von Wege $\omega : [0,1] \to X$, $\omega(0) = x$, $\omega(1) = y$, wobei wir nur Homotopie relativ Endpunkten behalten. Also, in der Notation von Topo 1: $\operatorname{Mor}(x,y) = \Omega(X,x,y)/\sim$.

Die Verknüpfung in $\Pi(X)$ ist die Zusammensetzung von Wege, die wir $\omega * v$ notiert haben. Die Assoziativität, und dass c_x eine Identität von x ist, hatten wir damals geprüft.

__1.25 Definition__: Sei X ein Raum. Ein __lokales System von Gruppen__ auf X ist ein kovarianter Funktor $T : \Pi(X) \to$ Gruppen.

__1.26 Beispiel__: in I.3.10 hatten wir gesehen, dass

$T : \Pi(X) \to$ Gruppen, $x \mapsto T(x) = \pi_1(X,x)$,

$([\sigma] : x \mapsto y) \mapsto T[\sigma] : \pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$, mit

$T[\sigma]([\alpha]) = [\sigma^{-1}][\alpha][\sigma]$ ein lokales System auf X definiert. Nun zeigen wir, dass wir auch ein lokales System

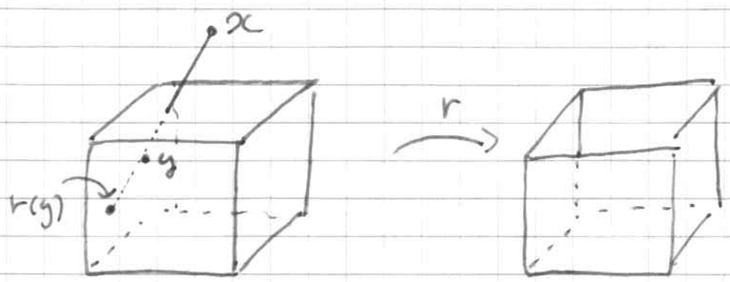
$\pi_n(X,-) : \Pi(X) \to$ AbGruppen für $n \geq 2$ haben.

__1.27 Bemerkung__: natürlich ist $T([\omega])$ ein Iso in Gruppen, für alle Morphismen $[\omega]$ in $\Pi(X)$.

__1.28 Bemerkung__: Das Paar $(I^n, \partial I^n)$ ist ein CW-Paar, und hat deshalb die Homotopie-Erweiterungs-Eigenschaft (HEP).
Man kann auch direkt eine Retraktion

$$r : I^n \times I \to (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$$

angeben: stereographische projektion in $\mathbb{R}^{n+1} \supset I^n \times I$, aus dem punkt $x = (1/2, \ldots, 1/2, 2)$, zum Beispiel:



1.29 Definition: Sei $n \geq 1$, X ein Raum, $a, b \in X$, $\omega \in \Omega(X, a, b)$ und $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, a)$. Definiere $F'_{\omega,f} : (I^n \times 0) \cup (\partial I^n \times I) \to X$ durch $F'_{\omega,f}(x, 0) = f(x)$ und $F'_{\omega,f}(y, t) = \omega(t)$ für $x \in I^n$, $y \in \partial I^n$ und $t \in I$.
Sei $F_{\omega,f} : I^n \times I \to X$ irgendeine Erweiterung von $F'_{\omega,f}$, (zum Beispiel $F_{\omega,f} = F'_{\omega,f} \circ r$). Sei $f_\omega : (I^n, \partial I^n) \to (X, b)$ durch $f_\omega(x) = F_{\omega,f}(x, 1)$ gegeben.

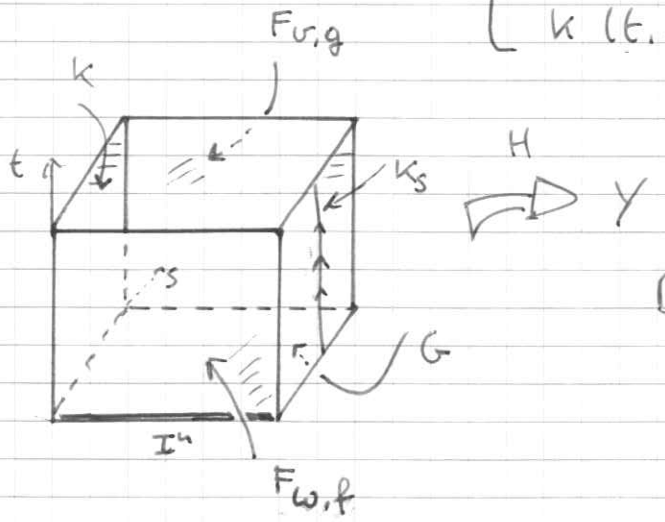
1.30 Lemma: Die Klasse $[f_\omega] \in \pi_n(X, b)$ hängt nur von $[f]$ und $[\omega]$ ab. Genauer gesagt, seien $\omega \sim v \in \Omega(X, a, b)$, $f \simeq g : (I^n, \partial I^n) \to (X, a)$, und sei $F_{v,g}$ wie oben gewählt; setzen wir $g_v = F_{v,g}(-, 1)$, so gilt $f_\omega \simeq g_v : (I^n, \partial I^n) \to (X, b)$.

Beweis: Betrachte $f \overset{G}{\simeq} g$, $\omega \overset{K}{\sim} v$, und

$$H : \underbrace{(I^n \times I \times 0) \cup (I^n \times \partial I \times I) \cup (\partial I^n \times I \times I)}_{= (I^{n+1} \times 0) \cup (\partial I^{n+1} \times I) \subset I^{n+1} \times I} \to Y$$

definiert durch

$$H(x, s, t) = \begin{cases} G(x, s), & (x, s, t) \in I^n \times I \times 0 \\ F_{\omega,f}(x, t), & (x, s, t) \in I^n \times \{0\} \times I \\ F_{v,g}(x, t) & (x, s, t) \in I^n \times \{1\} \times I \\ K(t, s) & (x, s, t) \in \partial I^n \times I \times I \end{cases}$$



Wähle eine Erweiterung $\Psi : I^{n+1} \times I \to Y$ von H.

Dann ist

$$\varphi : (I^n, \partial I^n) \times I \to (Y, b)$$
$$\varphi(x, s) = \Psi(x, s, 1)$$
für $x \in I^n$, $s \in I$

eine Homotopie von f_ω nach g_v. #

1.31 Definition + Lemma: Sei X ein Raum, $n \geq 1$.
Dann haben wir ein lokales System $\tau_n : \Pi(X) \longrightarrow$ Gruppen, gegeben durch $\tau_n(a) = \pi_n(X,a)$ und

$$\tau_n(a \xrightarrow{[\omega]} b) : \pi_n(X,a) \longrightarrow \pi_n(Y,b).$$
$$[f] \longmapsto [f_\omega]$$

Beweis: Dank 1.30 ist $\tau_n[\omega]$ wohldefiniert. Es gilt offensichtlich $\tau_n[c_a] = id_{\pi_n(X,a)}$, c_a der konst. Weg, weil wir $F_{c_a,f}(x,t) = f(x)$ nehmen können, $\forall f: (I^n, \partial I^n) \to (X,a)$.
Für die Funktorialität ist noch zu zeigen:
$a \xrightarrow{[\omega]} b \xrightarrow{[v]} c$, so gilt $T([v]\circ[\omega]) = T([\omega]*[v])$
$= T[v] \circ T[\omega]$ (erste "=" ist die Def. von $\circ$, zweite "=" zu zeigen).
Aber das ist klar, weil wir für $F_{\omega * v, f}$ können wir

$$F_{\omega,f} * F_{v,f_\omega} : (x,t) \longmapsto \begin{cases} F_{\omega,f}(x,2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ F_{v,f_\omega}(x,2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

wählen; diese Wahlen geben dann $f_{\omega * v} = (f_\omega)_v$, also $T([v]\circ[\omega])(f)$

$= [f_{\omega * v}] = [(f_\omega)_v] = T[v]([f_\omega]) = T[v]\circ T[\omega](f)$.
Letztendlich ist noch die Additivität von $T[\omega]$ zu beweisen.
Seien $f, g : (I^n, \partial I^n) \to (X,a)$, $\omega \in \Omega(X,a,b)$.
Wähle $F_{\omega,f}$ und $F_{\omega,g}$. Dann dürfen wir für $F_{\omega,f+g}$ einfach $F_{\omega,f} +_1 F_{\omega,g}$ wählen, was dann $(f +_1 g)_\omega = f_\omega +_1 g_\omega$ ergibt. Also $T[\omega]([f]+[g]) = T[\omega]([f]) + T[\omega]([g])$.

#

1.32 Korollar: Sei X ein Raum. Seien $a, b \in X$.
Liegen a, b in der selben Wegzusammenhangskomponente, so induziert die Wahl von $[\omega] \in \Omega(X,a,b)/\sim$ ein Isomorphismus

$$T[\omega] : \pi_n(X,a) \to \pi_n(X,b), \quad \forall n \geq 1.$$

1.33 Korollar II: Sei X ein Raum, $a \in X$. Die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,a)$ wirkt <u>rechts</u> auf $\pi_n(X,a)$ durch Gruppenhomomorphismen $\forall n \geq 1$.

1.34 Definition: Ein Raum X heißt <u>einfach</u> wenn für alle $n \geq 1$, die Gruppe $\pi_1(X,a)$ trivial auf $\pi_n(X,a)$ operiert, für alle $a \in X$.

1.35 Beispiele: (a) Einfach zusammenhängende Räume sind einfach.
(b) H-Räume sind einfach (Aufgabe 3.2)

1.36 Satz: Sei X ein Raum, $\omega, \upsilon \in \Omega(X,a,b)$, und sei $\alpha = [\omega^{-1} * \upsilon] \in \pi_1(X,b)$. Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(X,b) \arrow[d, "\cdot\alpha"] \\ \pi_n(X,a) \arrow[ur, "T{[\omega]}"] \arrow[r, "T{[\upsilon]}"'] & \pi_n(X,b) \end{tikzcd}$$

von Isomorphismen.
Insbesondere, wenn X einfach ist, und wenn a, b in der selben Weg Z. komp. liegen, so sind $\pi_n(X,a)$ und $\pi_n(X,b)$ <u>kanonisch</u> isomorph.

1.37 Lemma: Seien $f, g : X \to Y$ gegeben mit $f \overset{H}{\simeq} g$; sei $a \in X$, und sei $\omega : I \to Y$, $\omega(t) = F(a,t)$.
Dann haben wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(Y, f(a)) \arrow[d, "T{[\omega]}"] \\ \pi_n(X,a) \arrow[ur, "f_*"] \arrow[r, "g_*"'] & \pi_n(Y, g(a)) \end{tikzcd}$$

<u>Beweis</u>: Sei $k : (I^n, \partial I^n) \to (X,a)$; $fk : (I^n, \partial I^n) \to (Y, f(a))$
Um fk_ω zu bestimmen können wir für $F_{\omega, fk}$ die Abbildung
$F_{\omega, fk}(x,t) = H(k(x), t)$. Dann gilt $fk_\omega = gk$,
also $g_*[k] = T[\omega](f_*[k])$. #

1.38 Korollar: Ist $f: X \to Y$ eine Homotopie Äquivalenz, so ist $\pi_n(X,a) \xrightarrow{f_*} \pi_n(Y, f(a))$ ein Isomorphismus $\forall a \in X$.

Beweis: einfach, vergleiche I. 3.16 #.

Sei $(X, A, *)$ ein punkt. Paar. Auf ähnlicherweise erhalten wir eine Wirkung rechts von $\pi_1(A,*)$ auf $\pi_n(X, A, *)$, $n \geq 1$.
Die wird so definiert: sei $\omega \in \Omega(A,*)$, $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$. Betrachte $f \circ d: (I^{n-1}, \partial I^{n-1}) \to (A, *)$ (siehe 1.17) und $F_{\omega, f\circ d}: I^{n-1} \times I \to A$.
Sei nun $G': (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I) \to X$ durch

$$G'(x,t) = \begin{cases} f(x), & t=0 \\ F_{\omega, f\circ d}(x,t) & x \in I^{n-1} = I^{n-1} \times 0 \subset I^n \\ \alpha(t) & x \in J^{n-1}. \end{cases}$$

Wie ählich, erweitern G' zu $G_{\omega, f}: I^n \times I \to X$ und definiere $f_\omega: I^n \to X$, $x \mapsto f_\omega(x) = G_{\omega,f}(x,1)$.
Dann gilt $f_\omega: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, *)$.

1.39 Definition + Lemma: Wir definieren eine rechte Wirkung von $\pi_1(A,*)$ auf $\pi_n(X,A,*)$ durch $[f]\cdot[\omega] = [f_\omega]$.
Diese Wirkung ist wohldefiniert, und $\pi_n(X,A,*) \xrightarrow{\cdot[\omega]} \pi_n(X,A,*)$ ist ein Gruppenhomomorphismus für alle $[\omega] \in \pi_1(A,*)$.
Beweis: Aufgabe 3.1, ebenso für den folgenden Satz: #

1.40 Satz Sei $(X, A, *)$ ein punktiertes Paar; Sei eine rechte Wirkung von $\pi_1(A,*)$ auf $\pi_n(X,*)$ durch $[f]\cdot[\omega] := [f]\cdot(i_*[\omega])$ definiert, für $[f] \in \pi_n(X,*)$, $[\omega] \in \pi_1(A,*)$ und $i_*: \pi_1(A,*) \to \pi_1(X,*)$.
Dann erhalten wir auf der langen ex. Homotopiefolge, für $n \geq 1$, eine Wirkung von $\pi_1(A,*)$. In anderen Worten, für $[\omega] \in \pi_1(A,*)$ gilt $\varphi \circ (\cdot[\omega]) = (\cdot[\omega]) \circ \varphi$ für $\varphi = i_*, j_*, \partial_n, n \geq 2$. #

Nun beweisen wir das stärkste Theorem für direkte Berechnungen von Homotopiegruppen: den Ausschneidungssatz in Homotopie (unter starken Voraussetzungen), erst bewiesen von Blakers & Massey.

<u>1.41 Definition</u>: (a) Ein Raum X heißt n-zusammenhängend, $n \geq 0$, wenn $\pi_k(X, x) = 0$ für alle $0 \leq k \leq n$ und alle $x \in X$.

(b) Ein Raumpaar (X, A) heißt 0-zusammenhängend, wenn jede Weg-zus.komponente von X den Teilraum A trifft; es heißt n-zus., $n \geq 1$, falls es 0-zusammenhängend ist, und $\pi_k(X, A, a) = 0$ für alle $1 \leq k \leq n$ und alle $a \in A$.

(c) Ein Abbildung $f: X \to Y$ heißt $\overbrace{n\text{-zusammenhängend}}^{\text{oder: } n\text{-Äquivalenz.}}$ $n \geq 0$, wenn $f_*: \pi_k(X, x) \to \pi_k(Y, f(x))$ ein Isomorphismus für alle $0 \leq k \leq n-1$ und ein Surjektion für $k = n$ ist.

(d) Ein Abbildung von Paaren $f: (X, A) \to (Y, B)$ heisst n-zusammenhängend (oder "eine n-Äquivalenz"), $n \geq 1$, falls $f_*: \pi_k(X, A, a) \to \pi_k(Y, B, f(a))$ ein Isomorphismus für $1 \leq k \leq n-1$ und ein Surjektion für $k = n$ ist.

<u>1.42 Bemerkung</u>: Seien X, Y wegzusammenhängend, und sei $x \in X$. Eine Abbildung $f: X \to Y$ ist genau dann n-zusammenhängend, wenn das Paar $(Zyl(f), X)$ (siehe Aufgabe 2.4) n-zusammenhängend ist.

<u>1.43 Theorem</u> (Homotopieausschneidung; Blakers-Massey 1952): Sei X ein Raum, U, V offene Teilräume, so dass

(a) $U \cap V$ ist nicht leer

(b) Das Paar $(U, U \cap V)$ ist n-zusammenhängend, $n \geq 0$

(c) Das Paar $(V, U \cap V)$ ist m zusammenhängend, $m \geq 0$.

Dann ist die Inklusion $(V, U \cap V) \hookrightarrow (X, U)$ $(n+m)$-zusammenhängend.