VI SERRE-KLASSEN

In diesem Kapitel untersuchen wir die Frage: gegeben einen Raum X, in wie fern haben $\pi_n(X)$, $H_n(X)$ als Gruppen analoge Eigenschaften (z.B endliche Gruppen, endlich-erzeugte Gruppen, p-Torsionsgruppen, etc...). Dazu benutzen wir Serre-Klassen.

6.1 Definition: Eine Serre-Klasse von Abelschen Gruppen ist eine nicht-leere Klasse $\mathcal{C}$ von Abelschen Gruppen mit der Eigenschaft: ist $0 \to A \to B \to C \to 0$ eine kurze exakte Folge von Ab. Gruppen so sind die Aussagen

(a) $A \in \mathcal{C}$ und $C \in \mathcal{C}$

(b) $B \in \mathcal{C}$

äquivalent.

6.2 Bemerkungen: Ist $\mathcal{C}$ eine Serre Klasse von Ab. Gruppen, so gelten die folgenden Aussagen:

(a) $0 \in \mathcal{C}$ (Wähle $A \in \mathcal{C}$ und betrachte $0 \to A \xrightarrow{id} A \to 0 \to 0$)

(b) $A \in \mathcal{C}$ und $A' \cong A \Rightarrow A' \in \mathcal{C}$.

(c) $A \subset B$ und $B \in \mathcal{C}$, dann folgt $A \in \mathcal{C}$ und $B/A \in \mathcal{C}$.

Aus (b) folgt, dass $\mathcal{C}$ keine Menge ist.

6.3 Beispiele:

(a) Die Klasse der trivialen Gruppen.

(b) Die Klasse $\mathcal{A}b$ aller Abelschen Gruppen.

(c) Die Klasse $\mathcal{FG}$ der endlich-erzeugten Abelschen Gruppen.

(d) Die Klasse $\mathcal{F}in$ der endlichen Abelschen Gruppen.

(e) Die Klasse $\mathcal{T}ors$ der Abelschen Torsionsgruppen.

(f) Sei $P \subset \mathbb{N}$ eine Untermenge die aus Primzahlen besteht. $\mathcal{T}ors_P$, die Klasse der Abelschen Torsionsgruppen, die nur aus p^n-torsion Elemente für $p \in P$, $n \geq 1$ bestehen.

(g) Die Klasse $\mathcal{F}in_\mathbb{P} = \mathcal{T}ors_\mathbb{P} \cap \mathcal{F}in$.

<u>6.4 Bemerkung</u>: es ist nicht schwierig zu prüfen, dass die Serre-Klassen $\mathcal{C}$, die in 6.3 gelistet sind, die folgende Eigenschaft besitzen:

(6.4) $A, B \in \mathcal{C} \Rightarrow A \otimes_\mathbb{Z} B \in \mathcal{C}$ und $\mathrm{Tor}^\mathbb{Z}_1(A, B) \in \mathcal{C}$.

Gegegeben ein Serre-Klasse $\mathcal{C}$, wir möchten Berechnungen modulo $\mathcal{C}$ führen.

<u>6.5 Definition:</u> Sei $\mathcal{C}$ eine Serre-Klasse, und $f: A \to B$ ein Homomorphismus in $\mathcal{Ab}$. Dann heißt f ein $\mathcal{C}$-Monomorphismus ($\mathcal{C}$-Epimorphismus) wenn $\mathrm{Ker}(f)$ (bzw. $\mathrm{Coker}(f)$) in $\mathcal{C}$ ist, und ein $\mathcal{C}$-Isomorphismus wenn beide Eigenschaften gelten.

<u>6.6 Bemerkung</u>: zwei $\mathcal{Ab}$-Gruppen A und B heißen $\mathcal{C}$-Isomorph ($A \overset{\mathcal{C}}{\cong} B$) wenn es zwei $\mathcal{C}$-Iso $A \leftarrow C \rightarrow B$ gibt (dann ist $\overset{\mathcal{C}}{\cong}$ ein Äquivalenzrelation).

<u>6.7 Lemma</u>: Sei $F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ eine Serre Faserung mit F, E, B 0-zusammenhängend, und so dass das System $\mathcal{H}_*(F; \mathbb{Z})$ auf B trivial ist. Sei $n \geq 1$ gegeben. Betrachte die Aussagen

(a_n) $H_i(E; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C} \quad \forall \quad 0 < i \leq n$

(b_n) $H_i(B; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C} \quad \forall \quad 0 < i \leq n$

(c_n) $H_i(F; \mathbb{Z}) \in \mathcal{C} \quad \forall \quad 0 < i \leq n$.

$\mathcal{C}$ eine Serre Klasse, mit (6.4). Dann gelten:

$(b_n) + (c_n) \Rightarrow (a_n)$, $(a_n) + (c_{n-1}) \Rightarrow (b_n)$, $(a_n) + (b_{n+1}) \Rightarrow (c_n)$

<u>Beweis</u> $(b_n) + (c_n) \Rightarrow (a_n)$: Betrachte die Serre-Spektralsequenz

$$E^2_{p,q} \cong H_p(B; H_q(F)) \Rightarrow H_{p+q}(E)$$

(Hier $H_*(-) = H_*(-; \mathbb{Z})$). Wir haben

$$H_p(B; H_q(F)) = H_p(B) \otimes H_q(F) \oplus \mathrm{Tor}^\mathbb{Z}_1(H_{p-1}(B); H_q(F))$$

Zur Erinnerung: $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A;\mathbb{Z}) = 0 = \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z};A)$ $\forall\ A \in Ab$.

Aus (b_n), (c_n) und (6.4) folgt also:

$$E^2_{p,q} \in C \quad \text{für alle } \left[(p,q) \neq (0,0) \text{ und } p,q \leq n\right] (*)$$

$E^\infty_{p,q}$ ist ein Unterquotient von $E^2_{p,q}$, also gehört zu C, für alle (p,q) wie in $(*)$.

Für die Filtrierung

$$\begin{array}{ccccccccc} F_0H_i & \subset & F_1H_i & \subset & \dots & \subset & F_iH_i & = & H_i(E) \\ \| & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ E^\infty_{0,i} & & E^\infty_{1,i} & & & & E^\infty_{i,0} & & \end{array}$$

$(0 < i \leq n)$ gilt also, per Induktion auf i, $F_iH_i \in C$.

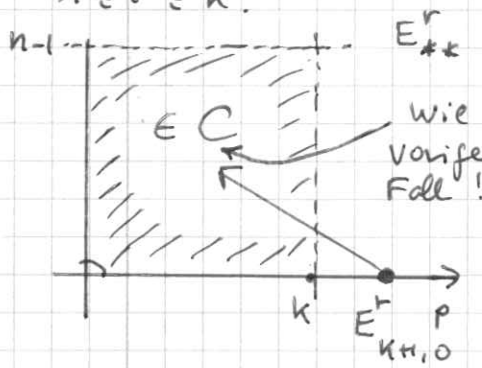
Also $H_i(E) \in C$ $\forall\ 0 < i \leq n$, also (a_n).

$(a_n) + (c_{n-1}) \Rightarrow (b_n)$: Da $H_i(E) \in C$ für $0 < i \leq n$ folgt

$F_0H_i \subset F_1H_i \subset \dots \subset F_iH_i = H_i(E)$ sind alle in C, und ebenso die Quotienten $E^\infty_{p,q}$ mit $p+q = i$.

Es gilt $H_1(B) = E^2_{1,0} = E^\infty_{1,0}$ also $H_1(B) \in C$.

Sei $1 \leq k < n$ und sei angenommen, $H_i(B) \in C$ für alle $1 \leq i \leq k$.



Wir zeigen per fallende Induktion auf r für $k+2 \geq r \geq 2$:

$E^r_{k+1,0} \in C$. Fall $r = k+2$:

$$E^{k+2}_{k+1,0} = E^\infty_{k+1,0} \in C.$$

Gilt $E^{r+1}_{k+1,0} \in C$ für ein $2 \leq r \leq k+1$, so betrachten wir die kurze exakte Folge $0 \to E^{r+1}_{k+1,0} \hookrightarrow E^r_{k+1,0} \xrightarrow{d^r} \mathrm{Bild}(d^r) \to 0$ $\left[\mathrm{Bild}(d^r) \subset E^r_{k+1-r,\,r-1} \in C \text{ dank } (c_{n-1}) + (b_k).\right]$. Also sind die erste und dritten Gruppen beide in C, also auch die zweite. Die Induktion ist abgeschlossen, und $E^2_{k+1,0} \in C$.

Daraus folgt also $H_{k+1}(B) = E^2_{k+1,0} \in C$.

$(a_n) + (b_{n+1}) \Rightarrow (c_n)$: Analog zum zweiten Fall. #

6.8 Satz Sei C eine Serre-Klasse aus den Beispiele 6.3, und sei $A \in C$. Dann gilt $H_i(K(A,n);\mathbb{Z}) \in C$ für alle $n \geq 1$ und alle $i \geq 1$.

Beweis: Wir haben Faserungen $K(A,n-1) \to PK(A,n) \to K(A,n)$ für alle $n \geq 2$. Offensichtlich $H_i(PK(A,n);\mathbb{Z}) \in C \ \forall\, i \geq 1$; Falls der Satz für $n=1$ gilt, so folgt die iterierte Anwendung von 6.7 $(a)+(c) \Rightarrow (b)$, dass $H_i(K(A;n);\mathbb{Z}) \in C$ für alle $n \geq 1$. Also genügt es, den Satz für $n=1$ zu beweisen.

Wir können annehmen, dass $K(A,1)$ ein CW-Komplex ist.
Sei $E \to K(A,1)$ die universelle Überlagerung von $K(A,1)$, mit induzierte CW-Struktur; A permutiert die Zellen von A.
Sei $(C_*(E), d)$ der zelluläre Kettenkomplex von A,
$C_0(E) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ die Augmentierung ($e_0 \mapsto 1$ für jede 0-Zelle).
Dann ist $C_*(E) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ ein freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}[A]$-Modul; P induziert eine Iso
Also gilt: $H_*(A;\mathbb{Z}) := \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}[A]}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong H_*(K(A,1);\mathbb{Z})$ (Gruppen Homologie von A).
Mit dieser "algebraische Definition" von $H_*(K(A,1);\mathbb{Z})$ und Elementarsätze aus der Homologie von Gruppen ist es leichter zu zeigen:
$A \in C \Rightarrow H_n(A;\mathbb{Z}) \in C \quad \forall\, n \geq 1$.

1°) A zyklisch; $A = \mathbb{Z} \Rightarrow K(A,1) \simeq S^1 \Rightarrow H_n(K(A,1)) \cong \begin{cases} A & n=1 \\ 0 & n>1 \end{cases}$

$A \cong \mathbb{Z}/m$, $m \neq 0, \pm 1$. Dann gilt $H_n(K(A,1)) \cong \begin{cases} A, & n \geq 1 \text{ ungerade} \\ 0 & \geq 2 \text{ gerade} \end{cases}$
(Auflösung $\cdots \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \xrightarrow{1+t+\dots+t^{m-1}} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \xrightarrow{1-t} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}/m] \to \varepsilon$ für $\mathbb{Z}/m = \langle t \mid t^m = 1 \rangle$).

2°) A endlich oder endlich erzeugt $\Rightarrow$ A ist ein (endliches) prod. von zyklischen Gruppen; also ist $H_i(A;\mathbb{Z})$ auch endlich oder endlich erzeugt (1° + Künneth).

3°) A eine Torsionsgruppe. Die Bar-Auflösung von A (siehe zum Beispiel: Brown, Cohomology of Groups, S. 18) gibt ein Kettenkomplex B_* deren Homologie ist $H_*(A;\mathbb{Z})$.
Es gilt $B_n = \mathbb{Z}\{A^n\}$. Ist $z \in B_n$ ein Zykel, dann tauchen nur endlich viele a_i in z; also ist die Untergruppe $A_z \subset A$ von A, die von den a_i's erzeugt wird, endlich. Dann ist $[z]$ im Bild von

$$H_n(A_z;\mathbb{Z}) \to H_n(A;\mathbb{Z})$$

und nach 2°) ist $H_n(A_z;\mathbb{Z})$ endlich; also ist $[z]$ torsion.

Zusammenfassung:

(a) $A \cong \{0\} \Rightarrow H_n(A;\mathbb{Z}) = 0 \quad \forall n \geq 1$ klar.

(b) $\mathcal{C} = \mathcal{A}b$: nichts zu zeigen

(c, d) $\mathcal{C} = \mathcal{FG}$ oder $\mathcal{F}in$: 2°)

(e) $\mathcal{C} = \mathcal{T}ors$: 3°)

(f) $\mathcal{C} = \mathcal{T}ors_{\underline{P}}$: die Gruppe A_z in 3°) ist dann eine endliche $\underline{P}$-torsion Gruppe, also $A_z = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathbb{Z}/p_i^{m_i}$, $p_i \in \underline{P}$.
$H_*(A_z;\mathbb{Z})$ ist auch von diesem Typ nach 2°).

(g) Folgt nach (d) und (f). #

Wir betrachten jetzt Postnikov Türme: ein Wegzus. Raum X kann man induktiv (bis auf schwache Homotopie) aus den Räumen $K(\pi_n X; n)$ konstruieren.

<u>6.9 Definition + Lemma</u>: Sei X ein 0-zus. Raum, $n \geq 1$.
Dann existiert ein relativer CW-Komplex $(X[n], X)$, so dass (a) $X \xhookrightarrow{i_n} X[n]$ induziert eine Iso auf π_i für alle $0 \leq i \leq n$

(b) $\pi_i X[n] = 0$ für $i > n$

(c) $X[n]$ hat nur Zellen von Dimensionen $\geq n+2$.