<u>3.14 Bemerkung</u>: Im letzten Teil des Beweis, wenn $n=2$, so sind $\pi_2(Y,A) \to \pi_1(A) \to \pi_1(X)$ kein Abelsche Gruppen mehr, und man muss das 5-Lemma in diesen Fall durch eine ad-hoc Diagramm Jagd in Gruppen ersetzen.

<u>3.15 Korollar</u>. Sei $n \geq 0$ und Y ein n-zus. hängender Komplex. Dann ist Y homotopie-Äquivalent zu einen CW-Komplex X mit $X^{(n)} = \{*\}$ (sogar punktiert Homotopie Äquivalent).

<u>Beweis</u>: Wähle $* \in Y^{(0)}$ und betrachte $f: A = \{*\} \hookrightarrow Y$. Nach 3.13 können wir eine CW + Komplex X konstruieren durch Anheften von Zellen auf A, der Dimension $\geq n+1$, und f zu einer schwache Homotopie Äquivalenz $F: X \to Y$ erweitern. Dann ist F ein Homotopie-Äquivalenz dank 3.8. #

<u>3.16 Definition + Lemma</u>: Sei Y ein Raum. Ist X ein CW-Komplex und $f: X \to Y$ eine schwache Homotopieäquivalenz, so heißt f eine <u>CW-Approximation</u> von Y. Die Existenz einer CW-Approximation für jeden Y folgt aus 3.13 (mit $A = \emptyset$).

Natürlichkeit: ist $g: Y_1 \to Y_2$ stetig, und sind $f_i: X_i \to Y_i$ CW-Approximationen, so existiert ein zelluläre Abbildung $h: X_1 \to X_2$, <u>eindeutig</u> bis auf Homotopie, so dass

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \end{array}$$

Homotopiekommutativ ist. Insbesondere ($g = id_Y$) ist eine CW-Approximation von Y eindeutig bis auf eindeutige Homotopie-Äquivalenz.

<u>Beweis</u>: Wir haben eine Bijektion $[X_1, X_2] \xrightarrow{f_{2*}} [X_1, Y_2]$, $\cong$ dank (3.7)

also existiert eine einzige Klasse $[h] \in [X_1, X_2]$ mit $[f_2 h] = f_{2*}[h] = [g f_1]$. #

<u>Bemerkung</u>: 3.16 gilt auch im punktierten Fall.

Wir sehen jetzt einige Ergebnisse, die zur Konstruktion von Eilenberg-MacLane Räumen verwendet werden.

<u>3.17 Satz</u> Sei $n \geq 0$, Y ein Raum mit $\pi_k(Y, *) = 0$ für alle $k > n$. Sei (X, A) ein relativer CW mit Zellen in Dimensionen $\geq n+2$. Dann induziert $i : A \hookrightarrow X$ eine Bijektion

$$i^* : [X, Y] \xrightarrow{\cong} [A, Y].$$

Die analoge Aussage im punktierten Fall gilt auch.

<u>Beweis</u>: (a) i^* surjektiv: sei $f : A \to Y$ gegeben; Konstruiere $g^{(m)} : X^{(m)} \to Y$ mit $g^{(m)}|_A = f$, per Induktion auf $m \geq n+1$: $X^{(n+1)} = A$, $g^{(n+1)} = f$. Für $m \geq n+2$: Betrachte das Push-out:

$$\begin{tikzcd}
\amalg S^{m-1} \arrow[r, "\amalg \varphi"] \arrow[d, "\partial"] & X^{(m-1)} \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "g^{(m-1)}"] & \\
\amalg D^m \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\amalg h"'] & X^{(m)} \arrow[dr, dashed, "g^{(m)}"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

Hier ist $D^m \xrightarrow{h} Y$ eine Nullhomotopie für $S^{m-1} \xrightarrow{\varphi} X^{(m-1)} \xrightarrow{g^{(m-1)}} Y$.

Falls f punktiert ist g auch punktiert.

(b) i^* injektiv: verwende (a) auf $(X \times I,\ X \times \partial I \cup A \times I)$ statt (X, A). #

<u>3.18 Satz</u>: Sei A ein Raum, $n \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein relativer CW-Komplex (X, A) mit Zellen der Dimension $\geq n+2$, so dass $\pi_k(X, x) = 0$ für alle $k > n$ und $x \in X$, und $i : A \hookrightarrow X$ induziert einen Isomorphismus

$$i_* : \pi_k(A, a) \xrightarrow{\cong} \pi_k(X, a) \quad \text{für alle } k \leq n,\ a \in A.$$

<u>Beweis</u>: Sei $X^{(n+1)} = A$, und konstruiere $X^{(n+\ell)}$ durch Induktion auf $\ell \geq 2$, durch Ankleben von $(n+\ell)$-Zellen auf $X^{(n+\ell-1)}$, mit der Eigenschaft: $\pi_k(X^{(n+\ell)}, x) = 0$ für alle x und $k = n+\ell-1$: in der Tat, da $i_\ell : X^{(n+\ell-1)} \hookrightarrow X^{(n+\ell)}$ dank (3.4) $(n+\ell-1)$-zusammenhängend ist, ist $\pi_k(A, a) \to \pi_k(X^{(n+\ell)}, a)$ auch ein Iso für $k \leq n$, und $\pi_k(X^{(n+\ell)}, x) = 0$ für k mit $n+1 \leq k \leq n+\ell-2$ (da $(X^{(n+\ell)}, X^{(n+\ell-1)})$

insbesondere 0-zusammenhängend ist, genügt es $\pi_k(X^{(n+l)},x)=0$ für $x\in X^{(n+l-1)}$ zu prüfen). Sei $m=n+l-1$. Für $a\in\pi_0 X^{(m)}$ wähle $x_a\in X^{(m)}$ mit $[x_a]=a$ und $\{\partial_i:(S^m,*)\to(X^{(m)},x_a)\mid i\in J_a,\ a\in\pi_0 X^{(m)}\}$ so dass $\{[\partial_i]\mid i\in J_a\}$ die Gruppe $\pi_m(X^{(m)},x_a)$ erzeugt. Nehme

$$\begin{tikzcd}
\coprod_a \bigvee_{i\in J_a} S^m \arrow[r, "\amalg\vee\partial_i"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & X^{(m)} \arrow[d, "i"] \\
\coprod_a \bigvee_{i\in J_a} D^{m+1} \arrow[r, "\amalg\vee\chi_i"] & X^{(m+1)}
\end{tikzcd}$$

Wir haben dann eine exakte Folge

$$\pi_{m+1}(X^{(m+1)},X^{(m)},x_a)\xrightarrow{\partial}\pi_m(X^{(m)},x_a)\to\pi_m(X^{(m+1)},x_a)\to 0 \qquad (3.4)$$

Dann gilt $\partial([\chi_i])=[\partial_i]$ $\forall i\in J_a$, sodass ∂ surjektiv ist, also $\pi_m(X^{(m+1)},x_a)=0$. #

Nun ein Beispiel wo π_* Hoklassen von Abbildungen klassifiziert:

3.19 Satz: Sei $n\geq 2$, X ein $(n-1)$-zusammenhängender punkt. CW-Komplex, und Y ein punktierter Raum mit $\pi_k(Y)=0$ für $k>n$. Dann ist folgende Abbildung bijektiv:

$$h_X:[X,Y]_*\to Hom_{Ab}(\pi_n X,\pi_n Y),\quad [f]\mapsto f_*.$$

Beweis: bemerke, dass $h_-:[-,Y]_*\Rightarrow Hom_{Ab}(\pi_n -,\pi_n Y)$ eine natürliche Transformation von Funktoren $Hotop_*\to Sets_*$ ist. Betrachte das komm. Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
{[X,Y]_*} \arrow[r, "h_X"] \arrow[d, "i^*"] & Hom(\pi_n X,\pi_n Y) \arrow[d, "(i_*)^*"] \\
{[X^{(n+1)},Y]_*} \arrow[r, "h_{X^{(n+1)}}"] & Hom(\pi_n X^{(n+1)},\pi_n Y)
\end{tikzcd}$$

Dank 3.17 ist i^* bijektiv, und dank 3.4 ist i_* ein Iso. Also genügt es 3.19 für $X=X^{(n+1)}$ zu beweisen. Da X $(n-1)$ zusammenhängend ist, können wir dank (3.15) annehmen, dass $X^{(n-1)}=\{x_0\}$. Also genügt es 3.19 zu beweisen unter der Annahme dass $K_0=\{x_0\}$ und $K_m=\emptyset$ für $m\neq n,n+1$. Wir können auch annehmen, dass die Klebe-Abbildung für die n und $(n+1)$-Zellen punktiert sind.

[Erklärung: die Klebe Abbildung für den n-Zellen kann man offensichtlich punktiert wählen; die für den $n+1$-Zellen auch, da $\{x_0\} \hookrightarrow X^{(n)}$ Kofaserung. Wenn die Klebe Abbildung homotop sind, so sind die Ergebnisse Homotopie-Äquivalent: Pushout

$$\begin{array}{ccc} (\coprod_i S^{m-1}) \times I & \xrightarrow{H} & X^{(m-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ (\coprod D^m) \times I & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Dann induzieren die Deform. Retraktionen

$$D^m \times 0 \cup S^{m-1} \times I \xleftarrow{\simeq} D^m \times I \xrightarrow{\simeq} D^m \times 1 \cup S^{m-1} \times I$$

$$X_0^{(m)} \xleftarrow{\simeq} Z \xrightarrow{\simeq} X_1^{(m)} \quad]$$

Also ist X der Abbildungskegel einer Abbildung

$$A = \bigvee_{e \in K_{n+1}} S^n \xrightarrow{f} B = \bigvee_{e \in K_n} S^n \longrightarrow C(f) \cong X \quad , \quad f = \bigvee \varphi_e ,$$

und φ_e KlebeAbbildung $\varphi_e : S^n \to \bigvee S^n$ von e. Exakte Folge

$$[A, Y]_* \xleftarrow{f^*} [B, Y]_* \longleftarrow [X, Y]_* \longleftarrow [\Sigma A, Y]_*$$

(Hier $[\Sigma A, Y]_* \cong [\bigvee \Sigma S^n, Y]_* \cong \bigoplus \pi_{n+1}(Y) = 0$)

Dank 1.54 ist $\pi_n(A) \xrightarrow{f_*} \pi_n(B) \to \pi_n(X) \to 0$ auch exakt: $A \hookrightarrow Zyl(f) \simeq B \longrightarrow X$ Kofaserfolge und A ist $(n-1)$ zusammenhängend, $(Zyl(f), A)$ ist $(n-1)$ zusammenhängend.

Also haben wir ein kom. Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccccc} [A, Y]_* & \xleftarrow{f^*} & [B, Y]_* & \longleftarrow & [X, Y]_* & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow h_A & & \downarrow h_B & & \downarrow h_X & & \\ Hom(\pi_n A, \pi_n Y) & \longleftarrow & Hom(\pi_n B, \pi_n Y) & \longleftarrow & Hom(\pi_n X, \pi_n Y) & \longleftarrow & 0 \end{array}$$

Aber h_A und h_B sind Iso: h_{S^n} ist klar ein Iso, und ebenso $h_{\vee S^n}$:

$$\begin{array}{ccc} [\bigvee S^n, Y]_* & \xrightarrow{\cong} & \prod [S^n, Y]_* \\ \downarrow & & \downarrow \prod h_{S^n} \\ Hom(\pi_n(\bigvee S^n), \pi_n(Y)) & \xrightarrow{\cong} & \prod Hom(\pi_n(S^n), \pi_n(Y)) \\ & \searrow^{\cong} & \wr\wr\wr \\ & & Hom(\bigoplus \pi_n(S^n), \pi_n(Y)) \end{array}$$

Aufgabe 7.3.C

Wir möchten: 5-Lemma $\Rightarrow h_X$ auch bijektiv, aber das ist kein Diagramm in Ab! Surjektivität: da brauchen wir nicht, dass die obere Zeile in Ab ist. Injektivität: Da brauchen wir nur, dass $[X, Y]_* \to [B, Y]_*$ injektiv ist. Aber wir können die obere Zeile als exakte Folge in Gruppen realisieren:

In der Tat, wir haben ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd} \bigvee\limits_{K_{n+1}} S^n \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"'] & \bigvee\limits_{K_n} S^n \arrow[d, "\simeq"] \\ \Sigma \bigvee S^{n-1} \arrow[r, "\Sigma g"] & \Sigma \bigvee S^{n-1} \end{tikzcd}$$

bis auf punktierte Homotopie: dank 3.11 ist $\Sigma_* : [\bigvee\limits_{K_{n+1}} S^{n-1}, \bigvee\limits_{K_n} S^{n-1}]_* \to [\bigvee\limits_{K_{n+1}} S^n, \bigvee\limits_{K_n} S^n]_*$

$(n \geq 2)$ bijektiv. Also $\exists\ g = \Sigma_*^{-1}(g)$, und $[X,Y]_* \to [B,Y]_*$ ist durch $[\Sigma C(g), Y] \xrightarrow{(\Sigma i)^*} [\Sigma(\bigvee S^{n-1}), Y]_*$ bis auf iso, mit $\bigvee\limits_{K_{n+1}} S^{n-1} \xrightarrow{g} \bigvee\limits_{K_n} S^{n-1} \xrightarrow{i} C(g)$. #

<u>3.20 Definition:</u> Sei $n \geq 0$ und sei A eine Abelsche Gruppe. Ein Eilenberg-Mac Lane Raum vom Typ $K(A,n)$ ist ein punktierter CW Komplex X mit

$$\pi_m(X) \cong \begin{cases} A & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

zusammen mit einem gewählten Isomorphismus $\alpha_X : \pi_n(X) \xrightarrow{\cong} A$.

<u>3.21 Theorem:</u> Sei $n \geq 0$ und sei A eine Abelsche Gruppe.

(a) Ein Eilenberg-Mac Lane vom Typ $K(A,n)$ existiert.

(b) Es ist eindeutig bis auf eindeutige Homotopie-Äquivalenz. Genauer gesagt, sind (X, α_X) und (Y, α_Y) E-M Räume vom Typ $K(A,n)$, so existiert eine Homotopie-Äquivalenz $f : X \to Y$ so dass $\alpha_X = \alpha_Y \circ f_*$, und f ist eindeutig bis auf Homotopie.

$\Rightarrow$ Notation: man sagt, X ist ein $K(A,n)$, oder $X = K(A,n)$, und α_X ist oft nicht erwähnt.

(c) $[K(A,n), K(B,n)]_* \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{Ab}(A,B)$

$$f \longmapsto \alpha_{K(A,n)} \circ f_* \circ \alpha_{K(B,n)}^{-1}.$$

(d) $K(A,n)$ ist eine kommutative H-Gruppe.

<u>Beweis:</u> Präsenzaufgabe 8.1. #

<u>3.22 Beispiele:</u> Wir haben schon einige EM-L Räume getroffen: A (als diskrete Gruppe) ist ein $K(A,0)$; $(S^1)^n$ ist ein $K(\mathbb{Z}^n, 1)$, $\mathbb{R}P^\infty$ ist ein $K(\mathbb{Z}/2, 1)$, $\mathbb{C}P^\infty$ ist ein $K(\mathbb{Z}, 2)$ $(+\alpha_X \ldots)$