Wir brauchen erstmal zwei Lemma.

<u>1.44 Lemma</u> Sei (X,A) ein CW-paar, und $f:(X,A)\to(Y,B)$ eine Abbildung von Paaren, die (als solch) homotop zu einer Konstanten Abbildung ist. Dann existiert eine Abbildung $g: X\to Y$ mit

(a) $g|_A = f|_A$,

(b) $g(X)\subset B$,

(c) $f\simeq g$ rel A (also $\exists\ H: X\times I\to Y$, $H(-,0)=f$, $H(-,1)=g$, $H(a,t)=f(a)$ für alle $(a,t)\in A\times[0,1]$).

<u>Beweis</u>: Durch Voraussetzung existiert eine Homotopie $F:(X,A)\times I\to(Y,B)$ mit $F(x,0)=f(x)$ und $F(x,1)=b\in B$ $\forall\, x\in X$.

$$\begin{tikzcd}
(X\times\{0\})\cup(A\times I) \arrow[r, "G'"] \arrow[d, hook] & B \\
X\times I \arrow[ur, dashed, "\exists G"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei G' durch $G'(x,0)=b$ und $G'(a,t)=F(a,1-t)$ definiert. Dann existiert eine Erweiterung G.

Wir setzen $g: X\to B\subset Y$, $g(x):=G(x,1)$.

Zu zeigen: $f\overset{H}{\simeq} g$ rel A. Wir haben eine offensichtliche Homotopie $f\simeq g$, gegeben durch $F*G$, mit

$$F*G(x,t)=\begin{cases} F(x,2t) & 0\le t\le 1/2\\ G(x,2t-1), & 1/2\le t\le 1\end{cases}\qquad (\underline{\text{nicht}}\ \text{rel } A)$$

Wir können nun F zu der gesuchten Homotopie H (rel A) umformen. Erstens, $F*G|_{A\times I}=F|_{A\times I}*F^{-1}|_{A\times I}$ mit $F^{-1}|_{A\times I}(a,t)=F|_{A\times I}(a,1-t)$. Also (genau wie im Beweis $u*u^{-1}\sim c$ für Wege, I 3.4) existiert eine Homotopie $F*G|_{A\times I}\overset{\varphi}{\simeq}H'$ rel $A\times\partial I$ mit $H'(a,s)=f(a)$ $\forall\, s\in I$.

Zweitens, man kann auch das Paar $(X\times I,\ X\times\partial I\cup A\times I)$ als CW-Paar realisieren;

$$\begin{tikzcd}
(X\times\partial I\cup A\times I)\times I \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, hook] & Y \\
X\times I\times I \arrow[ur, "\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Sei ψ durch
$$\left.\begin{aligned}\psi(x,0,t)&=f(x)\\ \psi(x,1,t)&=g(x)\end{aligned}\right\}\ x\in X$$
$$\psi(a,s,t)=\varphi(a,s,t)\quad\forall\,(a,s,t)\in A\times I\times I.$$

Dann hat Ψ eine Erweiterung Φ, und $H: X \times I \to Y$,
$H(x,s) = \Psi(x,s,1)$ ist die gesuchte Homotopie. #

Um 1.43 zu beweisen werden wir I^n in klein genug Würfeln zerlegen.
Dazu folgende Notation:

<u>1.45 Notation</u>: Unter ein <u>Würfel</u> in $\mathbb{R}^n$ verstehen wir (in diesem Kapitel) ein Teilraum $W \subset \mathbb{R}^n$ der Form

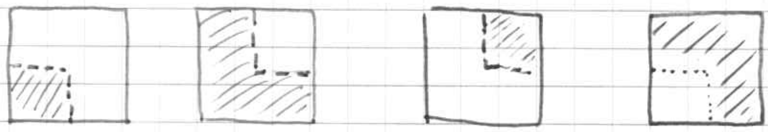
$$W = W(a, \delta, L) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i \le x_i \le a_i + \delta \ \forall i \in L,\ x_j = a_j \ \forall j \notin L\}$$

wobei $a \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$, $L \subset \{1, \dots, n\}$ (möglicherweise $L = \emptyset$).
Sei $\dim(W) = \# L$. Eine <u>Seite</u> $W' \subset W$ von W ist eine Teilmenge $W' = \{x \in W \mid x = a_i$ für $i \in L_0$, $x_j = a_i + \delta$ für $i \in L_1\}$
für gewisse $L_0, L_1 \subset L$ (W' möglicherweise $= \emptyset$).
Sei ∂W die Vereinigung aller Seiten $W' \subset W$ mit $W' \neq W$.
Wir setzen, für $1 \le p \le n$

$$K_p(W) = \{x \in W \mid x_i < a_i + \delta \text{ für mindestens } p\text{-Werte } i \in L\}$$
$$G_p(W) = \{\ \text{——}\,''\,\text{——} \mid x > a_i + \delta \quad \text{——————}\,''\,\text{——————}\ \}$$

falls $p \le \dim(W)$, und $K_p(W) = \emptyset = G_p(W)$ falls $p > \dim(W)$.
Es gilt $K_n(W) \subset K_{n-1}(W) \subset \dots \subset K_1(W)$, $G_n(W) \subset \dots \subset G_1(W)$.

<u>Beispiel</u>: $W = I^2 \subset \mathbb{R}^2$



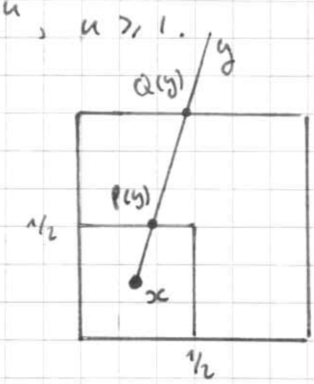
$K_2(W) \subset K_1(W)$ $\qquad$ $G_2(W) \subset G_1(W)$

<u>1.46 Lemma</u>: Sei $f: W \to X$ gegeben, (X, A) ein Paar.
Nehmen wir an, ein $1 \le p \le \dim(W)$ existiert, mit

$$f^{-1}(A) \cap W' \subset K_p(W') \text{ für alle } W' \subset \partial W.$$

Dann existiert $g: W \to X$ mit
(a) $g^{-1}(A) \subset K_p(W)$
(b) $f \simeq g$ rel ∂W.
Die gleiche Aussage gilt für $G_p(-)$ anstatt $K_p(-)$

<u>Beweis</u>: Wir können annehmen, dass $W = I^n \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.



Sei $h : I^n \to I^n$ wie folgt definiert:

Sei $x = (1/4, \dots, 1/4) \in I^n$, und sei y eine Halbgerade mit x als Endpunkt. Dann bildet h den Segment $\langle x, P(y) \rangle$ affin bijektiv auf $\langle x, Q(y) \rangle$ ab, und den Segment $\langle P(y), Q(y) \rangle$ konstant auf $Q(y)$ ab, wobei $P(y) = y \cap \partial [0, 1/2]^n$ und $Q(y) = y \cap \partial I^n$.

Dann gilt offensichtlich dass h stetig ist, ∂I^n punktweise fixiert, und $h \simeq id_{I^n}$ rel ∂I^n (klar, da I^n konvex).

Sei $g = f \circ h$, sodass $g \simeq f$ rel ∂I^n auch gilt.

Zu zeigen: $g^{-1}(A) \subset K_p(I^n)$. Sei also $z \in I^n$ mit $g(z) \in A$.

(i) $z \in [0, 1/2)^n \Rightarrow z \in K_n(I^n) \subset K_p(I^n)$.

(ii) $z \notin [0, 1/2]^n$; dann existiert $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $z_j \geq 1/2$.

Es folgt $h(z) \in \partial I^n$. Ein $W' \subset \partial I^n$ existiert, mit $\dim(W') = n-1$ und $h(z) \in W'$. Insbesondere haben wir $h(z) \in W' \cap f^{-1}(A) \subset K_p(W')$. Also existieren p Werte $i \in \{1, \dots, n\}$ mit $h(z)_i < 1/2$ $(*)$.

Andererseits $h(z) = x + t(z-x)$ für ein $t \in [0, \infty)$.

Aber $z_j \geq 1/2$, also $z_j - x_j > 0$ (und $z \neq x$); Ist y die $\frac{1}{2}$ Gerade durch x und z wie oben, so liegt $h(z)$ nicht auf dem Segment $\langle x, z \rangle \setminus \{z\}$, also $t \geq 1$.

Also für die Werte i in $(*)$ gilt:

(a) Falls $z_i < 1/4$, dann $z_i < 1/2$ ok!

(b) Falls $z_i \geq 1/4$, dann gilt

$$1/2 > h(z)_i = 1/4 + t(z_i - 1/4) \geq 1/4 + z_i - 1/4 = z_i.$$

Der Beweis für G_p ist analog (Konjugiere h mit einer Spiegelung $s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

#

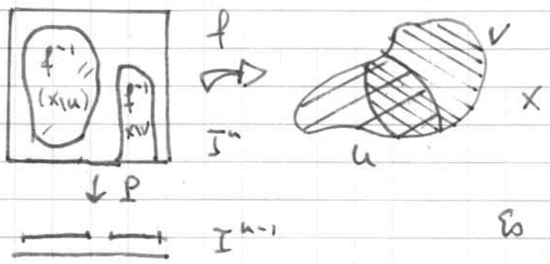
Beweis von 1.43: Wir folgen den Beweis von D. Puppe aus Tom Dieck - Kamps - Puppe [1970].

(A) Wir beweisen zuerst die Surjektivität. Sei $p = k+1$, $q = l+1$, und $1 \leq n \leq p+q-2$. Dann induziert $(V, U\cap V) \overset{i}{\hookrightarrow} (X, U)$ eine Surjektion $\pi_n(V, U\cap V, *) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, U, *)$, $\forall * \in U\cap V$.

Sei also $[f] \in \pi_n(X, U, *)$, gegeben durch $f: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, U, *)$.

(1) Betrachte $P: I^n \to I^{n-1}$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1})$.

Nehmen wir an, es gilt $P(f^{-1}(X\setminus U)) \cap P(f^{-1}(X\setminus V)) = \emptyset$. (✡)



Es gilt $X\setminus V = U \setminus U\cap V$, also $* \notin X\setminus V$ und $f^{-1}(X\setminus V)\cap J^{n-1} = \emptyset$. Es folgt aus $P(J^{n-1}) = \partial I^{n-1}$ dass

$$P f^{-1}(X\setminus V) \cap \partial I^{n-1} = \emptyset, \quad \text{also}$$

$P f^{-1}(X\setminus V) \cap (P f^{-1}(X\setminus U) \cup \partial I^{n-1}) = \emptyset$, und beide Teilmengen sind abgeschlossen in I^{n-1} (dank U, V offen, und I^n kompakt). Also existiert dank des Urysohn-Lemmas eine Funktion $\tau: I^{n-1} \to [0,1]$ mit

$$\tau(P f^{-1}(X\setminus V)) = \{1\} \quad \text{und} \quad \tau(P f^{-1}(X\setminus U) \cup \partial I^{n-1}) = \{0\}.$$

Sei $H_1: I^n \to I^n$, $H_1(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \tau_x + (1-\tau_x)x_n)$ wobei $\tau_x = \tau(x_1, \dots, x_{n-1})$.

Hier gilt $H_1(x) = x$ für alle $x \in J^{n-1}$. Wir haben also eine Homotopie $H: I^n \times I \to I$ rel J^{n-1} mit $H_0 = id_{I^n}$ und H_1 wie oben; diese Homotopie wählen wir durch affine Erweiterung (I^{n+1} konvex).

Bemerke, dass für alle $t \in I$ gilt: $P H_t(x) = P(x)$, weil das für H_1 und H_0 gilt, und H affine Erw.

Wir setzen nun $g = f \circ H_1: I^n \to X$.

Es gilt $g(I^n) \subset V$: in der Tat, sei $x \in I^n$;