5.24 Beispiel: diese zwei Lemma sind offensichtlich nützlich um i_* und p_* in Homologie zu bestimmen, aber auch manchmal um Differentiale zu bestimmen. In unserem Baby-beispiel 5.13 $S^1 \xrightarrow{i} S^3 \xrightarrow{h} S^2$: die Abbildung i ist offensichtlich null-homotop, also ist

$$i_*: H_k(S^1; A) \to H_k(S^3; A) \quad \text{null für } k \geq 1.$$

Aber dann $i_* = 0: H_k(S^1; A) = E^2_{0,k} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,k} \subset H_k(S^3; A)$, also muss $E^\infty_{0,k} = 0$ gelten. Daraus folgt, dass in 5.13 die Lösung (a) die einzige richtige ist.

Allgemeiner: wenn $i_*(x) = 0$ in $H_k(E; A)$ für $x \in H_k(F; A)$, so folgt, dass $E^2_{0,q} \twoheadrightarrow E^\infty_{0,q}$ x auf 0 abbildet, also dass x durch Differentiale getroffen wird.

Ein von den stärksten Werkzeuge für Berechnungen ist die algebraische Struktur anzureichern. typischerweise durch Multiplikative Strukturen.

5.25 Definition: Seien (E, d) und (E', d') zwei differential bigraduierte Modul über einen kommutativen Ring R, wobei d und d' selben Bigrad haben (also: $E = \bigoplus_{(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} E_{p,q}$ mit $E_{p,q}$ ein R-Modul, $|d| = (a, b)$, also
$d: E_{p,q} \to E_{p+a,q+b}$ und $d^2 = 0$).

Wir definieren das Tensorprodukt von (E, d) und (E', d') als $(E \otimes_R E', d'')$ mit

$$(E \otimes_R E')_{p,q} = \bigoplus_{\substack{u+v=p \\ s+t=q}} E_{u,s} \otimes E'_{v,t} \quad \text{und}$$

$$d''(x \otimes y) = d(x) \otimes y + (-1)^{(a+b)(u+s)} x \otimes d'(y).$$

(meistens gilt $(a+b) = \pm 1$ und ist dann ungerade).

Eine bigraduierte differential R-Algebra ist ein differential bigrad. R-Modul zusammen mit einem Homomorphismus (das Produkt von E)

von bigraduierten Moduln $\Psi : (E \otimes_R E, d'') \to (E, d)$ (im offensichtlichen Sinn), sodass die übliche Assoziativität gilt. Die Algebra heißt unitär, wenn $E_{0,0}$ eine Einheit 1 besitzt, und kommutativ falls $\Psi(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} \Psi(y \otimes x)$ für alle $(x \otimes y) \in E_{u,s} \otimes E_{v,t}$ gilt. $|x| = u+s$, $|y| = v+t$.

<u>5.26 Definition</u>: Eine <u>Spektralsequenz von R-Algebren</u> über einem kommutativen Ring R ist eine Spektral Sequenz $(E^r, d^r)_r$ wobei für jedes $r \geq 1$ (E^r, d^r) eine bigraduierte differential R-Algebra mit Produkt ist:

$$\Psi^r : E^r \otimes_R E^r \to E^r$$

so dass für jeden $r \geq 1$, das Produkt Ψ^{r+1} als

$$\Psi^{r+1} : E^{r+1} \otimes_R E^r \xrightarrow{\cong} H(E^r, d^r) \otimes_R H(E^r, d^r) \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow H(E^r \otimes E^r, d''^r) \xrightarrow{H(\Psi^r)} H(E^r, d^r) \xrightarrow{\cong} E^{r+1}$$

faktorisiert.

Man kann algemein die Theorie der Spektralsequenzen von Algebren entwickeln; das würde uns hier zu weit führen, und in einem ersten Treffen mit Sp-Seq ist es zu technisch.
Der Hauptbeispiel für uns ist der Beispiel einer filtrierten differential-Graduiert-Algebra.

<u>5.27 Theorem</u>: Sei (A, d) eine differential graduierte R-Algebra: also ist $A = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} A_p$ ein graduierter R-Modul mit einem Differential operator $d : A \to A$ von Grad -1, mit $d^2 = 0$, und einem assoziativen Produkt $\mu : A \otimes_R A \to A$, das ein Hom. von Kettenkomplexe ist $\left(d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|} a\, d(b) \right)$.
Eine Filtrierung $\cdots \subset F_s \subset F_{s+1} \subset \cdots A$ von A durch Unterkettenkomplexe heißt <u>multiplikativ</u>, falls

$\mu(F_{s_1} \otimes F_{s_2}) \subset F_{s_1+s_2}$ für alle $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}$ gilt.

Dann ist die Sp. Seq. (E^r, d^r), die dieser Filtrierung assoziiert ist, eine spektral sequenz von R-Algebren. Ist die Filtrierung $\{F_s\}$ von A beschränkt, so erhalten wir auf E^∞ eine R-Algebra Struktur $E^\infty \otimes_R E^\infty \xrightarrow{\mu^\infty} E^\infty$. Diese Struktur konvergiert gegen die R-Algebra struktur von $H_*(A)$ im Sinne, dass

$$\begin{tikzcd}
E^\infty_s \otimes_R E^\infty_u \arrow[r, "\mu^\infty"] \arrow[d, "\cong"] & E^\infty_{s+u} \arrow[d, "\cong"] \\
FH_s/FH_{s-1} \otimes FH_u/FH_{u-1} \arrow[r, "\mu_*"] & FH_{s+u}/FH_{s+u-1}
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Hier ist μ_* durch

$$\begin{array}{ccc}
H(A) \otimes H(A) & \xrightarrow{\mu_*} & H(A) \\
\cup & & \cup \\
FH_s \otimes FH_u & \longrightarrow & FH_{s+u}
\end{array}$$

modulo $FH_s \otimes FH_{u-1} + FH_{s-1} \otimes FH_u \subset FH_s \otimes FH_u$ induziert.

Beweis: nicht zu schwierig, siehe zum Beispiel McCleary, Th. 2.14 Seite 45.

Serre hat bewiesen, dass die Spektral-sequenz einer Faserung (in Homologie mit Koeff. in einem kom. Ring) eine Spektral-sequenz von Algebren ist (bezüglich seiner Konstruktion mit kubischer Kohomologie!).

Im Fall von Homologie hat man für H-Räume auch eine Spektral Sequenz von Algebren (bezüglich Pontrjagin Produkt).

Kurze Zusammenfassung: Sind $E \xrightarrow{p} B$ und $E' \xrightarrow{p'} B'$ zwei Serre Faserungen, so ist offensichtlich $E \times E' \xrightarrow{p\times p'} B \times B'$ auch eine Serre Faserung. Eine Shuffle Abbildung

$$S_{**}(p;R) \otimes_R S_{**}(p';R) \longrightarrow S_{**}(p\times p'; R)$$

soll dann „eine Paarung" von Spektral sequenzen

(*) $E^r(p) \otimes_R E^r(p') \longrightarrow E^r(p\times p')$ induzieren, so dass wir auf E^2-Terme (unseren alten Freund) das Kreuz-Produkt $\times$ erhalten. Sind nun E und B H-Räume (mit strikter Einheit $e_0 \in E$, $e_1 \in B$), und ist P mit diesen Strukturen verträglich, im Sinne, dass

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \xrightarrow{\mu_E} & E \\ {\scriptstyle p\times p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ B \times B & \xrightarrow{\mu_B} & B \end{array}$$

kommutiert, so erhält man einen Morphismus von Spektralsequenzen $E^r(P\times P) \xrightarrow{\phi_r} E^r(P)$; verknüpft mit dem Kreuz-Produkt liefert ϕ dann eine R-Algebra-Struktur auf $(E^r(P), d^r)_r$.

Hauptschwierigkeit hier: beweisen, dass (*) auf E^2 das $\times$-Produkt ist (und auf E^∞ vom $\times$-Produkt induziert).

Die Serre Spektralsequenz in Kohomologie hat natürlich den Vorteil, dass sie immer über Produkte verfügt (Koef in einem kom. Ring): Die Diagonale

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Delta} & E\times E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p\times p} \\ B & \xrightarrow{\Delta} & B\times B \end{array}$$

ist ein Morphismus von Serre-Faserungen.

Wir brauchen sie zum Beispiel im K-Theorie Seminar und behandeln sie kurz zur Orientierung.

Ist $E \xrightarrow{p} B$ eine Serre Faserung, so erhalten wir wie in S.7 ein lokales System $\mathcal{T}_b = H^q(F_b; A)$ auf B. Kohomologie mit lokalen Koeffizienten definiert man analog (siehe Whitehead, S. 270). Hier betrachten wir die Gruppe

$$S^n(B;\mathcal{T})$$

aller Funktionen $\mathrm{Sing}_n B \xrightarrow{\varphi} \coprod_{b\in B} \tau_b$, die einem Simplex $\sigma: \Delta^n \to B$ einem Element $\varphi(\sigma) \in \tau_{\sigma_0}$ zuordnet. Die Addition von Werten induziert eine Abelsche Gruppe Struktur auf $S^n(B;\tau)$.

Wir setzen $\delta = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i d^i : S^n(B,\mathcal{T}) \to S^{n+1}(B,\mathcal{T})$

mit

$$d^i(\varphi)(\sigma) = \begin{cases} \tau_{\sigma_{01}}^{-1}(\varphi(\sigma\circ\delta_0)) & i=0 \\ \varphi(\sigma\circ\delta_i) & 1\le i\le n+1 \end{cases}$$

mit $\tau_{\sigma_{01}}^{-1}: H^q(F_{\sigma_1};A) \to H^q(F_{\sigma_0};A)$ (oder $\tau_{\sigma_{01}}$ mit Kontrav. System!)

Die Homologie dieses Kettenkomplexes ist dann die Kohomologie von B mit lokalen Koeffizienten im System $\mathcal{T}$: $H^*(B, \tau)$.

5.28 Theorem: Sei $p: E \to B$ eine Serre Faserung mit B 0-zusammenhängend, und sei R ein kommutativer Ring.
Dann haben wir eine Spektralsequenz von R-Algebren (die graduiert-kommutativ und unitär sind)

$$E_2^{p,q} = H^p(B; \mathcal{H}^q(F;R)) \Rightarrow H^{p+q}(E;R)$$

die stark gegen $H^*(E;R)$ (als R-Algebra) konvergiert.
Außerdem ist das Produkt auf E_2 durch

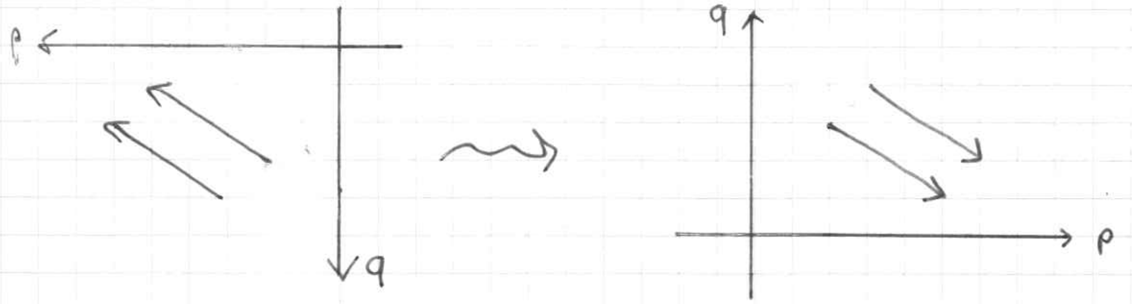
$$\begin{tikzcd}
E_2^{p,q} \otimes_R E_2^{s,t} \arrow[rr] \arrow[d, "="'] \arrow[drr, phantom, "1"] & & E_2^{p+s,q+t} \arrow[d, "="] \\
H^p(B,\tau^q) \otimes_R H^s(B;\tau^t) \arrow[rr, "\cup"] \arrow[dr, "\times"'] & & H^{p+s}(B,\tau^{q+t}) \\
& H^{p+s}(B\times B, \mathcal{H}^{q+t}(F\times F;R)) \arrow[ur, "\Delta^*"'] &
\end{tikzcd}$$

$(\tau^q = \mathcal{H}^q(F;R))$

(cup-Produkt) gegeben, wobei (1) bis auf dem Zeichen $(-1)^{(p+q)s}$ kommutiert.

Erklärung: die Dress Konstruktion kann man auch in Kohomologie verwenden; man erhält dann einen Doppelkomplex $S^{p,q}(\mathcal{L})$ des 3. Quadrant, so dass die zugeordnete Spektralsequenzen stark gegen $H^*(\mathrm{Tot}(S^{**}(\mathcal{L})))$ konvergieren.
Die Identifizierung von $H^*(\mathrm{Tot}(S^{**}(P))) \cong H^*(E;R)$ und ${}^{v}E_2^{**} = H^*(B;\mathcal{H}^*(F;R))$ sind dual zu 5.10 und 5.11. Für eine genaue Beschreibung von $\times$-Produkte mit lokalen Koeff siehe Whitehead, XIII §8.
Die Schwierigkeit hier ist die Identifizierung mit dem cup-Produkt auf E_2 und $H^*(\mathrm{Tot}\, S^{**})$. Für die Sp.Seq durch CW-Filtrierung von B, siehe Whitehead XIII oder Kahler. #

5.29 Bemerkung: die Dress Konstruktion liefert eine Spektralsequenz des 3. Quadrant. Wir "reflektieren" sie in der Axis "$y=-x$" um eine Sp. Seq des 1. Quadrant zu bekommen, von Kohomologischen Typ: $d_r : E_r^{s,t} \to E_r^{s+r,\, t-r+1}$.



5.30 Beispiel: Wir wissen schon: $H^k(\Omega S^n;\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & k = i(n-1),\ i\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

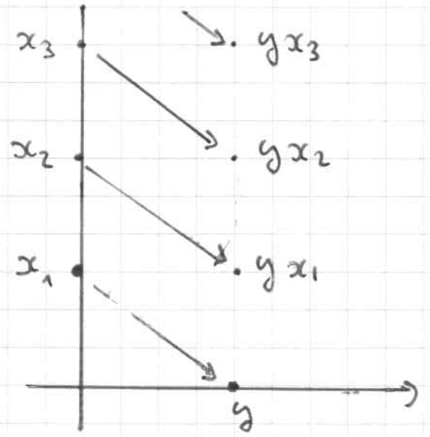
Wir können auch das Cup-Produkt mit Hilfe von 5.28 bestimmen.

Sei $x_i \in H^{i(n-1)}(\Omega S^n;\mathbb{Z})$ ein gewählter Erzeuger.

(a) $n \geq 3$ ungerade, $\Omega S^n \to PS^n \xrightarrow{p} S^n$. Der E_2-Term ist also

$$E_2^{p,q} = H^p(S^n; H^q(\Omega S^n;\mathbb{Z})) = H^p(S^n;\mathbb{Z}) \otimes H^q(\Omega S^n;\mathbb{Z})$$

gegeben; $H^*(S^n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}\{1, y\}$ mit $|y| = n$.



E_n

Wir haben $d_2 = \dots = d_{n-1} = 0$ und $E_2 = E_n$.

Wir können x_i induktiv so wählen, dass $d_n(x_i) = y\, x_{i-1} := y \otimes x_i$.

Wir wissen a priori nicht was x_1^2 ist, aber es gilt:

$$d_n(x_1^2) = d_n(x_1)\cdot x_1 + (-1)^{n-1} x_1 \cdot d_n(x_1)$$

$$= y\cdot x_1 + x_1 \cdot y = 2y\,x_1 = d_n(2x_2).$$

Da $d_n : E_n^{0,2(n-1)} \to E_n^{n,n-1}$ ein Iso ist, folgt $x_1^2 = 2x_2$. Analog $d_n(x_1^k) = k\, x_1^{k-1} y$ und per Induktion folgt $x_1^k = k! \cdot x_k$. Also ist als $\mathbb{Z}$-Alg:

$H^*(\Omega S^n:\mathbb{Z}) \cong \Gamma_{\mathbb{Z}}(x_1)$ (dividierte Potenzen $\Gamma_{\mathbb{Z}}(x_1) \subset \mathbb{Q}[x_1]$, als $\mathbb{Z}$-Modul durch $\frac{x_1^k}{k!}$ erzeugt).