar, wenn $\pi_n(X)$
 $= 0$ für alle $n \geq 0$.

(b) Wir werden Beispiele von CW-Komplexen X, Y mit
 $\pi_0(X) = \pi_0(Y) = 0$ und $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y) \forall n$,
 aber $X \not\cong Y$. Die Tat, dass $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y) \forall n \geq 0$
 durch eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ induziert ist, ist 3.10
 notwendig.

Wir können den Einhängungssatz etwas verallgemeinern:

3.11 Satz: Sei X ein CW-Komplex, Y ein n -zusammenhängender
 CW-K., beide punktiert. Dann ist

$$\Sigma_* : [X, Y]_* \rightarrow [\Sigma X, \Sigma Y]_*$$

bijektiv falls $\dim(X) \leq 2n$, und surjektiv falls $\dim(X) \leq 2n+1$.

Beweis: Wir heben ein kommutatives Diagramm $[X, Y]_* \xrightarrow{\Sigma_*} [\Sigma X, \Sigma Y]_*$
 mit $\sigma : Y \rightarrow \Omega \Sigma Y$ adjungiert zu $id_{\Sigma Y}$, $\sigma_* \searrow \xrightarrow{\cong} a$
 $[X, \Omega \Sigma Y]_*$
 und a der Adjunktionsisomorphismus.

Nehmen wir $X = S^m$, so haben wir ein kommutatives Diagramm

$\Pi_m(Y) \xrightarrow{\Sigma_*} \Pi_{m+1}(\Sigma Y)$ Dank Freudenthal ist Σ_* hier
 $\sigma_* \searrow \swarrow \cong$
 $\Pi_m(\Omega \Sigma Y)$ ein Iw für $0 \leq m \leq 2n$, und
 surjektiv für $m = 2n+1$. Daraus folgt,

dass $\sigma: Y \rightarrow \Omega \Sigma Y$ eine $2n+1$ Äquivalenz ist. Also folgt 3.11
 aus 3.7 (punktierter Fall). #

3.12 Korollar: Seien X und Y punkt. CW-Komplexe. Dann ist

$$\Sigma_* : [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]_* \rightarrow [\Sigma^{k+1} X, \Sigma^{k+1} Y]$$

bijektiv für $k \geq \dim(X) + 2$

Beweis: ΣY ist wegzusammenhängend und $\Sigma^2 Y$ ist (dank
 van-Kampen) 1-zusammenhängend. Dank Freudenthal 1.57
 ist $\Sigma^k Y$ also $k-1$ -zusammenhängend.

Außerdem gilt $\dim(\Sigma^k X) = \dim(X) + k$. Aus 3.11 folgt
 dass Σ_* in 3.12 bijektiv ist, wenn $\dim(X) + k \leq 2(k-1)$,
 also $\dim(X) \leq k-2$. #

3.13 Theorem (CW-Approximation) Sei $f: A \rightarrow Y$ eine

k -zusammenhängende Abbildung, $k \geq -1$ ($k = -1$: keine Aussage).

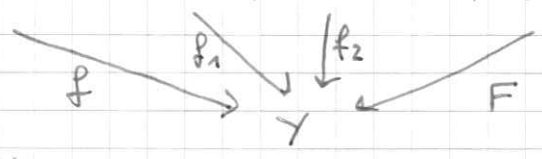
Sei $k < n \leq \infty$. Dann existiert ein relativer CW-Komplex

(X, A) mit Zellenmenge K so dass $k \leq \dim(e) \leq n \forall e \in K$,

und eine Erweiterung $F: X \rightarrow Y$ von f , die n -zusammenhängend

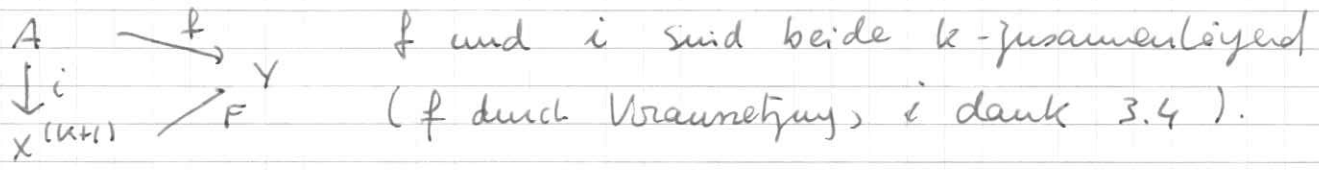
ist. Falls A ein relativer CW-Komplex ist, so kann X so gewählt
 werden, dass (X, A) ein relatives CW-Paar ist.

Beweis: Es genügt, das Theorem im Fall $n = k+1$ zu
 beweisen; nach Induktion auf $n-k$ erhält man dann
 den allgemeinen Fall: $A \hookrightarrow X^{(k+1)} \hookrightarrow X^{(k+2)} \hookrightarrow \dots; X^{(n)}$



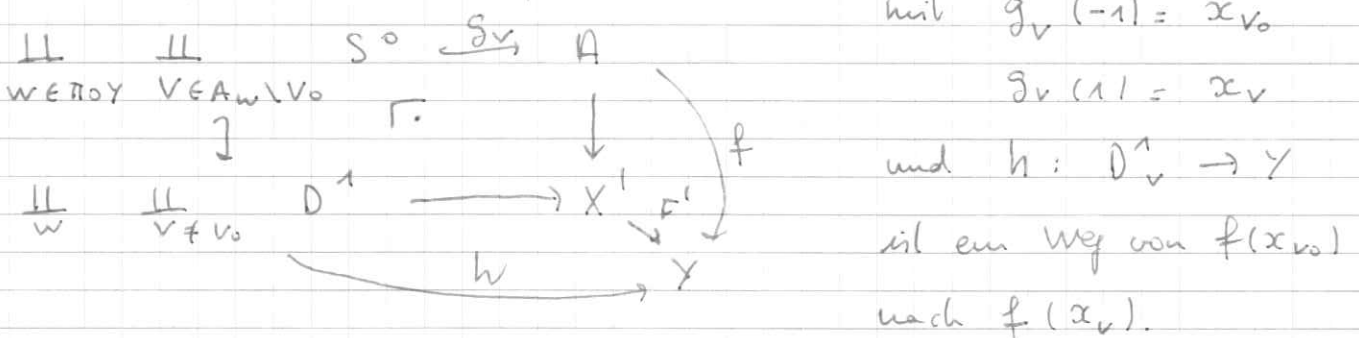
Um f_2 zu gewinnen, verwende
 das Theorem auf $f_1: X^{(k+1)} \rightarrow Y$,
 etc.... Da $X^{(k+1)}$ ein CW relativ A , kann man $X^{(k+2)}$ so
 wählen, dass $X^{(k+2)}$ ein CW relativ A ist.

Bemerkung auch: ist $X^{(k+1)}$ durch anheften von $(k+1)$ -Zellen auf A erhalten, und ist $F: X^{(k+1)} \rightarrow Y$ eine Erweiterung von f , so ist F auch (mindestens) k -zusammenhängend:



Fall $k = -1, n = 0$: Falls $f_*: \pi_0 A \rightarrow \pi_0 Y$ surjektiv, nehme $X^{(0)} = A, F = f$. Ansonsten, wähle $C \subset Y$ mit C eine Familie von Repräsentanten von $\pi_0 Y \setminus f_*(\pi_0 A)$. Sei $X^{(0)} = A \amalg \coprod_{y \in C} D_y^0$ und $F: X^{(0)} \rightarrow Y$, $F(a) = f(a)$ für $a \in A$ und $F(D_y^0) = \{y\}$.

Fall $k = 0, n = 1$: Dann ist $f_*: \pi_0 A \rightarrow \pi_0 Y$ surjektiv. Für jedes $W \in \pi_0 Y$ Wegzusammenhängungskomponente, sei A_W die Menge der Wegzusammenhängungskomponenten V von A mit $f(V) \subset W$. $A_W \neq \emptyset$, und Wähle ein $V_0 \in A_W$. Für jedes $V \in A_W$, wähle $x_V \in V$. Dann definiere



Nun ist $F'_*: \pi_0(X^1) \rightarrow \pi_0(Y)$ eine Bijektion, aber $F'_*: \pi_1(X^1, x) \rightarrow \pi_1(Y, F'_*(x))$ ist nicht notwendigerweise surjektiv. Es genügt, ein x für jede Weg.zus.komp. W von X^1 zu wählen, und eine Familie $\{(S^1, \cdot) \xrightarrow{\cong} (Y, f(x))\}_i$ zu wählen, so dass $f_*(\pi_1(X^1, x))$ und diese Familie $\pi_1(Y, f(x))$ erzeugen. Nehme dann $X = \bigcup_W (W, x) \vee \bigvee_j S^1$ und F durch F' und die \mathcal{I}_i definiert.

Fall $n > 1, k = n-1$: $f: A \rightarrow Y$ ist $(n-1)$ -zusammenhängend.

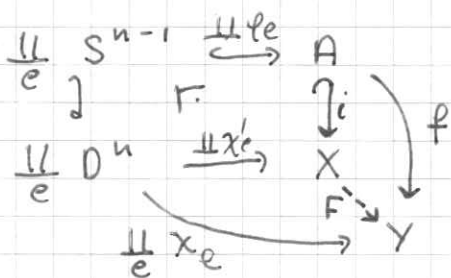
Wir können f als $A \hookrightarrow \text{Zyl}(f) \rightarrow Y$ faktorisieren und annehmen,

dass f eine Inklusion ist:
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & \text{Zyl}(f) \rightarrow Y \\ \downarrow & \nearrow F & \\ X^{(n)} & & \end{array}$$

Aus Voraussetzung ist

Behaupte $\pi_n(A) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y) \rightarrow \pi_n(Y, A) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} \pi_{n-1}(Y) \rightarrow 0$.

Sei $a \in A$ und $\langle X_e : (D^n, S^{n-1}, *) \rightarrow (Y, A, a) \mid e \in k_n \rangle$ eine Familie von Abbildung, so dass $\langle [X_e] \rangle_{e \in k}$ den $\pi_n(A, a)$ -Modul $\pi_n(Y, A)$ erzeugt. Sei $\varphi_e : (S^{n-1}, *) \rightarrow (A, a)$ mit $\varphi_e = X_e|_{S^{n-1}}$, und definiere:



Push-out Diagramm definiert X, F, i und $\mathbb{H}_e X_e$. Da $F(X_e, \varphi_e) = (X_e, \varphi_e)$ folgt:

Folgt: $\pi_n(X, A) \xrightarrow{F_*} \pi_n(Y, A)$

ist surjektiv. Wir wissen auch: $F: X \rightarrow Y$ ist auch $(n-1)$ -zusammenhängend; wir zeigen noch, dass sie n -zus. ist:

$$\begin{array}{ccccccc} \pi_n(A) & \rightarrow & \pi_n(X) & \rightarrow & \pi_n(X, A) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A) \rightarrow \pi_{n-1}(X) \rightarrow 0 \\ = \downarrow & & \textcircled{1} \downarrow F_* & & \textcircled{2} \downarrow F_* & & = \downarrow & \textcircled{3} \downarrow F_* & \downarrow = \\ \pi_n(A) & \rightarrow & \pi_n(Y) & \rightarrow & \pi_n(Y, A) & \rightarrow & \pi_{n-1}(A) & \rightarrow & \pi_{n-1}(Y) \rightarrow 0 \end{array}$$

① Surjektiv: 5-Lemma \Rightarrow ③ ist injektiv; da es auch surjektiv ist, ist ③ bijektiv:

Ebenso, ② surjektiv \Rightarrow ① surjektiv:

Falls A ein relativer CW Komplex ist, so genügt es im Beweis zu sichern, dass die gewählte Kebe Abbildungen die wir benutzen, zellulär sind. Das ist natürlich dank zellulärer Approximation möglich.

