(i) Falls $P(x) \in P(f^{-1}(X \setminus V))$ so gilt $\tau P(x) = 1$,
also $H_1(x) \in J^{n-1}$ und $g(x) = * \in U \cap V \subset V$.

(ii) Falls $P(x) \notin P(f^{-1}(X \setminus V))$, so folgt $P H_1(x) = P(x) \notin P(f^{-1}(X \setminus V))$,
also $H_1(x) \notin f^{-1}(X \setminus V)$, also $g(x) = f H_1(x) \notin X \setminus V$.

Also $g(I^n) \subset V$. Ebenso gilt $g(I^{n-1} \times 0) \subset U \cap V$:
Es genügt zu zeigen: $g(I^{n-1} \times 0) \subset U$. Sei $x \in I^{n-1} \times 0$.

(i) Falls $x \in P(f^{-1}(X \setminus U))$, so folgt $\tau(x) = 0$ und
$H_1(x) = x$; aber $f(I^n \times 0) \subset U$, also $g(x) = f(x) \in U$.

(ii) Falls $x \notin P(f^{-1}(X \setminus U))$, so folgt wie in (ii) oben
$H_1(x) \notin f^{-1}(X \setminus U)$ und $g(x) \in U$.

Es folgt: $g: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (V, U \cap V, *)$. Es bleibt noch zu zeigen: $f \circ H$ ist eine Homotopie der Art

$$(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \longrightarrow (X, U, *).$$

Aber $f \circ H_t(x) = f(x) = *$ falls $\in J^{n-1}$, und der Beweis, dass $f \circ H_t(x) \in U$ für $x \in J^{n-1} \times 0$ und $t \in I$ ist genau gleich zum Beweis $f \circ H_1(x) \in U$ oben.

Also ist bewiesen: $[f] = i_*[g]$. # (1)

(2) Wir zeigen nun: eine Abbildung $g: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, U, *)$ existiert, mit $f \simeq g$ (als Ab. von Tripeln) und g erfüllt die Gleichung ✡ in (1).

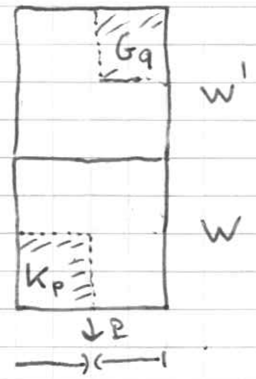
Dazu zerlegen wir $I^n = \bigcup_{W \in \mathcal{V}} W$ in Teilwürfeln W mit $\dim(W) = n$, $\operatorname{diam}(W) = 1/N$ und $W \cap W'$ ist eine gemeinsame Seite, so dass $f(W) \subset U$ oder $f(W) \subset V$, $\forall W \in \mathcal{V}$.

Sei $\mathcal{W}$ die Menge aller Würfeln in $\mathcal{V}$ und allen deren Seiten.

Sei $\mathcal{W}_U = \{W_1, \dots, W_r \mid W_i \in \mathcal{W},\ f(W_i) \subset U,\ f(W_i) \not\subset V\}$
und $\mathcal{W}_V = \{W_1', \dots, W_s' \mid W_i' \in \mathcal{W},\ f(W_i') \subset V,\ f(W_i') \not\subset U\}$

Hier sind diese Würfeln so nummeriert, dass $\dim(W_i) \leq \dim(W_{i+1})$ und $\dim(W_i') \leq \dim(W_{i+1}')$.

Für die Würfel $W \in \mathcal{W} \setminus (\mathcal{W}_u \cup \mathcal{W}_v)$ gilt $f(W) \subset U \cap V$.



Idée zur Konstruktion von g:

(a) deformiere f in W für jeden $W \in \mathcal{W}_u$ so dass $f^{-1}(X \setminus V) \cap W \subset K_p(W)$ gilt.

(a) deformiere f in W' für jeden $W' \in \mathcal{W}_v$ so dass $f^{-1}(X \setminus U) \cap W' \subset G_q(W')$ gilt.

Wegen unserer Bedingung $p + \underbrace{q - 2}_{} \geq n$ wird folgen, dass (✡) dann gilt. ($\Rightarrow K_p(W), G_q(W)$ klein genug).

(a) Für $k \in \{0, \dots, r\}$ konstruiere induktiv $f_k : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, U, *)$ mit

(i) $f(W) \subset \left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right. \Rightarrow f_k(W) \subset \left\{ \begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right. \quad \forall\, W \in \mathcal{W}$

(ii) $f_k^{-1}(X \setminus V) \cap W_j \subset K_p(W_j) \quad \forall\, j \leq k$

(iii) $f_{k-1} \simeq f_k$ (als Ab. von Tripeln $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, U, *)$).

Sei $f_0 = f$, und sei nun $1 \leq k \leq r$ so dass f_{k-1} definiert ist.

Sei W eine echte Seite von W_k. Dann gilt

$$f_{k-1}^{-1}(X \setminus V) \cap W \subset K_p(W).$$

In der Tat, falls $W \notin \mathcal{W}_u$, so $f_{k-1}(W) \subset V$ dank (i), also $f_{k-1}^{-1}(X \setminus V) \cap W = \emptyset \subset K_p(W)$.

Falls $W \in \mathcal{W}_u$, dann $W = W_i$ für ein $i \leq k-1$, und dann ist (ii).

<u>Behauptung</u>: es gibt eine Homotopie $H^k : W_k \times I \to X$ rel ∂W_k mit $H^k_0 = f_{k-1}|_{W_k}$ und $(H^k_1)^{-1}(X \setminus V) \subset K_p(W_k)$.

In der Tat: wir unterscheiden drei Fälle:

(1) $\dim W_k = 0$, also $W_k = \{z\}$, $z \in I^n$. Es gilt $K_p(W_k) = \emptyset$. Also $H^k_1(z) \notin X \setminus V = U \setminus U \cap V$, also $H^k_1(z) \in U \cap V$. Deshalb ist H^k ein Weg in U von $f_{k-1}(z)$ nach einem Punkt in $U \cap V$. Aber $z \in I^n$, $n > 0$, also können wir in I^n einen Weg von z nach J^{n-1} wählen: $\omega : I \to I^n$.

Dann existiert ein $t \in I$ mit $\omega(t) \in f_{k-1}^{-1}(U \cap V)$ und $\omega([0,t]) \subset f_{k-1}^{-1}(U)$. Dann nehmen wir $H^k : \{z\} \times [0,1] \xrightarrow{\cong} [0,t] \xrightarrow{\omega} I^n \xrightarrow{f_{k-1}} U$.

(2) $0 < \dim W_k < p$. Dann gilt $K_p(W') = \emptyset$, also wegen (ii) $f_{k-1}(W') \subset U \cap V$, für alle echten Seiten W' von W_k. Insbesondere definiert die Einschränkung von f_{k-1} eine Abbildung

$$f_{k-1}|_{W_k} : (W_k, \partial W_k) \longrightarrow (U, U \cap V)$$

und eine Klasse aus $\pi_{\dim(W_k)}(U, U \cap V) = 0$. Also $f_{k-1}|_{W_k} \simeq c$. Die gesuchte Homotopie ist uns von Lemma 1.44 gegeben.

(3) $\dim W_k \geq p$: die Existenz von H_k ist von Lemma 1.46 gegeben. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun möchten wir $f_k|_{W_k} = H_1^k$ nehmen; wir müssen dafür die Homotopie H^k zu einer Homotopie $G^k : I^n \times I \longrightarrow X$ erweitern, mit den gewünschten Eigenschaften.

Dazu definieren wir $Z_U = \bigcup \{W \in \mathcal{W} \mid f(W) \subset U\}$, und ähnlich $Z_V = \bigcup \{W \in \mathcal{W} \mid f(W) \subset V\}$.

Auf $Z_V \cup W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1}$ nehmen wir die konstante Homotopie G^k mit $G^k_t = f_{k-1}$; auf W_k nehmen wir H^k; das gilt, da $H^k_t|_{\partial W_k} = f_{k-1}|_{\partial W_k}$.

Es bleibt noch G^k auf $(W_{k+1} \cup \ldots \cup W_r) \times I$ zu definieren; das machen wir induktiv auf $j = k+1, \ldots, r$.

Dabei müssen wir nur darauf achten, dass

1°) $G^k_j(W_j \times I) \subset U$ ($\Rightarrow$ (i) gilt),

und

2°) $G^k_0 = f_{k-1}$ ($\Rightarrow$ (iii) gilt);

Aber das gilt, da $\partial W_j \subset W_j$ eine Kofaserung ist.

Hiermit ist $G^k : I^n \times I \to X$ rel $Z_V \cup W_1 \cup \ldots \cup W_{k-1}$ definiert, und wir setzen $f_k = G^k_1$.

Wir haben $J^{n-1} \subset Z_V$, also $G^k : I^n \times I \to X$ rel J^{n-1},

und $G^k_0 = f_{k-1} : J^{n-1} \to \{*\}$.

Andererseits $f_{k-1}(\partial I^n) \subset U$, und per Konstruktion (Dank (ii)) folgt $G^k(\partial I^n \times I) \subset U$; Also $f_{k-1} \simeq f_k$ als Ab. $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, U, *)$, und ebenso, per Induktion, $f_k \simeq f$ als solche.

Somit erfüllt f_k (i), (ii) und (iii).

(b) Nun setzen wir $g_0 = f_r$, und konstruieren wie in (a) ein Familie $g_0, \dots, g_s : I^n \to X$ mit folg. Eigenschaften:

(i') $g_0(W) \subset \left\{ \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \right. \Rightarrow g_\ell(W) \subset \left\{ \begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \right.$, $\ell = 0, \dots, s$.

(ii') $g_\ell^{-1}(X \setminus U) \cap W'_j \subset G_q(W'_j) \quad \forall j = 1, \dots, \ell$

(iii') $g_\ell \simeq g_0$ rel Z_U.

(Bemerke: $\partial I^n \subset Z_U$, so dass $g_\ell \simeq g_0 \simeq f$ als Abbil. von Trippeln $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, U, *)$.)

Wir setzen $g = g_\ell$ und es bleibt zu zeigen: g erfüllt Eigenschaft (✡) aus (1).

Sei $z \in P(g^{-1}(X \setminus U)) \cap P(g^{-1}(X \setminus U))$. Dann existieren $x \in W \in \mathcal{W}_U$, $y \in W' \in \mathcal{W}_V$ mit

(1°) $x \in g^{-1}(X \setminus V)$, $y \in g^{-1}(X \setminus U)$

(2) $P(x) = z = P(y)$

(3) $P(W) = P(W')$

Dann folgt $x \in W \cap g^{-1}(X \setminus V) \subset K_p(W)$, also

$z = P(x) \in K_{p-1}(P(W))$.

Ebenso $y \in W' \cap g^{-1}(X \setminus U) \subset G_q(W')$ also

$z = P(y) \in G_{q-1}(P(W))$. Aber da $p-1 + q-1 > n-1$ gilt $K_{p-1}(P(W)) \cap G_{q-1}(P(W)) = \emptyset$, also solch ein z existiert nicht!

Hier mit ist (A) bewiesen.

(B) $i_*: \pi_n(V, U\cap V, *) \to \pi_n(X, U, *)$ ist für $1 \leq n < p+q-2$ injektiv.

Seien also $f, g: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (V, U\cap V, *)$ gegeben, und sei gegeben eine Homotopie $H: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (X, U, *)$ mit $H_0 = i\circ f$, $H_1 = i\circ g$. Zu zeigen: eine Homotopie $G: (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (V, U\cap V, *)$ existiert, mit $G_0 = f$ und $G_1 = g$. Das geht prinzipiell wie in (A):

Es genügt, eine Homotopie

$$\varphi: (I^n \times I) \times I \longrightarrow X \quad \text{rel } \tilde{J}^n = (I^n \times \partial I) \cup (J^{n-1} \times I)$$

zwischen $\varphi_0 = H$ und φ_1 zu finden, wobei für φ_1 gilt

$$(P \times id)[\varphi_1^{-1}(X \setminus V)] \cap (P \times id)[\varphi_1^{-1}(X \setminus U)] = \emptyset.$$

(Homotopie rel $\tilde{J}^n$: garantiert, dass $\varphi_t: f \simeq g$ als Ab. von Tripeln.)

In der Tat, dann können wir eine Urysohn Funktion

$$\tau: (I^{n-1} \times 0) \times I \longrightarrow I \quad \text{mit}$$

$$\tau((P \times id)\varphi_1^{-1}(X \setminus V)) = \{1\}$$

$$\tau(\partial((I^{n-1} \times 0) \times I) \cup (P \times id)(\varphi_1^{-1}(X \setminus U))) = \{0\} \quad \text{wählen,}$$

und wie in (A)(1)

$$G: I^n \times I \longrightarrow V$$

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow \varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, \tau_x + (1-\tau_x)x_n, x_{n+1})$$

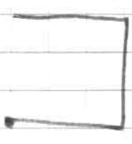
definieren, mit $\tau_x = \tau(x_1, \dots, x_{n-1}, x_{n+1})$.

Wie in (A), (1) prüft man, dass G die gewünschte Eigenschaften hat.

Nun, die Konstruktion von φ_1 (und der Homotopie φ) erfolgt genau wie in (A)(2), nur dass wir diesmal mit

$$H: (I^{n+1}, \partial I^{n+1}, \tilde{J}^n) \to (X, U, *)$$

anfangen, statt dem f aus (A)(2).


$\tilde{J}^2$

Wir brauchen diesmal $n+1 \leq p-1+q-1$, also $n < p+q-2$

#