1.47 Korollar: Sei X ein CW-Komplex, $A, B \subset X$ Unterkomplexe. Wir setzen voraus:

(a) $X = A \cup B$ und $A \cap B \neq \emptyset$

(b) Das Paar $(A, A\cap B)$ ist k-zusammenhängend, $k \geq 0$

(c) Das Paar $(B, A \cap B)$ ist ℓ-zusammenhängend, $\ell \geq 0$.

Dann ist die Inklusion $(B, A\cap B) \hookrightarrow (X, A)$ eine $(k+\ell)$-Äquiv.

Beweis: Aufgabe 4.4. #

1.48 Bemerkung: Wir haben den Begriff "Kofaserung" verwendet ohne es formal zu definieren; für uns ist der wichtigste Beispiel die Inklusion eines UnterCW-komplex $A \hookrightarrow X$; für allgemeinere Räumen ist es sehr nützlich, das Konzept allgemeiner zu untersuchen: eine Referenz ist tom Dieck - Kamps - Puppe, Kap 1. Wir erwähnen hier einige Ergebnisse ohne Beweis.

1.49 Definition: Eine stetige Ab. $i: A \to X$ heißt eine Kofaserung, wenn i die Homotopie-Erweiterungs Eigenschaft für alle Räume Y hat.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, "f"] \arrow[r, "i_0"] & X\times I \arrow[l, dashed, "\exists F"', shift left=0] \\
A \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i_0"'] & Y & \\
 & A\times I \arrow[u, "H"'] \arrow[uur, "i\times id"'] &
\end{tikzcd}$$

1.50 Satz: Ist $i: A \to X$ eine Kofaserung, so ist i eine Einbettung. Ist X Hausdorff, so ist $i(A)$ abgeschlossen in X ($\Rightarrow$ Wir könnten in 1.49 verlangen, dass i die Inklusion eines Teilraums ist). Beweis: tD-K-P, 1.17. #

1.51 Satz: $i: A \hookrightarrow X$ ist genau dann eine Kofaserung, wenn $(A\times I \cup X \times 0)$ ein Retrakt von $X \times I$ ist. Beweis: tD-K-P, 1.22 #.

1.52 Satz: Sind $i: A \subset X$ und $j: B \subset Y$ Kofaserungen und ist A abgeschlossen in X, dann ist

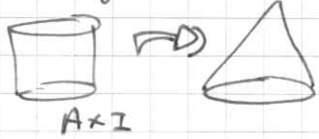
$$(X\times B) \cup (A \times Y) \subset X \times Y$$

eine Kofaserung. Beweis: tD-K-P, 3.20. #

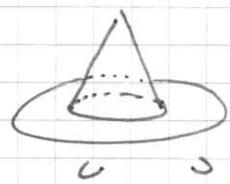
Als erste Anwendungen der Homotopie-Ausschneidung haben die exakte Folge einer Kofaserung und Freudenthalssatz. Dazu:

<u>1.53 Satz</u>: Sei $A \hookrightarrow X$ eine Kofaserung; sei $a \in A$, und $p: (X, A) \to (X/A, *)$ die Quotientenabbildung (mit $* = [a]$).
Sei angenommen, es gilt:
$$\pi_i(A, a) = 0 \quad \forall\ 0 \leq i \leq l$$
$$\pi_i(X, A, a) = 0 \quad \forall\ 1 \leq i \leq k$$
Dann ist $p_*: \pi_n(X, A, a) \to \pi_n(X/A, *)$
bijektiv für alle $1 \leq n \leq l+k$ und surjektiv für $n = l+k+1$.

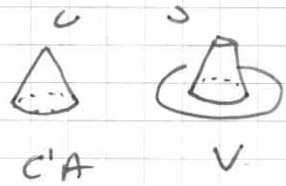
<u>Beweis</u>: Wir notieren $C'A$ den (unreduzierten) Kegel von A,
also $C'A = A \times I / (A \times \{1\})$.



Sei $C'(X, A) = X \amalg C'A \,/\!\sim$
wobei $\sim$ die Äq.rel ist, die von $X \ni a \sim (a, 0) \in A \times I$ erzeugt ist, für alle $a \in A$. (Wir nennen $C'(X,A)$ den (unred.) Abbildungskegel von $i: A \hookrightarrow X$)



Betrachte $C'A$ und $V = C'(X,A) \setminus [A \times \{1\}]$, beide als Teilräume von $C'(X,A)$ gefasst.



Die Abbildung p kann man als Verknüpfung
$$(X, A) \xhookrightarrow{i} (V, V \cap C'A) \xhookrightarrow{j} (C'(X,A), C'A) \xrightarrow{q} (C'(X,A)/_{C'A}, *) \xleftarrow[\cong]{\ell} (X/A, *)$$
zerlegen. Hier sind i, j die Inklusionen, q die Quotientenabbildung und ℓ der kanonische Homöomorphismus, der von $X \to C'(X,A) \twoheadrightarrow C'(X,A)/C'A$ induziert ist. Wir behaupten:

(a) i ist eine Homotopie-Äquivalenz: die Abbildung $r: (V, V \cap C'A) \to (X, A)$ induziert von $X \amalg A \times [0,1) \to X$, $x \mapsto x$, $(a,t) \mapsto a$ ist ein Deformationsretraktion.

(b) q ist eine Homotopie-Äquivalenz: $C'A \hookrightarrow C'(X,A)$ ist wie $A \hookrightarrow X$ auch eine Kofaserung, und $C'A \simeq *$ (Siehe II, 1.38).

(c) Die Abbildung j ist eine $(l+k+1)$-Äquivalenz:

Wir möchten Blakers-Massey verwenden, aber $C'A$ ist nicht offen in $C'(X,A)$. Wir setzen $U = C'A \setminus (A \times 0)$.

Dann sind U und V offen in $C'(X,A)$, und wir haben ein komm. Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(V, V \cap U) \arrow[r, hook, "q'"] \arrow[d] & (C'(X,A), U) \arrow[d] \\
(V, V \cap C'A) \arrow[r, "q"] & (C'(X,A), C'A)
\end{tikzcd}$$

Die vertikale Abbildungen induzieren Isomorphismen auf Homotopiegruppen (LEF und $V \cap U \hookrightarrow V \cap C'A$, $U \hookrightarrow C'A$ sind Homotopie-Äquivalenzen).

Außerdem: $U \cap V \hookrightarrow V$ $(\simeq A \hookrightarrow X)$ ist eine k-Äquivalenz,

$U \cap V \hookrightarrow U$ $(\simeq A \to *)$ ist eine $l+1$-Äquivalenz

$\overset{1.43}{\Longrightarrow}$ q' ist eine $(k+l+1)$-Äquivalenz. #

<u>1.54 Korollar</u>: Sei $A \overset{i}{\hookrightarrow} X$ eine Kofaserung, $a \in A$, sodass die Voraussetzungen in 1.53 gelten. Sei $q : (X,a) \to (X/A, *)$ die Quotienten-Abbildung, und für $2 \le m \le l+k$ sei

$$\partial'_m = \partial_m \circ p_*^{-1} : \pi_m(X/A, *) \xrightarrow{\cong} \pi_m(X,A,*) \xrightarrow{\partial} \pi_{m-1}(A,a).$$

Dann ist die (trunkierte lange) Folge

$$\pi_{l+k}(A,a) \xrightarrow{i_*} \pi_{l+k}(X,a) \xrightarrow{q_*} \pi_{l+k}(X/A,a) \xrightarrow{\partial'_{l+k}} \pi_{l+k-1}(A,a) \to \cdots$$
$$\cdots \to \pi_1(X,a) \to \pi_1(X/A,*) \quad \text{exakt.}$$

<u>Beweis</u>: ersetze $\pi_m(X,A,a)$ durch $\pi_m(X/A,*)$ via p_* in der LEF des Paares (X,A,a). #.

Wir wiederholen:

<u>1.55 Definition</u>: Sei $(X,*)$ ein punktierter Raum; wir definieren die <u>Einhängung</u> von X als

$$(\Sigma X, *) = \left(X \times I / (X \times \partial I) \cup (* \times I), \ [*] \right)$$

(die <u>unreduzierte Einhängung</u> $\Sigma' X$ eines (nicht punktierten) Raumes X ist als $\Sigma' X = X \times I / X \times \partial I$ definiert).

Ist $f: (X,*) \to (Y,*)$ ein Abbildung, so induziert $f \times id: X \times I \to Y \times I$ eine stetige Abbildung auf Quotienten:

$$\Sigma f: (\Sigma X, *) \to (\Sigma Y, *)$$

1.56 Bemerkungen: (a) Wir erhalten also ein Funktor $\Sigma: \mathcal{T}op_* \to \mathcal{T}op_*$. Dieser ist verträglich mit Homotopien (Vertausche von Quotient und Produkt möglich, da I lokal kompakt). Deshalb erhalten wir auch ein Endofunktor auf $Ho\,\mathcal{T}op_*$, und eine Abbildung (auch Einhängung genannt)

$$\Sigma_*: [X, Y]_* \to [\Sigma X, \Sigma Y]_*$$

(b) Auf $[\Sigma X, Y]_*$ haben wir (genau wie für $\pi_n(Y)$) eine Gruppenstruktur, die durch

$$(f +_1 g)[x,t] = \begin{cases} f(x, 2t) & 0 \le t \le 1/2 \\ g(x, 2t-1) & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$$ def. ist.

Iteriert man Σ, so verfügen wir über mehr Parameter $t \in I$, und können auf $[\Sigma^2 X, Y]_*$ auch $+_2$ definieren (Hier $\Sigma^n X = \Sigma(\Sigma^{n-1} X)$). Genau wie für $\pi_2(Y)$ gilt, dass $+_1$ und $+_2$ gleich sind, und $[\Sigma^n X, Y]_*$ ist für $n \ge 2$ also Abelsch. Ebenso impliziert $\Sigma(f +_1 g) = \Sigma f +_2 \Sigma g$ dass $\Sigma_*: [\Sigma X, Y] \to [\Sigma^2 X, \Sigma Y]$ ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(c) Wir hatten vor lange Zeit gesehen: ΣS^n und S^{n+1} sind für $n \ge 0$ homöomorph.

Insbesondere erhalten wir für $n \ge 0$ eine Abbildung

$$\Sigma_*: \pi_n(X) \to \pi_{n+1}(\Sigma X)$$

die ein Homomorphismus von Gruppen falls $n \ge 1$ ist.

1.57 Theorem (Einhängungssatz von Freudenthal, 1937): Sei $(X,*)$ ein punktierter CW-Komplex, der n-zusammenhängend ist, $n \ge 0$. Dann ist $\Sigma_*: \pi_m(X,*) \to \pi_{m+1}(\Sigma X, *)$ für $0 \le m \le 2n$ bijektiv und für $m = 2n+1$ surjektiv.

Beweis: Wir betrachten den (punktierten) Kegel von X,
$CX = X \times I \,/\, (X \times \{1\}) \cup (* \times I)$. Wir haben eine Einbettung $X \overset{i}{\hookrightarrow} CX$, gegeben als $X \cong X \times \{0\} \hookrightarrow X \times I \twoheadrightarrow CX$. Die Einhängung ist ein Quotient $CX \twoheadrightarrow \Sigma X$, und diese Quotientenabbildung induziert einen Homöo $CX/X \to \Sigma X$; wir identifizieren also ΣX mit CX/X. Der Raum CX ist zusammenziehbar, also ist $\pi_{m+1}(CX, X, *) \xrightarrow{\partial} \pi_m(X,*)$ ein Isomorphismus für $m \geq 1$. Der Homom ∂^{-1} bildet $[f: (I^m, \partial I^m) \to (X,*)]$ auf $[\,[f \times id]: (I^m \times I, \partial I^{m+1}, J^m) \to (CX, X, *)\,]$. Also gilt

$$\Sigma_* = p_* \circ \partial^{-1}: \pi_m(X,*) \longrightarrow \pi_{m+1}(CX, X, *) \longrightarrow \pi_{m+1}(\Sigma X, *)$$

Deshalb genügt es zu zeigen: $p_*: \pi_{m+1}(CX, X, *) \to \pi_{m+1}(\Sigma X, *)$ ist bijektiv für $m+1 \leq 2n+1$ und surjektiv für $m+1 = 2n+2$. $(*)$

Da I (lokal)-kompakt ist, ist $X \times I$ ein CW, $A = (X \times \{1\}) \cup (* \times I)$ ein Unterkomplex, und der Quotient $CX = X \times I/A$ ein CW, und (CX, X) ist also ein CW-Paar. Insbesondere ist $X \overset{i}{\hookrightarrow} CX$ eine Kofaserung. Es gilt $\pi_i(X,*) = 0 \;\; \forall\, 0 \leq i \leq n$ durch Voraussetzung, und da $CX \simeq *$ gilt auch $\pi_i(CX, X, *) = 0 \;\; \forall\, 0 \leq i \leq n+1$. Dank 1.53 hat p_* also die Eigenschaft $(*)$. #

1.58 Bemerkung: Theorem 1.57 gilt allgemeiner für wohlpunktierte Räumen; dazu braucht man Satz 1.52 um CX und ΣX bis auf Homotopie durch $C'X$ und $\Sigma' X$ zu ersetzen: tD-K-P §16.

1.59 Korollar: (1) $\pi_i(S^n, *) = 0$ für $0 \leq i < n$

(2) $\Sigma_*: \pi_i(S^n) \xrightarrow{\cong} \pi_{i+1}(S^{n+1})$ für $i \leq 2n-2$,
und $\Sigma_*: \pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n}(S^{n+1})$ ist surjektiv.

(3) Für $n \geq 2$ ist $\pi_n(S^n)$ eine zyklische Gruppe.

Beweis: (1) Für $i<n$ ist S^{n-i} wegzusammenhängend, also $0 = \pi_0(S^{n-i},*) \xrightarrow{\cong} \pi_1(S^{n-(i-1)},*) \xrightarrow{\cong} \dots \xrightarrow{\cong}$

$\xrightarrow{\cong} \pi_{i-1}(S^{n-1},*) \xrightarrow{\cong} \pi_i(S^n,*)$ dank wiederholte Anwendung von 1.57.

(2) Folgt aus (1) und 1.57.

(3) Wir hatten $\pi_1(S^1,*) \cong \mathbb{Z}$ bereits berechnet. Es gilt also

$\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1,*) \twoheadrightarrow \pi_2(S^2,*) \xrightarrow{\cong} \pi_3(S^3,*) \xrightarrow{\cong} \dots$

und damit ist $\pi_n(S^n,*)$ isomorph zu $\pi_2(S^2,*)$, $n \geq 2$, welche ein Quotient von $\mathbb{Z}$ ist. #

1.60 Bemerkung: Wir werden im nächsten Kapitel $\pi_2(S^2,*) \cong \mathbb{Z}$ berechnen, womit wir dann auch $\pi_n(S^n,*) \cong \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$ erhalten.

1.61 Bemerkung: Für $n \geq k+2$ ändern sich also die Gruppe $\pi_{n+k}(S^n)$ unter Einhängung nicht mehr, und sie heißt die k-te stabile Homotopiegruppe der Sphäre S^0:

$$\pi_k^s = \pi_k^s(S^0) := \operatorname*{colim}_m \left(\pi_{k+m}(S^m)\right) \qquad (\cong \pi_{n+k}(S^n) \text{ für } n \geq k+2).$$

Sie zu berechnen (oder ihre Struktur zu verstehen) ist einen den Hauptziele der stabilen Homotopie Theorie.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
π_k^s	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/24$	0	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/240$	$(\mathbb{Z}/2)^2$

9	10	11	12	13	14	15	...
$(\mathbb{Z}/2)^3$	$\mathbb{Z}/6$	$\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/540$	0	$\mathbb{Z}/3$	$(\mathbb{Z}/2)^2$	$\mathbb{Z}/480 \oplus \mathbb{Z}/2$	

Referenz: D. Ravenel, "Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres".