Unser nächstes Ziel ist zu zeigen, dass Homologie bis auf natürlichen Isomorphismus durch ihre Einschränkung auf die Kateg. der CW-Komplexe und stetige Abbildungen bestimmt ist. Homologie hatten wir mit Hilfe des singulären Kettenkomplex $(S_\cdot(X), d)$ eines Raumes definiert, mit $S_k(X) = \mathbb{Z}\{\mathrm{Sing}_k X\}$ und $\mathrm{Sing}_k X = \{\Delta^k \xrightarrow{\sigma} X\}$.
Der standard k-simplex Δ^k können wir als CW-Komplex mit $\binom{k+1}{n+1}$ n-Zellen auffassen; sei $\Delta^{k,n}$ sein n-Skelett.

3.23 Definition: Sei (X, A) ein Paar von Räumen. Für $n \geq 0$, sei $\mathrm{Sing}_k^{(A,n)}(X) = \{\sigma : \Delta^k \to X \mid \sigma(\Delta^{k,n}) \subset A\}$ und sei $S_k^{(A,n)}(X) = \mathbb{Z}\{\mathrm{Sing}_k^{(A,n)}(X)\} \subset S_k(X)$.
Es gilt offensichtlich $d(S_k^{(A,n)}(X)) \subset S_{k-1}^{(A,n)}(X)$, und $(S_\cdot^{(A,n)}(X), d) \overset{\phi}{\hookrightarrow} (S_\cdot(X), d)$ ist ein Unterkomplex.

3.24 Satz: Sei $n \geq 0$; ist (X, A) n-zusammenhängend, so ist ϕ eine Kettenhomotopieäquivalenz.

Beweis: (A) Sei $\mathrm{Sing}_k^I(X) = \{\Delta^k \times I \to X\}$.
Wir definieren für alle $k \geq 0$, durch Induktion auf k, ein Abbildung $P : \mathrm{Sing}_k(X) \to \mathrm{Sing}_k^I(X)$, mit folg. Eig.:
Sei $P_t(\sigma) : \Delta^k \to X$ durch $P_t(\sigma)(x) = P(\sigma)(x,t)$ gegeben. Dann

(1) $P_0(\sigma) = \sigma$

(2) $P_1(\sigma) \in \mathrm{Sing}_k^{(A,n)}(X)$

(3) $P_t(\sigma) = \sigma \quad \forall t \in I$ falls $\sigma \in \mathrm{Sing}_k^{(A,n)}(X)$

(4) $P(\sigma) \circ (d_i \times id) = P(\sigma \circ d_i)$, für $d_i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$, $0 \leq i \leq k$.

(dank (3) ist P auf $\mathrm{Sing}_k^{(A,A)}(X)$ also bereits definiert).

$k=0$: $P(\sigma)$ ist ein Weg von $\sigma(e_0)$ nach ein Punkt $a = P_1(\sigma)(e_0) \in A$.

$k \geq 1$ und P_{k-1} definiert, $\sigma \notin \mathrm{Sing}_k^{(A,n)}(X)$. Dann sei
$$\widetilde{P}(\sigma) : \big((\underbrace{\Delta^k \times \{0\}}_{\sigma}) \cup (\underbrace{\partial\Delta^k \times I}_{\cup_i P(d_i \times id)}),\ \partial\Delta^k \times \{1\}\big) \to (X, A)$$
durch definiert.

Wir unterscheiden 2 Fälle:

(i) <u>$k \leq n$</u>, also $\Delta^{k,n} = \Delta^k$ und wir müssen $\tilde{P}(\sigma)$ zu $P(\sigma)$ so erweitern, dass $P_1(\sigma)(\Delta^k) \subset A$. Im Beweis von 2.5 haben wir einen Homöo $I^k \times I \xrightarrow{h} \Delta^k \times I$ (unter geeigneter Identifizierung von Δ^k mit I^k) definiert, mit der Eigenschaft:

$$I^k \times \{0\} \xrightarrow{\cong} \Delta^k \times \{0\} \cup \partial\Delta^k \times I,$$

$$\partial I^k \times \{0\} \xrightarrow{\cong} \partial\Delta^k \times \{1\}, \quad I^k \times \{1\} \cup \partial I^k \times I \xrightarrow{\cong} \Delta^k \times \{1\}.$$

Da (X,A) n-zusammenhängend ist, ist die Klasse von

$$(I^k, \partial I^k) = (I^k \times \{0\}, \partial I^k \times \{0\}) \xrightarrow{\tilde{P}(\sigma)\circ h} (X, A)$$

in $\pi_k(X,A) = 0$ null. Das bedeutet, dass wir eine Homotopie $\tilde{P}(\sigma)\circ h \overset{Q}{\simeq} g$ rel ∂I^k haben, mit $g(I^k)$

Sei $P(\sigma) = Q \circ h^{-1} : \Delta^k \times I \to X$. Dann gilt

$P(\sigma)\big|_{\Delta^k \times \{0\} \cup \partial\Delta^k \times I} = \tilde{P}(\sigma)$ und $P(\sigma)(\Delta^k \times \{1\}) =$

$Q(I^k \times \{1\} \cup \partial I^k \times I) = Q(I^k \times \{1\}) \cup Q(\partial I^k \times 0) =$

$g(I^k) \cup \tilde{P}(\sigma)(\partial\Delta^k \times \{1\}) \subset A$. Somit gelten (1,2,3,4) für $P(\sigma)$.

<u>(ii) $k > n$:</u> $\partial\Delta^k \hookrightarrow \Delta^k$ ist eine Kofaserung, und wir erweitern einfach $\tilde{P}(\sigma)$ zu $P(\sigma) : \Delta^k \times I \to X$. (1), (3), (4) sind per Definition von $\tilde{P}(\sigma)$ erfüllt, und (2) gilt auch da $\Delta^{k,n} \subset \partial\Delta^k$.

(B) Definiere $\rho_\cdot : S_\cdot(X) \to S_\cdot^{(A,n)}(X)$ durch $\rho_\cdot(\sigma) = P_1(\sigma)$ (und erweitern linear). Dann gilt $\rho_\cdot(\sigma \circ d_i) = P_1(\sigma \circ d_i)$ $= P_1(\sigma) \circ d_i$ dank (4), also ist $\rho_\cdot$ eine Abbildung von Kettenkx.

Es gilt auch $\rho_\cdot \circ \phi_\cdot = id_{S_\cdot^{(A,n)}(X)}$ dank (3).

Seien $i_0, i_1 \in S_k(\Delta^k \times I)$ die singulär q-Simplexen, die durch $\Delta^k = \Delta^k \times \{0\} \hookrightarrow \Delta^k \times I$ und $\Delta^k = \Delta^k \times \{1\} \hookrightarrow \Delta^k \times I$ definiert sind.

In I, 5.28 (Homotopieinvarianz für Homologie) haben wir eine Ketten Homotopie $\mathcal{P} : S_*(\Delta^k) \to S_{*+1}(\Delta^k \times I)$ definiert, mit $(d\,\mathcal{P}_n + \mathcal{P}_{n-1} d)(id_{\Delta^k}) = i_1 - i_0$.

Wir definieren eine Ketten Homotopie $\eta : S_*(X) \to S_{*+1}(X)$

zwischen $id_{S_*(X)}$ und $\phi\circ\rho$ durch: $\eta(\sigma) = P(\sigma)_* \circ \underline{P}(id_{\Delta^k})$:

$$\begin{array}{ccccc} S_k(\Delta^k) & \xrightarrow{\underline{P}} & S_{k+1}(\Delta^k\times I) & \xrightarrow{P(\sigma)_*} & S_{k+1}(X) \\ \cup & & & & + \text{ lin. erw.} \\ id_{\Delta^k} & & \longmapsto & & \eta(\sigma). \end{array}$$

Dann rechnet man $d\eta(\sigma) = d\,P(\sigma)_*\,\underline{P}(id_{\Delta^k}) = P(\sigma)_*[d\underline{P}(id_{\Delta^k})] =$

$P(\sigma)_*[i_1 - i_0 - \underline{P}d(id_{\Delta^k})] = \phi\circ\rho(\sigma) - \sigma - P(\sigma)_*\underline{P}d(id_{\Delta^k})$

und $\eta d(\sigma) = \eta\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\sigma\circ d_i\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i P(\sigma\circ d_i)_*\,\underline{P}(id_{\Delta^{k-1}})$

$= P(\sigma)_* \sum_{i=0}^{k}(-1)^i (d_i\times id)_*\,\underline{P}(id_{\Delta^{k-1}}) \overset{(*)}{=} P(\sigma)_*\,\underline{P}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(d_i\circ id_{\Delta^{k-1}})$

$= P(\sigma)_*\,\underline{P}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i(id_{\Delta^k}\, d_i) = P(\sigma)_*\,\underline{P}\,d(id_{\Delta^k})$.

(*): Natürlichkeit von $\underline{P}$. #

<u>3.25 Korollar</u>: Sei $f: Y\to X$ eine n-zusammenhängende Abbildung, und Π eine Abelsche Gruppe. Dann ist

$f_*: H_k(Y;\Pi)\to H_k(X;\Pi)$ ein Iso für $k<n$, Epi für $k=n$

$f^*: H^k(X;\Pi)\to H^k(Y;\Pi)$ ein Iso für $k<n$, Mono für $k=n$

<u>Beweis</u>: Mit Hilfe des Zylinders können wir annehmen, dass f eine Inklusion $Y\hookrightarrow X$ ist. Wenn $k\le n$ gilt: Die Inklusion $i: S_k(Y)\to S_k^{(Y,n)}(X)$ ist die Identität, da $\Delta^{k,n}=\Delta^k$. Wir haben also ein Morphismus von Ketten komplex

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & S_{n+1}(Y;\Pi) \arrow[r] \arrow[d, hook] & S_n(Y;\Pi) \arrow[r] \arrow[d, "="] & S_{n-1}(Y;\Pi) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & S^{(Y,n)}_{n+1}(X;\Pi) \arrow[r] & S^{(Y,n)}_n(X;\Pi) \arrow[r] & S_{n-1}(X;\Pi) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$\left(S_m^{(Y,n)}(X,\Pi) := S_m^{(Y,n)}(X)\otimes\Pi\right)$

Woraus folgt: $H_k(Y,\Pi)\xrightarrow{i_*} H_k(S_\bullet^{(Y,n)}(X;\Pi),d)$ ist ein iso für $k<n$ und ein Epi für $k=n$.

Aber $f_*: H_k(Y,\Pi)\xrightarrow{i_*} H_k(S_\bullet^{(Y,n)}(X;\Pi),d)\xrightarrow{\rho_*} H_k(X,\Pi)$ und ρ_* ist ein Iso für alle k, dank 3.24. Die Aussage folgt für Homologie. Für Kohomologie ist der Beweis "dual":

Diesmal:

$$\begin{tikzcd} \cdots & \operatorname{Hom}(S^{(Y,n)}_{n+1}(X),\Pi) \arrow[l] \arrow[d, two heads] & \operatorname{Hom}(S^{(Y,n)}_n(X),\Pi) \arrow[l] \arrow[d, "="] & \cdots \arrow[l] \arrow[d, "="] \\ \cdots & S^{n+1}(Y;\Pi) \arrow[l] & S^n(Y;\Pi) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

#

3.26 Theorem: Eine schwache Homotopieäquivalenz induziert ein Isomorphismus auf singuläre Homologie- und Kohomologie-Gruppen mit beliebigen Koeffizienten.

3.27 Bemerkung: Sei $(X, A, *)$ ein punktier Paar ist, mit $\pi_0(A) = \{[*]\}$. Sei $S_k^{(A,n)}(X, *)$ genau wie $S_k^{(A,n)}(X)$ definiert, wobei wir zusätzlich von den Erzeugern $\sigma : \Delta^k \to X$ verlangen, dass außer $\sigma(\Delta^{k,n}) \subset A$ noch $\sigma(\Delta^{k,0}) = \{*\}$ gilt. Ist (X, A) n-zusammenhängend, so ist auch $S_\cdot^{(A,n)}(X, *) \hookrightarrow S_\cdot(X)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz: Wir müssen $P : \mathrm{Sing}_0(X) \to \mathrm{Sing}_0^I(X)$ nun so wählen, dass $P_t(\sigma)$ ein Weg von $\sigma(e_0)$ nach $*$ ist. #

Nun beweisen wir das Hurewicz-Iso-Theorem. In II, 2.13 hatten wir Erzeuger $i_n \in \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z})$ und $j_n \in H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z})$ so gewählt, dass $\tilde{\partial}_*(j_n) = i_{n-1}$ und $P_*(j_n) = i_n$, wobei $\tilde{\partial}_* : H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to \tilde{H}_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ und $P_* : H_n(D^n, S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_n(S^n, *; \mathbb{Z}) = \tilde{H}_n(S^n; \mathbb{Z})$ von der Quotienten-Abbildung induziert ist: $D^n \twoheadrightarrow D^n/S^{n-1} \cong S^n$.

3.28 Definition + Lemma: Sei X ein punktierter Raum, $n \geq 0$. Wir definieren $h_n^X : \pi_n(X) \to \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$ durch $h_n([\alpha]) = \alpha_*(i_n)$ $([\alpha] \in \pi_n(X) = [S^n, X]_*)$. Dann ist h_n^X ein Homomorphismus von Gruppen wenn $n \geq 1$, und h_n definiert eine natürliche Transformation von Funktoren.

__Beweis__: h_n^X ist wohldefiniert: dass folgt aus der Homotopie-Invarianz von Homologie. Es ist auch klar, dass h_n eine natürliche Transformation ist: Sei $f : X \to Y$ gegeben, dann gilt $h_n^Y(f_*[\alpha]) = h_n^Y[f\alpha] = (f\alpha)_*(i_n) = f_*(\alpha_*(i_n))$ $= f_* h_n^X[\alpha]$.

Additivität von h_n^X: wir hatten in I.5.60 ein natürlicher Homomorphismus $i_{1*}+i_{2*}: \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(Y) \longrightarrow \tilde{H}_n(X \vee Y)$ definiert (es ist ein Iso wenn X, Y wohlpunktiert sind).

Wir haben

$$\begin{tikzcd} \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "k_*"] \arrow[dr, "d"'] & \tilde{H}_n(S^n \vee S^n) \arrow[r, "(\alpha\vee\beta)_*"] \arrow[d, leftrightarrow, "\cong"] & \tilde{H}_n(X \vee X) \arrow[r, "\nabla_*"] & \tilde{H}_n(X) \\ & \tilde{H}_n(S^n) \oplus \tilde{H}_n(S^n) \arrow[r, "\alpha_* \oplus \beta_*"] & \tilde{H}_n(X) \oplus \tilde{H}_n(X) \arrow[u] \arrow[ur, "+"'] & \end{tikzcd}$$

ein komm. Diagramm: für alle $[\alpha], [\beta] \in \pi_n(X)$; hier ist d durch $d(\beta) = (\beta, \beta)$ definiert. Also $h_n^X([\alpha]+[\beta]) = h_n^X[\alpha+\beta] = [\alpha+\beta][i_n]$

$= \nabla_* \circ (\alpha\vee\beta)_* \circ k_*[i_n] = \alpha_*[i_n] + \beta_*[i_n] = h_n^X([\alpha]) + h_n^X([\beta])$.

#

Der Homomorphismus h_n heißt der <u>Hurewicz-Homomorphismus</u>

<u>3.29 Theorem</u> [(Absolute) Hurewicz-Isomorphismus-Theorem]: $n \geq 2$ und sei X ein $(n-1)$-zusammenhängender Raum. Dann ist

$$h_n^X: \pi_n(X) \longrightarrow \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus. Falls $n = 1$ und X 0-zusammenhängend, so ist $h_1^X: \pi_1(X)^{ab} \longrightarrow \tilde{H}_1(X; \mathbb{Z})$ ein Iso.

<u>Beweis</u>: Der Fall $n=1$ hatten wir in I 5.82 bewiesen. Dank 3.26 können wir mit Hilfe von CW-Approx annehmen, dass X ein CW Komplex mit $X^{(n-1)} = \{x_0\}$ ist. Andererseits haben wir ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd} \pi_n(X^{(n+1)}) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "h_n^{X^{(n+1)}}"'] & \pi_n(X) \arrow[d, "h_n^X"] \\ H_n(X^{(n+1)}; \mathbb{Z}) \arrow[r, "\cong"] & H_n(X; \mathbb{Z}) \end{tikzcd}$$

wo die Wagerechte Iso von der Inklusion induziert sind.

Wir können ferner annehmen, dass $X = X^{(n+1)}$, also ist X ein Abbildungskegel $X = C(f)$: $\underbrace{\bigvee_{e \in K_{n+1}} S^n}_{A} \xrightarrow{f} \underbrace{\bigvee_{f \in K_n} S^n}_{B} \longrightarrow X$ Cofaserfolge.

Wir haben ein komm. Diagramm mit Exakten Zeilen (1.54 + 1.55 für π_n)

$$\begin{tikzcd} \pi_n(A) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(B) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(X) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \tilde{H}_n(A) \arrow[r] & \tilde{H}_n(B) \arrow[r] & \tilde{H}_n(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

5-Lemma $\Rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass $h_n^{S^n}$ ein Iso.

#