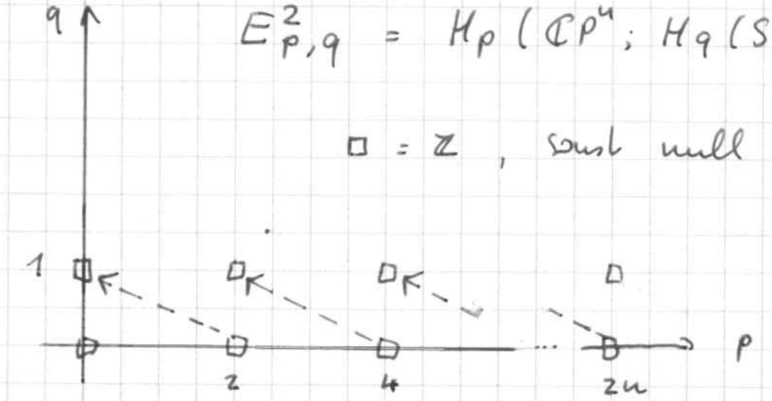
5.14 Beispiel: Ein Analoges Beispiel: $S^1 \to S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$.

Dann haben wir

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathbb{C}P^n; H_q(S^1;\mathbb{Z})) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } (p,q) \text{ mit } 0 \leq p \leq 2n \text{ gerade und } q = 0,1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$\square = \mathbb{Z}$, sonst null



d^2: die gezeichnete Pfeile sind Isomorphismen

$$\Rightarrow \quad E^\infty_{p,q} = \begin{cases} \mathbb{Z} & (p,q) = (0,0), (2n,1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Und gewinnen $H_*(S^{2n+1};\mathbb{Z})$ zurück.

5.15 Beispiel: Hier ist ein Beispiel, wo wir "Rückwärts" die Sp. Seq bestimmen: Wir haben eine Faserung $F \to E \to B$ und $H_*(E;\mathbb{Z})$, $H_*(B;\mathbb{Z})$ sind uns bekannt, und wir möchten $H_*(F;\mathbb{Z})$ bestimmen.

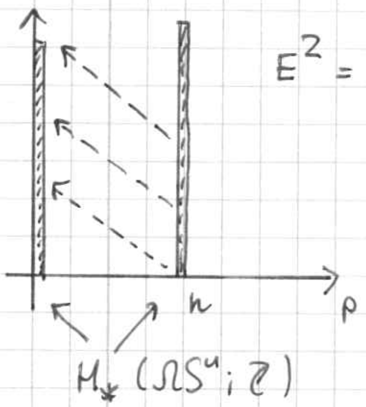
Beispiel: $n \geq 2$, und $\Omega S^n \to PS^n \xrightarrow{p} S^n$ (für $n=1$ vergleiche mit $\mathbb{Z} \to \mathbb{R} \to S^1$). Da $PS^n \simeq *$ wissen wir, dass $H_i(PS^n;\mathbb{Z}) = 0$ für $i > 0$;

Wir wissen auch dass S^n 1-zusammenhängend ist, und das $H_0(\Omega S^n;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ (ΩS^n ist $n-2$ zusammenhängend).

Der E^2-Term der Spektralsequenz ist also als

$$E^2_{p,q} \cong \begin{cases} H_q(\Omega S^n;\mathbb{Z}) & p = 0, n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(Universelle Koeffizienten!)



Also gilt $d^2 = \dots = d^{n-1} = 0$ und $E^2 = E^n$; Andererseits wissen wir dass $E^\infty_{p,q} = 0$ für $(p,q) \neq (0,0)$.

Induktiv sehen wir also

(1) $H_q(\Omega S^n;\mathbb{Z}) = 0$ für $0 < q < n-1$

(ansonsten $E^\infty_{0,q} = E^n_{0,q} \neq 0$ ↯)

(2) $\mathbb{Z} \cong E^n_{n,0} \xrightarrow{d^n} E^n_{0,n-1}$ muss einen Iso sein (ansonsten $E^\infty_{n,0} \oplus E^\infty_{0,n-1} \neq 0$, $\lightning$). Also

$H_{n-1}(\Omega S^n : \mathbb{Z}) \cong E^n_{0,n-1} \cong \mathbb{Z}$.

Aus (1)+(2) folgt also

(3) $E^n_{0,q} = 0 = E^n_{n,q}$ für alle $0 < q < n-1$,

und $E^n_{0,n-1} \cong \mathbb{Z} = E^n_{n,n-1}$.

Nun können wir (1), (2), (3) induktiv iterieren und erhalten:

$$H_i(\Omega S^n ; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i = j(n-1),\ j \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst !} \end{cases}$$

Um interessanten Beispiele berechnen zu können brauchen wir mehr Eigenschaften und Werkzeuge zu entwickeln. Am ersten möchte man Sp. Sequenzen vergleichen können.

<u>5.16 Definition</u>: Seien $(E^r, d^r)_r$ und $(E'^r, d'^r)_r$ Spektralseq. Ein Morphismus von Spektralsequenzen $f : (E^r, d^r)_r \to (E'^r, d'^r)_r$ ist eine Folge $\{f^r\}_{r \geq 1}$ von Homomorphismen

$$f^r_s : E^r_s \to E'^r_s \quad (\text{von inneren Grad } 0) \quad \forall s,$$

die verträglich mit den Rändern sind:

$$f^r_s \circ d^r = d'^r \circ f^r_{s+r} \quad \forall r, \forall s,$$

$$\begin{tikzcd} E^r_{s+r} \arrow[r, "d^r"] \arrow[d, "f^r_{s+r}"'] & E^r_s \arrow[d, "f^r_s"] \\ E'^r_{s+r} \arrow[r, "d'^r"] & E'^r_s \end{tikzcd}$$

so dass f^{r+1} von f^r in Homologie induziert ist.

<u>5.17 Satz</u>: Ein Morphismus von Spektralsequenzen $f : (E^r, d^r)_r \to (E'^r, d'^r)_r$ induziert einen Homomorphismus von graduierten Gruppen

$$f^\infty : E^\infty_s \to E'^\infty_s \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{Z}.$$

Falls f^{r_0} eine Isomorphismus für eine $r_0 \geq 1$ ist, dann ist f^r auch einen Isomorphismus, für alle $r_0 \leq r \leq \infty$.

<u>Beweis</u>: Siehe Definitionen; siehe auch Prop 2.7 im Skript SS.

Die Spektralsequenzen die wir betrachten entstehen von UEC, und Morphismen von Spektralsequenzen entstehen als:

5.18 Lemma + Def: Seien gegeben zwei UEC

$$A:\ \begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r, "i"] & A_s \arrow[dl] \arrow[rr, "i"] & & A_{s+1} \arrow[dl, "j"] \arrow[r, "i"] & \cdots \\ & & E_s \arrow[ul, "k"] \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \text{und} \qquad B:\ \begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r, "i"] & B_s \arrow[rr, "i"] & & B_{s+1} \arrow[dl, "j"] \arrow[r, "i"] & \cdots \\ & & E'_s \arrow[ul, "k"] & & \end{tikzcd}$$

Ein Morphismus von UEC $f: A \to B$ ist eine Familie von Hom. (von inneren Grad 0) $A_s \to B_s$, $E_s \to E_s$ $\forall s$, die mit den i, j, k verträglich sind. Solch ein f induziert einen Morphismus von assoziierten Spektralsequenzen $f: (E^r, d^r)_r \to (E'^r, d'^r)_r$.

Beweis: Klar... #

5.19 Beispiele: (a) Seien $\cdots \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \cdots C$ und $\cdots \subset G_s \subset G_{s+1} \subset \cdots \subset D$ filtrierte Kettenkomplexe, und sei $f: C \to D$ ein Homomorphismus von Kettenkomplexen.
Wenn $f(F_s) \subset G_s$ für alle s gilt, dann induziert f einen Hom. von den assoz. UEC und Spektralsequenzen.
Wenn die beide Filtrierungen beschränkt sind, so dass die Sp. sequenzen stark konvergieren, dann gelten:

(i) Das Diagramm
$$\begin{tikzcd} F_sHC/F_{s-1}HC \arrow[r, "{[f_*]}"] \arrow[d, "\cong"'] & G_sHD/G_{s-1}HD \arrow[d, "\cong"] \\ E^\infty_s \arrow[r, "f^\infty"] & E'^\infty_s \end{tikzcd}$$
kommutiert, wobei $f_*: F_sHC \to G_sHD$ die Einschränkung von $f_*: H_*C \to H_*D$ ist.

(ii) ist f^∞ ein Isomorphismus, so ist $f_*: H_*C \to H_*D$ auch ein Isomorphismus (iteriere 5-Lemma).

(b) Sei $f: C_{**} \to D_{**}$ ein Morphismus von Doppelkomplexe. Sind C_{**} und D_{**} beide vom 1. oder 3. Quadrant, so induziert f Homomorphismen von beschränkt-filtr. Komplexen

$\mathrm{Tot}\, f : \mathrm{Tot}\, C \to \mathrm{Tot}\, D$ (bezüglich den horizontalen und vert. Filtrierungen). Wir erhalten also nach (a) Morphismen von Sp. seq

$${}^h f : ({}^h E^r(C), d) \to ({}^h E^r(D), d^r) \quad \text{und}$$
$${}^v f : ({}^v E^r(C), d) \to ({}^v E^r(D), d^r).$$

<u>5.20 Definition</u>: Seien $E \xrightarrow{p} B$ und $E' \xrightarrow{p'} B'$ zwei Serre-Faserungen, und sei gegeben ein kommutatives Diagramm
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p\downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array}$$
(also (f, g) ist ein "Morphismus" von Serre-Fas.)
Dann induziert $\phi = (f, g)$ einen Morphismus von Doppelkomplexe
$$S_{**}(p; A) \to S_{**}(p'; A)$$
und von den assoziierten Serre-spektral sequenzen
$$\phi_* : (E^r_{s,t}(p), d^r) \to (E^r_{s,t}(p'), d^r)$$

<u>5.21 Satz</u>: Sei $\phi = (f, g)$ ein Morphismus von Serre-Faserungen wie in 5.20. Dann induziert ϕ ein Homomorphismus von lokalen Systeme $\mathcal{H}_*(F; A) \to g^* \mathcal{H}_*(F'; A)$ auf B.
Auf E^2-Terme ist ϕ^2_* als
$$\phi^2 : H_p(B; \mathcal{H}_q(F; A)) \to H_p(B; g^* \mathcal{H}_q(F'; A)) \xrightarrow{g_*} H_p(B'; \mathcal{H}_q(F'; A))$$
gegeben, und
$$\phi^\infty : E^\infty_s(p) \to E^\infty_s(p') \quad \text{ist von}$$
$f_* : H_*(E, A) \to H_*(E', A)$ auf Unterquotienten (bezüglich ${}^v FH$) induziert.

<u>Beweis</u>: Beide Aussagen sind leicht durch den Definition nachzufolgen. Für die Zweite benutzt man die horizontale Filtrierung um zu zeigen dass
$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathrm{Tot}\, D(p)) & \xrightarrow{\mathrm{Tot}\,\phi_*} & H_*(\mathrm{Tot}\, D(p')) \\ \cong\uparrow & & \uparrow\cong \\ H_*(E; A) & \xrightarrow{f_*} & H_*(E'; A) \end{array}$$
(vertikale Iso's aus 5.10) und verwendet dann 5.19 (ii). #

Sei gegeben eine Serre-Faserung $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$, so kann man die Homomorphismen $i_*: H_t(F;A) \to H_t(E;A)$ und $p_*: H_s(E;A) \to H_s(B;A)$ in der Serre-Spektral als die "Edge"-Homomorphismen ablesen.

<u>5.22 Lemma</u>: Sei $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ eine Serre Faserung mit B 0-zusammenhängend und so dass $\mathcal{H}_t(F;A)$ auf B einfach ist. Dann faktorisiert $i_*: H_t(F;A) \to H_t(E;A)$ als

$$i_*: H_t(F;A) = E^2_{0,t} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,t} \hookrightarrow H_t(E;A).$$

(Hier ist der mittlere Hom definiert weil $E^r_{0,t} \xrightarrow{d_r} E^r_{-r,t} = 0 \ \forall r$ also weil $E^2_{0,t}$ auf der Kante (edge) steht)

<u>Beweis</u>: Wir haben ein Morphismus von Serre-Faserungen ϕ:

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p'"] & E \arrow[d, "p"] \\ \{b\} \arrow[r, hook] & B \end{tikzcd}$$

Dann gilt

$$E^2_{s,t}(p') = H_s(\{b\}, H_t(F;A)) = \begin{cases} H_t(F;A) & s=0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\begin{tikzcd} H_t(F;A) = E^2_{0,t}(p') \arrow[d, "id"] \arrow[r, phantom, "①"] & E^2_{0,t}(p') \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\phi^2"] \arrow[dr, phantom, "②"] & E^\infty_{0,t}(p') \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\phi^\infty"] \arrow[dr, phantom, "③"] & H_t(F;A) \arrow[d, "i_*"] \\ H_t(F;A) = E^2_{0,t}(p) & E^2_{0,t}(p) \arrow[r, two heads] & E^\infty_{0,t}(p) \arrow[r, hook] & H_t(E;A) \end{tikzcd}$$

Kommutativ: ① dass folgt aus der Beschreibung von ϕ^2 in 5.21, ② : weil ϕ ein Morphismus von Spektralsequ. ist, und ③ wegen des 2. Teil von 5.21. Das Lemma folgt. #

<u>5.23 Lemma</u>: Sei $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ eine Serre-Faserung mit $\mathcal{H}_t(F;A)$ einfach auf B und F 0-zusammenhängend. Dann faktorisiert

$$p_*: H_s(E;A) \twoheadrightarrow E^\infty_{s,0} \hookrightarrow E^2_{s,0} = H_s(B;A).$$

<u>Beweis</u>: Analog zu 5.22, diesmal mit dem Morphismus von Überlagerungen

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\phi"] & B \arrow[d, "p' = id"] \\ B \arrow[r, equal] & B \end{tikzcd}$$

#