Aus (a) und (b) folgt also

$$\frac{\mathrm{Ker}\,(d^r : E^r_s \to E^r_{s-r})}{\mathrm{Bild}\,(d^r : E^r_{s+r} \to E^r_s)} = \frac{Z^{r+1}_s / B^r_s}{B^{r+1}_s / B^r_s} = \frac{Z^{r+1}_s}{B^{r+1}_s} = E^{r+1}_s . \quad \#$$

Wir diskutieren kurz das Thema "Konvergenz" einer Sp.S. Das hat eigentlich nichts mit der Sp.S. selbst zu tun, aber untersucht die Frage: <u>was</u> berechnet meine Sp.S. In der Einleitung:
C_* ist ein filtrierter Kettenkomplex $F_{s-1} \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \dots C$.
Die Sp.S. wird uns $\mathrm{Bild}\,(H_* F_s \to H C) \big/ \mathrm{Bild}\,(H_* F_{s-1} \to H_* C)$ geben, $\forall s$. Kann man daraus $H_* C$ bestimmen?

<u>4.12 Beispiel</u>: Hier ist ein Beispiel mit Gruppen (die kann man als Kettenkomplexe in Grad 0 betrachten, wenn man möchte).
Sei $G = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$, filtriert durch $\dots \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \dots G$
mit $F_s = \bigoplus_{t \leq s} \mathbb{Z}/2 \hookrightarrow G$.

Sei $\bar{G} = \prod_{t \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$, filtriert durch $\dots \subset \bar{F}_s \subset \bar{F}_{s+1} \subset \dots \bar{G}$,
mit $\bar{F}_s = \prod_{t \leq s} \mathbb{Z}/2$.
Die Inklusion $i : G \to \bar{G}$ ist verträglich mit den Filtrierungen ($i(F_s) \subset \bar{F}_s$) und induziert Isomorphismen
$i_s : F_s/F_{s-1} \xrightarrow{\cong} \bar{F}_s/\bar{F}_{s-1}$ $\forall s$ (sogar $i_{s,t} : F_s/F_t \xrightarrow{\cong} \bar{F}_s/\bar{F}_t$ $\forall\, t<s$)
obwohl i kein Isomorphismus ist.
Das zeigt: gegeben eine Filtrierung $\{F_s\}_{s \in \mathbb{Z}}$ von G mit $G = \bigcup F_s$, $\{F_s/F_{s-1}\}_{s \in \mathbb{Z}}$ (oder $\{F_s/F_t\}_{t<s}$) charakterisiert G nicht.

Um Kriterien zu entwickeln, die garantieren, dass G von $\{F_s/F_t\}_{t<s}$ eindeutig charakterisiert ist, müssen wir etwas die Exaktheitseigenschaften von lim und colim erwähnen (diese Funktoren verallgemeinern $\bigcap F_s$ und $\bigcup F_s$).

4.13 Definition: Sei Ab^I die Kategorie der Funktoren $F: I \to Ab$ (I eine kleine "Index"-Kategorie; für uns $I = (\mathbb{Z}, \leq)$; dann ist $F \in Ab^{\mathbb{Z}}$ ein von $\mathbb{Z}$ indiziertes System von abelschen Gruppen

$$\dots \xrightarrow{f} F_{s-1} \xrightarrow{f} F_s \xrightarrow{f} F_{s+1} \to \cdots \qquad s \in \mathbb{Z}).$$

4.14 Definition: Sei $\Delta : Ab \to Ab^I$, $A \mapsto \{ f \mapsto id_A \mid f \in Mor(I) \}$

(a) Ein Limites von $F \in Ab^I$ ist ein Paar (X, η_X) mit $X \in Ab$ und $\eta_X : \Delta X \to F$ eine natürliche Transformation, so dass für alle $A \in Ab$,

$$Ab(A, X) \longrightarrow Ab^I(\Delta A, F), \quad f \mapsto \eta_X \circ \Delta f$$

ein natürlicher Iso ist.

(b) Ein Colimites von $F \in Ab^I$ ist ein Paar (Y, ν_Y) mit $Y \in Ab$, $\nu_Y : F \to \Delta Y$ eine natürliche Transformation, so dass $\forall A \in Ab$,

$$Ab(Y, A) \longrightarrow Ab^I(F, \Delta A), \quad f \mapsto \Delta f \circ \nu_Y$$

ein natürlicher Iso ist.

4.15 Lemma: Colimites und Limites existieren für beliebige kleine Kategorien I und $F \in Ab^I$.

Beweisskizze: (a) Sei $F \in Ab^I$; betrachte

$$\Psi_F : \prod_{n \in I} F_n \longrightarrow \prod_{f \in Mor\, I} F_{t(f)} \qquad (f : s(f) \to t(f))$$

Charakterisiert durch $p_f \circ \Psi_F = p_{t(f)} - F(f)\, p_{s(f)}$ | p_z = Proj. auf Faktor z

Sei $X = \ker \Psi_F$ und sei $\eta_X : \Delta X \to F$ durch

$(\eta_X)_m : X \hookrightarrow \prod_{n \in I} F_n \xrightarrow{p_m} F_m$ definiert. Dann ist (X, η_X) ein Limites von F.

(b) Duale Konstruktion: $\varphi_F : \bigoplus_{f \in Mor\, I} F_{s(f)} \longrightarrow \bigoplus_{n \in I} F_n$

charakterisiert durch

$$\varphi_F \circ i_f = i_{s(f)} - i_{t(f)} F(f)$$

(wobei i_z die kan. Inklusion des Summand mit Index z ist).

Sei $Y = \operatorname{coker} \varphi_F$ und $\nu_Y : F \to \Delta Y$ durch

$(\nu_Y)_m : F_m \hookrightarrow \bigoplus_m F_m \longrightarrow \mathrm{Coker}\,\varphi_F$ definiert.

Dann ist (Y, ν_Y) ein Colimite von F. #

4.16 Bemerkung: Wenn Limites und Colimites existieren, sind sie eindeutig bis auf kanonischem Isomorphismus; dann definiert

$\lim : Ab^I \to Ab$, $F \to \lim F$ (ein gew. Limites von F)

ein Funktor: $F \xrightarrow{f} G$, so ist $\lim F \xrightarrow{\lim f} \lim G$ durch

$$Ab(\lim F, \lim G) \xrightarrow{\cong} Ab^I(\Delta \lim F, G)$$
$$\lim f \longmapsto f \circ \eta_{\lim F}$$

definiert. Dann ist $(\Delta, \lim)$ ein adjungiertes Paar; insbesondere ist $\lim$ links-exakt (rechts adjungierte erhalten Limites!)

Ebenso: Wir können ein Funktor $\mathrm{Colim} : Ab^I \to Ab$ definieren, und (Colim, Δ) ist ein adjungiertes Paar; insbesondere ist Colim rechts-exakt. (links adjungierte erhalten Colimites!)

4.17 Satz: $\mathrm{Colim} : Ab^{\mathbb{Z}} \to Ab$ ist exakt.

Andererseits ist $\lim : Ab^{\mathbb{Z}} \to Ab$ nicht exakt, aber fast! Die rechts-derivierte Funktoren der Ordnung ≥ 2 sind alle 0.

Für $F \in Ab^{\mathbb{Z}}$ betrachte eine abgeänderte Version von φ_F:

$$\prod_{m \in \mathbb{Z}} F_m \xrightarrow{\tilde{\varphi}_F} \prod_{\underline{n} \in \mathbb{Z}} F_n \qquad (\text{hier } \underline{n} : (n-1) \to n)$$

definiert durch $\tilde{\varphi}_F(\{x_m\}_m) = \{x_n - f(x_{n-1})\}_{\underline{n}}$

(F als $\cdots \to F_{n-1} \xrightarrow{f} F_n \xrightarrow{f} F_{n+1} \to \cdots$ gegeben).

Dann gilt $\lim F = \mathrm{Ker}\,\tilde{\varphi}_F$.

4.18 Definition: Setze $\lim^1 F = \mathrm{Coker}\,\tilde{\varphi}_F$.

4.19 Satz: Ist $0 \to F \to G \to H \to 0$ exakt in $Ab^{\mathbb{Z}}$, so erhalten wir eine exakte Folge

$$0 \to \lim F \to \lim G \to \lim H \to \lim^1 F \to \lim^1 G \to \lim^1 H \to 0$$

Beweisskizze: Snake Lemma!

(Man kann zeigen: $\lim^1 = R^1 \lim$ und $R^n \lim = 0$ für $n \geq 2$).

<u>4.20 Definition:</u> Sei $G \in Ab$. Eine <u>Filtrierung</u> von G ist eine Folge $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ von Untergruppen von G mit $F_s \subset F_{s+1}$ $\forall s \in \mathbb{Z}$. Wir können F als Element von $Ab^{\mathbb{Z}}$ sehen.
Die Filtrierung $\{F_s\}$ von G heißt
(a) erschöpfend (exhaustive) falls $G = \bigcup F_s = \operatorname{colim} F_s$
(b) Hausdorff falls $\lim F_s = \bigcap F_s = 0$
(c) Vollständig (complete) falls $\lim^1 F_s = 0$
($\{F_s\}$ bestimmt auf G eine Struktur einer topologischen Gruppe (fund. System von Umgebungen von 0); (b) und (c) entsprechen dann die Topologische Eigenschaften). ($\rightsquigarrow$ Beispiel 4.12).

<u>4.21 Satz:</u> Ist $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ eine erschöpfende, Hausdorff und vollständige Filtrierung von einer Gruppe G, so gilt

$$G = \lim_s (G/F_s) = \lim_s (\operatorname{colim}_t (F_t/F_s))$$

(Also: das System $\{F_t/F_s\}_{s<t}$ bestimmt G). #

<u>4.22 Definition:</u> Sei G eine graduierte Gruppe, $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ eine Filtrierung von G. Eine Spektralsequenz (E^r, d^r) <u>konvergiert schwach</u> gegen G wenn
(a) Wir Isomorphismen $E^\infty_s \cong F_s/F_{s-1}$ $\forall s$ haben
(b) $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ ist eine erschöpfende Filtrierung von G
Ist $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ zusätzlich Hausdorff, so sagen wir, dass (E^r, d^r) gegen G <u>konvergiert</u>.
Ist $\{F_s\}_{s\in\mathbb{Z}}$ zusätzlich Hausdorff und vollständig, so konvergiert (E^r, d^r) <u>stark</u> gegen G.
<u>Notation:</u> Meistens hat E^2_{**} (oder $E^1, \ldots$) eine schöne Beschreibung; dann schreibt man Konvergenz als

$$E^2_{**} \Rightarrow G \qquad \text{(und erwähnt noch stark, ...)}.$$